BOLETÍN DE MATEMÁTICAS

VOLUMEN III — Agosto de 1969 — FASCÍCULO 5

EL ESPACIO EUCLIDEANO R^3

por
Hernando PÉREZ

Introducción.

En el libro <<Elementary Geometry from an advanced Standpoint>> del profesor Edwin MOISE se da la siguiente noción de espacio geométrico:

Se considera que se tiene un espacio geométrico cuando se tiene un triplete $(S,\mathcal{L},\mathcal{P})$ donde S es un conjunto llamado <<espacio>> y sus elementos <<puntos>>, $\mathcal{L}$ una familia de conjuntos cuyos elementos son las <<rectas>>, $\mathcal{P}$ una familia de conjuntos cuyos elementos llamamos <<planos>> de tal manera que:

I0) Todas las rectas y todos los planos son conjuntos de puntos.

I1) Si P, Q son puntos diferentes de S, existe una única recta $\overleftrightarrow{PQ}$ que los contiene.

I2) Dados P, Q, R puntos que no pertenecen a una misma recta, existe un único plano $\overleftrightarrow{PQR}$ que los contiene.

I3) Si P, Q son puntos diferentes de un plano π, entonces $\overleftrightarrow{PQ} \subset \pi$.

I4) Si π_1, π_2 son planos diferentes tales que $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$, entonces $\pi_1 \cap \pi_2$ es una recta.

I5) Toda recta contiene por lo menos dos puntos. Todo plano contiene por lo menos tres puntos no colineales (que no están sobre la misma recta). S contiene por lo menos cuatro puntos no coplanares (que no están sobre el mismo plano).

Axioma de la distancia. A todo par de puntos P, Q de S corresponde un único número real $d(P,Q)$ tal que: si P, Q, R son elementos cualesquiera de S:

D1) $d(P,Q) \geq 0$.

D2) $d(P,Q) = d(Q,P)$.

D3) $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$.

D4) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$.

Axioma de completez. Si L es una recta, existe una función biunívoca

$\varphi: L \to \mathbb{R}$ tal que, si P, Q son puntos de L, entonces:

$$d(P,Q) = |\varphi(P) - \varphi(Q)|$$

($\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales).

Axioma de separación del espacio. Dado π un plano existen $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ subconjuntos de S tales que:

S1) $\pi \cap \mathcal{H}_1 = \emptyset$, $\pi \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$.

S2) $S = \pi \cup \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$.

S3) $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son conjuntos convexos.

S4) Si $P \in \mathcal{H}_1$ y $Q \in \mathcal{H}_2$ entonces el segmento $\overline{PQ}$ intersecta π.

En la anterior construcción axiomática, se supone conocido el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. La presente nota divulgativa, demuestra que, siguiendo las ideas de Tom M. Apostol, si asumimos $\mathbb{R}$, se demuestra la existencia de un espacio geométrico.

PARTE I.

Supongamos pues, dado el conjunto $\mathbb{R}$. Definimos

$$\mathbb{R}^3 = \{ (x,y,z) ;\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R} \} .$$

En $\mathbb{R}^3$ tenemos las siguientes operaciones:

a) $(a,b,c)\bullet(x,y,z) = ax + by + cz = P\bullet Q$

b) $\alpha(a,b,c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c) = \alpha P$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $(a,b,c)\mathrm{x}(x,y,z) = (bz - cy,\ cx - az,\ az - bx) = P\mathrm{x}Q$

Detalle completo de las propiedades de estas operaciones pueden consultarse en [1] y [2]. Utilizamos a continuación todas estas propiedades y además la siguiente:

a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 son números reales tales que

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0,$$

si y sólo si existen x_1, x_2 números reales únicos tales que

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Esto último puede consultarse en [3].

PARTE II

Vamos a construir el triplete $(S,\mathcal{L},\mathcal{P})$ donde $S = \mathbb{R}^3$. Los elementos de $\mathcal{L}$ son los conjuntos de la forma $\{P_o + \alpha V; \alpha \in \mathbb{R}\}$ donde P_o es un elemento fijo de $\mathbb{R}^3$ y $V \in \mathbb{R}^3$ fijo tambien, tal que $\|V\| = 1$ (Si $V = (v_1,v_2,v_3)$, $\|V\| = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}$). Por definición, una recta en $\mathbb{R}^3$ es, pues, el conjunto de todos los puntos de la forma $P_o + \alpha V$ donde α toma todos los valores reales posibles.

Los elementos de $\mathcal{P}$ son los conjuntos de la forma

$$\{P ; (P - P_o)\bullet N = 0\}$$

con P_o, N, elementos fijos de $\mathbb{R}^3$ y $\|N\| = 1$.

OBSERVACIONES. 1) Si $\ell = \{P_o + \alpha V; \alpha \in \mathbb{R}\}$ es una recta y $P_1 \in \ell$ entonces $\ell = \{P_1 + \alpha V; \alpha \in \mathbb{R}\}$. También $\ell = \{P_1 + \alpha(-V) ; \alpha \in \mathbb{R}\}$.

2) Si $\pi = \{P; (P - P_o)\bullet N = 0\}$ es un plano y $P_1 \in \pi$ entonces

$$\pi = \{P; (P- P_1)\bullet N = 0\} = \{P; (P - P_1)\bullet(-N) = 0\}$$

Demostramos ahora algunos lemas.

LEMA 1. Si $A,B \in \mathbb{R}^3$ son diferentes de $(0,0,0) = 0$ entonces

$$|A\bullet B| = \|A\|\cdot\|B\|$$

si y solamente si existe $\lambda \in R$ tal que $A = \lambda B$.

Demostración. Supongamos $|A\bullet B| = \|A\|\cdot\|B\|$.

a) Si $A\bullet B \geq 0$ entonces

$$(A - \frac{\|A\|}{\|B\|}B)\bullet(A - \frac{\|A\|}{\|B\|}B) = \|A\|^2 + \frac{\|A\|^2}{\|B\|^2}\|B\|^2 - 2\frac{\|A\|}{\|B\|}(A\bullet B)$$

$$= \|A\|^2 + \|A\|^2 - 2\|A\|^2 = 0$$

De manera que

$$\left\|(A - \frac{A}{B} B)\right\|^2 = 0,$$

y por lo tanto $A = (\|A\|/\|B\|)B$ y entonces llamando $\lambda = \|A\|/\|B\|$ obtenemos lo que queríamos demostrar.

b) Si $A\bullet B \leq 0$, llamando $C = -A$ tendremos $C\bullet B \geq 0$ y

$$|A\bullet B| = |C\bullet B| = \|C\|\cdot\|B\|$$

y según a) existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $C = \rho B$; tomando $\rho = -\lambda$ tendremos $A = \lambda B$.

Supongamos ahora $A = \lambda B$; $|A \bullet B| = |(\lambda B) \bullet B| = |\lambda| \|B\|$; pero

$$\|A\| \|B\| = \|\lambda B\| \|B\| = |\lambda| . \|B\|^2$$

y entonces $|A \bullet B| = \|A\| \cdot \|B\|$.

__LEMA 2__. __Si__ N __es un elemento de__ $\mathbb{R}^3$ __diferente de__ 0 __existen__ A,B __en__ $\mathbb{R}^3$ __diferentes de__ 0 __tales que__ $A \bullet N = 0$, $A \bullet B = 0$, $B \bullet N = 0$.

__Demostración__: Si $N = (a,b,c)$ y $N \neq 0$, entonces alguno de los números a,b,c es diferente de 0. Suponiendo $a \neq 0$, el punto $A = (-(b+c)/a,1,1)$ es tal que $A \bullet N = 0$ y también $A \neq 0$. Tomando $B = A x N$, la proposición queda demostrada con el siguiente lema:

__LEMA 3__. __Para__ A, B $\in \mathbb{R}^3$ __diferentes de cero, se tiene que__: $AxB = 0$ __si y sólo si__ $A = \lambda B$ __para algún__ $\lambda \in \mathbb{R}$.

__Demostración__: Supongamos $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ y que $AxB = 0$. Entonces $\alpha_2 \beta_3 = \alpha_3 \beta_2$, $\alpha_3 \beta_1 = \alpha_1 \beta_3$, $\alpha_1 \beta_2 = \alpha_2 \beta_1$. Tenemos

i) Ninguna componente de A es 0. Entonces según las anteriores identidades, ninguna componente de B es cero, y tendremos $\alpha_1/\beta_1 = \alpha_2/\beta_2 = \alpha_3/\beta_3$, llamando este valor común λ se tiene $A = \lambda B$.

ii) Si algunas componentes de A son cero y las demás no lo son, entonces las correspondientes componentes de B son cero o diferentes de cero, y entonces también es posible calcular λ . Por ejemplo, suponiendo $\alpha_1 = 0$ pero $\alpha_2 \neq 0$ y $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_3 \beta_1 = \alpha_1 \beta_3$ implica $\alpha_3 \beta_1 = 0$, y por lo tanto, $\beta_1 = 0$. Si $\beta_2 = 0$ entonces $\alpha_2 \beta_3 = \alpha_3 \beta_2 = 0$ y así $\beta_3 = 0$; pero $B \neq 0$. De manera que β_2 y β_3 no pueden ser cero. En este caso $\lambda = \alpha_2/\beta_2 = \alpha_3/\beta_3$.

PARTE III

Deducimos ahora los axiomas en $(\mathbb{R}^3, \mathcal{L}, \mathcal{P})$.

__TEOREMA 1__. __Si__ P_1, Q_1 __son puntos diferentes en__ $\mathbb{R}^3$, __existe una única recta que los contiene a ambos__.

__Demostración__: Si $P_1 \neq Q_1$ entonces $\|P_1 - Q_1\| \neq 0$ y entonces

$$V = \frac{1}{\|P_1 - Q_1\|} (P_1 - Q_1)$$

es un vector unitario. La recta $\ell = \{P_1 + \alpha V ; \alpha \in \mathbb{R}\}$ contiene a P_1 y Q_1, pues tomando $\alpha = 0$, tenemos $P_1 + 0.V = P_1$ y tomando $\alpha = -\|P_1 - Q_1\|$ entonces $P_1 + \|P_1 - Q_1\|(Q_1 - P_1)/\|Q_1 - P_1\| = Q_1$.

Supongamos ahora que $\ell' = \{P_o + \alpha V \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ es una recta que contiene a P_1 y a Q_1. Según las observaciones que hemos hecho, $\ell' = \{P_o + \alpha V \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Como $Q_1 \in \ell'$ existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tal que $Q_1 = P_1 + \alpha_1 V$; $\alpha_1 \neq 0$ pues $Q_1 \neq P_1$. Entonces $Q_1 - P_1 = \alpha_1 V$, y, por tanto, $\|Q_1 - P_1\| = |\alpha_1| \|V\|$, de manera que $\alpha_1 = \|Q_1 - P_1\|$ ó $\alpha_1 = - \|Q_1 - P_1\|$, y por tanto,

$$V = \frac{Q_1 - P_1}{\|Q_1 - P_1\|} \qquad \text{ó} \qquad V = - \frac{Q_1 - P_1}{\|Q_1 - P_1\|}$$

y en ambos casos tenemos $\ell = \ell'$.

TEOREMA 2. Todo plano tiene por lo menos tres puntos no colineales.

Demostración: Sea $\pi = \{P \ ; \ (P - P_o) \bullet N = 0\}$ un plano cualquiera. Como $N \neq 0$, según el lema 2 existen $A, B \in \mathbb{R}^3$ diferentes de cero con las propiedades del lema. $P_1 = P_o + A$ pertenece a π ya que $(P_1 - P_o) \bullet N = A \bullet N = 0$; de la misma manera, $P_2 = P_o + B$ pertenece a π. Los puntos P_o, P_1, P_2 no son colineales. En efecto, supongamos que existe $\ell = \{Q_o + tV; \ t \in \mathbb{R}\}$ que contenga a P_o, P_1, P_2; existen entonces $t_o, t_1, t_2 \in R$ tales que: $P_o = Q_o + t_o V$, $P_1 = Q_o + t_1 V$, $P_2 = Q_o + t_2 V$; se sigue que $A = P_1 - P_o = (t_1 - t_o)V$, $B = P_2 - P_o = (t_2 - t_o)V$, y por tanto, $A \bullet B = (t_1 - t_o)(t_2 - t_o)$, y como $t_1 \neq t_o$ y $t_2 \neq t_o$, entonces $A \bullet B \neq 0$, lo cual contra la manera como se escogieron A y B.

TEOREMA 3. Si P_o, P_1, P_2 son tres puntos no colineales existe un único plano π tal que $P_o, P_1, P_2 \in \pi$.

Demostración: a) $N_1 = (P_2 - P_o) x (P_1 - P_o)$ es diferente de 0, pues de lo contario, según el lema 3, existe $\lambda_o \in R$ tal que $P_2 - P_o = \lambda_o (P_1 - P_o)$ y entonces la recta $\ell = \{P_o + \alpha V; \ \alpha \in \mathbb{R}\}$, donde $V = (P_1 - P_o)/\|P_1 - P_o\|$, contiene a $P_o = P_o + 0.V$ y a $P_1 = P_o + (\|P_1 - P_o\|)V$ y a $P_2 = P_o + \lambda_o(\|P_1 - P_o\|)V$, lo cual va contra la hipótesis del teorema. Por otra parte $N = N_1/\|N_1\|$ es tal que $\|N\| = 1$. El plano

$$\pi_o = \{P \ ; \ (P - P_o) \bullet N = 0\}$$

contiene evidentemente a P_o, P_1 y P_2.

b) Antes de demostrar la unicidad del plano π_o, demostraremos lo siguiente: Si A, B, N, M son tales que $A \bullet N = A \bullet M = B \bullet N = B \bullet M = 0$ y A, B son linealmente independientes, entonces existe $\lambda \in R$ tal $M = \lambda N$. En efecto, cuatro vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$ son dependientes, luego existen $\alpha, \beta, n, m \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$\alpha A + \beta B + nN + mM = 0,$$

y entonces, haciendo el producto escalar de la anterior expresión primero por N y después por M, tendremos

$$\begin{aligned} n\|N\|^2 + m(M\circ N) &= 0 \\ n(N\circ M) + n\|M\|^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\ )$$

y m y n no pueden ser simultáneamente nulos, pues de lo contrario, $\alpha A + \beta B = 0$, con α, β no simultáneamente nulos, lo cual va contra la hipótesis de independencia lineal de A y B. De manera que, según el resultado en la Parte I, debemos tener:

$$\|N\|^2\|M\|^2 = (M\circ N)^2;$$

por lo tanto, $\|N\|\|M\| = |N\bullet M|$, y según el lema 1, $M = \lambda N$, para álgún $\lambda \in \mathbb{R}$. l.q.q.d..

c) Supongamos, pues, que $\pi' = \{Q ; (Q - Q_o)\bullet M = 0\}$ es un plano que contiene a P_o, P_1, P_2. Es claro que $\pi' = \{Q ; (Q - P_o)\bullet M = 0\}$. Como P_1, P_2 pertenecen a π' entonces $(P_1 - P_o)\bullet N = 0$ y $(P_2 - P_o)\bullet N = 0$, y como $(P_1 - P_o)$, $)P_2 - P_o)$ son linealmente independientes, existe entonces $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $M = \lambda N$; por consiguiente, $\|M\| = |\lambda|\cdot\|N\|$, o sea $|\lambda| = 1$, lo cual nos indica que $\lambda = 1$ ó $\lambda = -1$, y entonces $M = -N$ ó $M = N$, y en ambos casos tenemos $\pi_o = \pi'$.

TEOREMA 4. Si dos planos diferentes se intersectan, su intersección es una recta.

Demostración: Sean $\pi_1 = \{Q ; (Q - A)\bullet N = 0\}$ y $\pi_2 = \{P; (P - A)\bullet M = 0\}$. Si $N\times M = 0$ entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $N = \lambda M$, y como $\|N\| = \|M\| = 1$, entonces $N = M$ ó $N = -M$, y esto implica $\pi_1 = \pi_2$. De manera que $N\times M \neq 0$. Vamos a demostrar que $\pi_1 \cap \pi_2 = \{A + \rho V ; \rho \in \mathbb{R}\}$, donde $V = (N\times M)/\|N\times M\|$. En efecto,

a) $\ell = \{A + \rho V ; \rho \in \mathbb{R}\} \subset \pi_1 \cap \pi_2$, pues si $(A + \rho V) \in \ell$ entonces $((A+\rho V) - A)\bullet M = (\rho V)\bullet M = \rho(N\times M\bullet M)/\|N\times M\| = 0$. De la misma manera, $((A+\rho V)-A)\bullet N = 0$.

b) $\pi_1 \cap \pi_2 \subset \ell$. En efecto, sea Q un punto tal que $(Q-A)\bullet N = 0 = (Q-A)\bullet M$; llamamos $X = Q - A$. Existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, números reales no todos nulos tales que

$$\alpha X + \beta N + \gamma M + \delta(N\times M) = 0;$$

multiplicando esclarmente por N y después por M, tendremos:

$$\beta \|N\|^2 + \gamma(M \circ N) = 0$$

$$\beta(N \circ M) + \gamma\|M\|^2 = 0.$$

Como $\|N\|\|M\| \neq \|N\|^2\|M\|^2$, pues de lo contrario, $N = \lambda M$, y entonces $\pi_1 = \pi_2$, debemos tener $\beta = 0$ y $\gamma = 0$ (según Parte I). De manera que $\alpha X + \delta(N \times M) = 0$, y $\alpha \neq 0 \neq \delta$, lo cual nos permite decir que $Q - A = \rho(N \times M)$, con $\rho = -\delta/\alpha$. Entonces $Q = A + \rho(N \times M) = A + \rho_o V$, donde $\rho_o = \rho\|N \times M\|$. l.q.q.d.

Si $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, definimos $d(P,Q) = \|P-Q\|$ como la distancia entre P y Q. Se comprueban fácilmente D_1), D_2) D_3), D_4) de la introducción. Si $\ell = \{P_o + \rho V \ ; \ \rho \in \mathbb{R}\}$ la función $\varphi(P_o + \rho V) = \rho$ es la función del axioma de <<completez>>.

Deducimos ahora el Teorema de separación del espacio. Para ello necesitamos algunos resultados preliminares:

Si P y Q son puntos de $\mathbb{R}^3$, llamamos <u>segmento cerrado de extremos</u> P <u>y</u> Q, al conjunto

$$\overleftrightarrow{PQ} = \{\rho P + (1-\rho)Q \ ; \ 0 \leq \rho \leq 1\}.$$

observemos que $\overleftrightarrow{PQ}$ es parte de la recta $\ell = \{P + \rho(Q-P); \ \rho \in \mathbb{R}\}$.

Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ se llama <u>convexo</u> si se cumple la siguiente propiedad:

<u>para todo</u> P, $Q \in K$, $PQ \subset K$.

Por ejemplo, si $K = \{X; \|X - X_o\| \leq r\}$, donde X_o es un punto fijo de $\mathbb{R}^3$ y r un número real positivo, es un conjunto convexo.

<u>TEOREMA 5. Si</u> π <u>es un plano</u>, <u>entonces existen</u> $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, <u>subconjuntos de</u> $\mathbb{R}^3$ <u>tales que</u>

a) $\pi \cap \mathcal{H}_1 = \emptyset$, $\pi \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$.

b) $\mathbb{R}^3 = \pi \cup \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$.

c) $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ <u>son convexos</u>.

d) <u>Si</u> $P_1 \in \mathcal{H}_1$ <u>y</u> $P_2 \in \mathcal{H}_2$, <u>entonces</u> $\overleftrightarrow{P_1P_2} \cap \pi \neq \emptyset$.

<u>Demostración</u>: Si π es un plano, entonces

$$\pi = \{P \ ; \ (P-P_o) \bullet N = 0\}, \quad \|N\| = 1.$$

Definimos

$$\mathcal{H}_1 = \{P \ ; \ (P-P_o) \bullet N > 0\}, \quad \mathcal{H}_2 = \{P; (P-P_o) \bullet N < 0\};$$

veamos que $\mathcal{H}_1$ es convexo: sean, pues, P, Q $\in \mathcal{H}_1$ y $\alpha P+(1-\alpha)Q \in \overleftrightarrow{PQ}$; entonces

$$(\alpha P + (1-\alpha)Q - P_o))\bullet N = ((\alpha P + (1-\alpha)Q)-(\alpha P_o + (1-\alpha)P_o))\bullet N$$
$$= (\alpha(P-P_o)\bullet N) + ((1-\alpha)(Q-Q_o)\bullet N).$$

como $(P-P_o)\bullet N > 0$ y $(Q-P_o)\bullet N > 0$, entonces $(\alpha P + (1-\alpha)Q-P_o)\bullet N > 0$, y, por lo tanto, $\overleftrightarrow{PQ} \subset \mathcal{H}_1$. De la misma manera podemos de mostrar que $\mathcal{H}_2$ es convexo. Evidentemente, $\mathbb{R}^3 = \pi \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_1$, y $\pi \cap \mathcal{H}_1 = \emptyset$, $\pi \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$. Vamos ahora a demostrar la propiedad d) del teorema: consideremos $P_1 \in \mathcal{H}_1$ y $P_2 \in \mathcal{H}_2$. Entonces existen Q_1, Q_2 puntos de π tales que $(P_1 - Q_1) \parallel N$, $P_2-Q_2 \parallel N$ ($A \parallel B$ si y sólo si existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $A = \rho B$). En efecto: si $Q_1 = P_1 - \alpha_1 N$, donde $\alpha_1 = (P_1-P_o)\bullet N$, entonces $(Q_1 - P_o)\bullet N = 0$, y, por lo tanto, $Q_1 \in \pi$ y $P_1 - Q_1 = \alpha_1 N$, o sea, $(P_1-Q_1) \parallel N$. De la misma manera, tomando $Q_2 = P_2 - \alpha_2 N$, con $\alpha_2 = (P_2 -P_o)\bullet N$, vemos que $Q_2 \in \pi$ y $(P_2-Q_2) \parallel N$. Finalmente, podemos observar que $\alpha_1 > 0$, pues $P_1 \in \mathcal{H}_1$, y también que $\alpha_2 < 0$, ya que $P_2 \in \mathcal{H}_2$. Por otra parte, si

$$Q = P_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}(P_2 - P_1)$$

entonces

$$Q = (Q_1 + \alpha_1 N) + \frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}((Q_2-Q_1) + (\alpha_2-\alpha_1)N)$$
$$= Q_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}(Q_2 - Q_1).$$

Como $0 < \alpha_1/(\alpha_1 - \alpha_2) < 1$, entonces $Q \in \overleftrightarrow{P_1P_2}$. Puede suceder que $Q_1 = Q_2$, con lo cual $Q = Q_1$, y, por lo tanto, $Q \in \overleftrightarrow{P_1P_2} \cap \pi$. En el caso que $Q_1 \neq Q_2$, podemos decir que $Q \in \overleftrightarrow{Q_1Q_2} \subset \pi$, y de esta manera $Q \in \overleftrightarrow{P_1P_2} \cap \pi$.

Es evidente ahora que, como P_1 y P_2 no pertenecen a π, la intersección de π con $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ no puede contener más de un punto. Concluímos pues que $\overleftrightarrow{P_1P_2} \cap \pi = Q$.

REFERENCIAS

1. Tom M. APOSTOL, Matemática Básica para técnicos, vol.I, Reverté, Barcelona (cap. 5).

2. Tom M. APOSTOL, Análisis Matematico, Reverté, Barcelona (cap.11)

3. Guillermo RESTREPO, Geometría Analítica, Publicaciones del Dpto. de Mat. y Estd., Universidad Nacional de Colombia, 1963.

4. Edwin MOISE, Elementary Geometry from an advanced stand-point, Addison-Wesley, New York.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia, S.A.

(Recibido en marzo de 1969)

<<<<<<<<<<<<<<o>>>>>>>>>>>>>>

A V I S O I M P O R T A N T E

LA UNIVERSIDAD DEL CAUCA

y la

SOCIEDAD COLOMBIANA DE MATEMATICAS

invitan al

III CONGRESO NACIONAL DE MATEMATICAS A NIVEL MEDIO

que se celebrará en la ciudad de Popayán durante el mes de noviembre de 1969.

Presidentes del Comité Organizador: Gerardo PRADO, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia.

Camilo RUBIANO, Sociedad Colombiana de Matemáticas, Apartado Nacional 2521, Bogotá, D.E., Colombia.

Cualquier información adicional debe solicitarse a uno de los dos presidentes del Comité Organizador.