

# Geometría experimental en el espacio: uso de la teoría de homografías y del software cabri 3D para resolver un problema de geometría en el espacio

Experimental geometry in space: use of the homographies theory and software cabri 3D to solve a problem of geometry in the space

Martín E. Acosta<sup>1,a</sup>, Carlos W. Rodríguez<sup>2,b</sup>

**Resumen.** Se resuelve el problema: Dadas tres rectas paralelas no coplanares, construir un triángulo equilátero que tenga sus tres vértices sobre las rectas. Se utiliza una estrategia de geometría experimental: Con base en figuras dinámicas construidas en Cabri 3D se hace el análisis del problema, se formulan conjeturas y se formalizan los procesos de razonamiento utilizando la teoría de las homografías.

**Palabras claves:** Geometría experimental, homografía, geometría dinámica, geometría sintética.

**Abstract.** It is solved the following problem: Given three non-coplanar parallel lines, construct an equilateral triangle having its three vertices on them, using an experimental geometry strategy: based on Cabri 3D diagrams, the problem is analyzed, conjectures are formulated and based on the theory of homographies, the reasoning processes is formalized.

**Keywords:** Experimental geometry, homography, dynamic geometry, synthetic geometry.

Mathematics Subject Classification: 51K99, 51K10.

Recibido: septiembre de 2014

Aceptado: octubre de 2014

## 1. Introducción

Durante el siglo XIX la geometría vivió un proceso de enriquecimiento y renovación, en el que se desarrollaron nuevos enfoques teóricos que darían nacimiento a la geometría proyectiva, ver [5]. Esos nuevos métodos y teorías dieron fuerza a lo que se llamó la ‘geometría sintética’<sup>1</sup> en oposición a la ‘geometría

<sup>1</sup>Doctorado Interinstitucional en Educación, Enfoque de Educación Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

<sup>a</sup>maedu@hotmail.com

<sup>b</sup>cwrodriguez@matematicas.uis.edu.co

<sup>1</sup>**Geometría sintética:** Es la geometría en la que no se usan ecuaciones para su razonamiento.

analítica', ver [6]. Desafortunadamente esa geometría sintética, que podía verse como una extensión de la geometría euclidiana, fue perdiendo influencia frente a los enfoques analítico-algebraicos, hasta el punto que hoy en día ha sido olvidada completamente. Recientemente, la difusión del software de geometría dinámica, que facilita el razonamiento sobre las figuras directamente, sin pasar por su representación algebraica, ha vuelto a despertar el interés en los métodos sintéticos de razonamiento y de resolución de problemas. Este software de geometría dinámica se caracteriza por el movimiento y la continuidad, dos aspectos que la geometría euclidiana clásica no está preparada para teorizar. Por eso vuelve a ser importante redescubrir los métodos y teorías de la geometría sintética del siglo XIX, que incluían en su sintaxis y en sus razonamientos tanto el movimiento como la continuidad.

En el presente artículo presentamos un ejemplo de resolución de un problema de geometría sintética utilizando la teoría de las homografías, desarrollada por Michel Chasles. Nuestra intención no es exponer de manera sistemática la teoría, sino mostrar su utilidad en la resolución del problema, y la manera natural como se llega a ella a partir de la experimentación con software de geometría dinámica. Esperamos de esta manera contribuir al redescubrimiento y el estudio de la geometría sintética y a su uso en la resolución de problemas de geometría.

## 2. Concepto de homografía

La geometría sintética del siglo XIX se caracteriza por su voluntad de considerar las familias de figuras a partir de sus características más generales, tratando de eliminar el estudio de casos. Es así como esta geometría considera que todo par de rectas tienen un punto en común (cuando este punto común se encuentra en el infinito las rectas son paralelas), y que un círculo y una recta tienen siempre dos puntos de intersección (que pueden ser idénticos si la recta es tangente al círculo, o imaginarios si la recta no corta el círculo). Esta preocupación por encontrar las propiedades más generales de las figuras, y de reunir los distintos casos de figura llevó al estudio de lo que hoy en día se conoce como las transformaciones geométricas. Dichas transformaciones eran procedimientos geométricos que permitían la obtención de unas figuras a partir de otras, manteniendo precisamente sus propiedades: por ejemplo, era posible obtener una elipse o una hipérbola a partir de un círculo, permitiendo transferir las propiedades del círculo a las diferentes secciones cónicas, y considerarlas todas como una misma familia de figuras. Las primeras transformaciones utilizadas por los geómetras fueron la proyección y la sección, y a partir de ellas Poncelet comenzó a definir lo que llamó las 'propiedades proyectivas' de las figuras. Fue el estudio detallado de esas propiedades proyectivas lo que condujo a Chasles a definir el bicociente o proporción anarmónica como la propiedad proyectiva fundamental, y a definir la homografía como una transformación que conserva el bicociente, ver [1].

En el ejemplo que vamos a presentar, utilizaremos ese concepto de homografía o de correspondencia homográfica entre puntos de una misma recta. Una vez identificada la correspondencia homográfica entre puntos de una misma recta, aplicaremos características teóricas de la homografía, como el hecho de que

toda homografía tiene dos puntos dobles (o puntos fijos); es decir, existen dos puntos que son sus propios transformados. Este análisis nos permitirá encontrar la solución del problema utilizando únicamente procedimientos de construcción, sin recurrir al planteamiento de ecuaciones.

### 3. Problema

Dadas tres rectas paralelas no coplanares en el espacio, construir un triángulo equilátero que tenga sus vértices sobre las tres rectas.

#### 3.1. Exploración 1 (Análisis del problema)

Aplicando la técnica de análisis que consiste en imaginar el problema resuelto y luego buscar en esa imagen propiedades que permitan resolverlo, se construye un triángulo equilátero  $\triangle ABC$  en un plano  $\pi_1$  y se trazan rectas paralelas que pasen por los vértices (ver Figura 1).

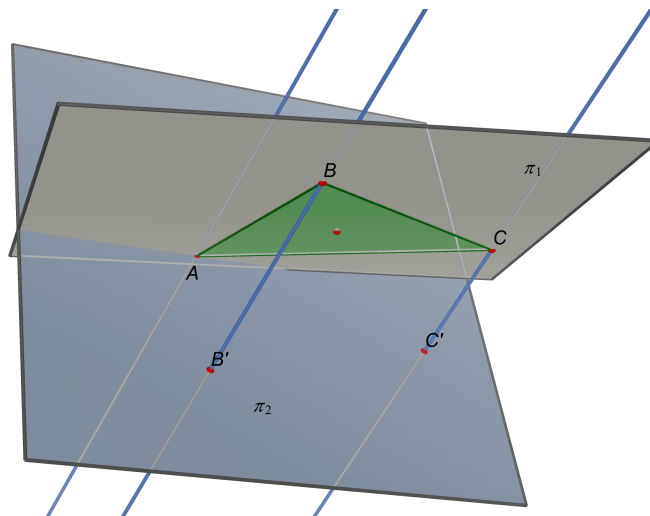


Figura 1: El triángulo  $\triangle ABC$  es equilátero y las rectas que pasan por sus vértices son paralelas.

Sea  $\pi_2$  un plano perpendicular a las rectas y que contiene a  $A$ ,  $B'$  y  $C'$  los puntos de intersección de las otras dos rectas con  $\pi_2$  (ver Figura 1). Se usa este plano como punto de partida para construir la solución del problema. Si se rota el triángulo de tal forma que la imagen esté sobre el plano  $\pi_2$ , la solución del problema podrá encontrarse invirtiendo esa rotación.

El eje de rotación será la intersección de los dos planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ . Para construir la imagen de  $ABC$  por la rotación se trazan círculos alrededor del eje de rotación que pasen por los puntos  $B$  y  $C$  respectivamente. Las intersecciones de los círculos con  $\pi_2$  son dos pares de puntos que definen triángulos equiláteros con  $A$ , se denotarán  $B''$  y  $C''$  dos de estos puntos (ver Figura 2).

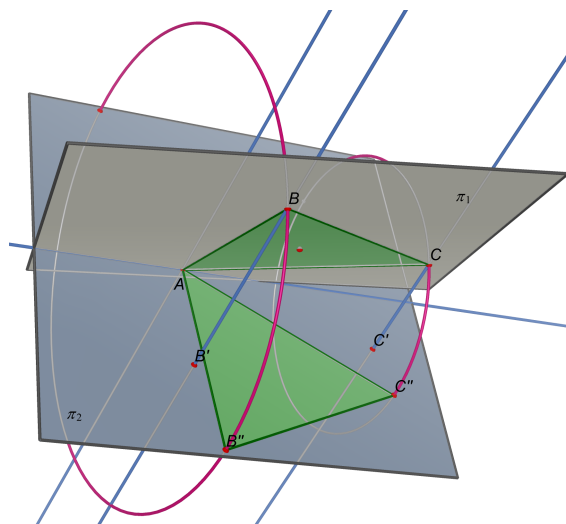


Figura 2: Triángulo  $\triangle AB''C''$  es la rotación del triángulo  $\triangle ABC$  sobre el plano  $\pi_2$ .

La solución consiste en construir el triángulo  $AB''C''$  y el eje de rotación a partir de las tres rectas paralelas y el plano perpendicular.

Si se trazan las rectas  $BC$ ,  $B'C'$  y  $B''C''$  se observa que se cortan en un punto  $K$  sobre el eje de rotación (ver Figura 3). Si se logra hallar este punto  $K$  se puede construir la solución del problema.

Los datos del problema son las tres rectas paralelas y el plano perpendicular. De manera que los puntos  $A$ ,  $B'$  y  $C'$  quedan determinados. Si se logra determinar  $K$  sobre la recta  $B'C'$ , se puede construir el eje de rotación  $KA$ , y utilizando ese eje es posible construir el triángulo equilátero  $\triangle AB''C''$  que tendrá sus vértices  $B''$  y  $C''$  sobre las rectas perpendiculares a  $KA$  por  $B'$  y  $C'$  respectivamente (ver Anexo 1). Una vez construido el triángulo  $AB''C''$ , se invierte la rotación para construir el triángulo  $ABC$  buscado.

El problema se reduce entonces a determinar el punto  $K$  sobre la recta  $B'C'$  tal que al construir el triángulo  $AB''C''$ , la recta  $B''C''$  pase por  $K$ .

### 3.2. Exploración 2 (Construcción de la solución)

Dadas las rectas paralelas no coplanares y el plano  $\pi_2$ , se parte de los puntos  $A$ ,  $B'$  y  $C'$ , intersecciones de las rectas con  $\pi_2$ . Se construye la recta  $B'C'$  y se coloca un punto cualquiera  $K$  sobre ella. Se traza la recta  $AK$ , y las rectas  $r_1$  y  $r_2$  perpendiculares a  $AK$  por  $B'$  y  $C'$ . Se construye el triángulo equilátero  $AB''C''$ , tal que  $B''$  y  $C''$  queden sobre  $r_1$  y  $r_2$ <sup>2</sup>. La recta  $B''C''$  corta la recta  $B'C'$  en un punto  $K'$  que en general es diferente de  $K$  (ver Figura 4). Pero al arrastrar  $K$ , puede verse que existen dos posiciones en las que los puntos  $K$  y  $K'$  coinciden. Esas posiciones serán las soluciones del problema.

<sup>2</sup>Ver Anexo 1.

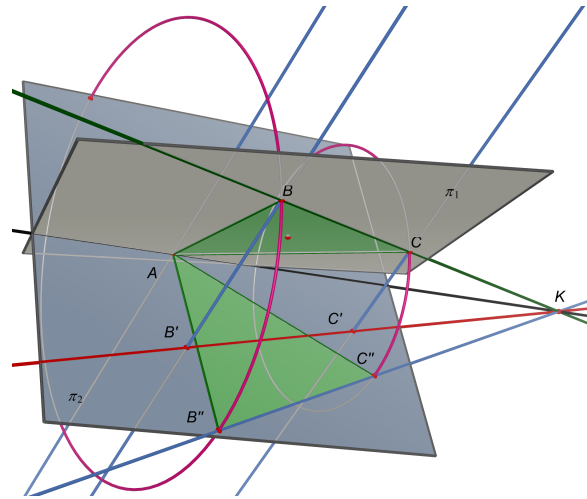


Figura 3: Las rectas  $BC$ ,  $B'C'$  y  $B''C''$  son concurrentes en  $K$ .

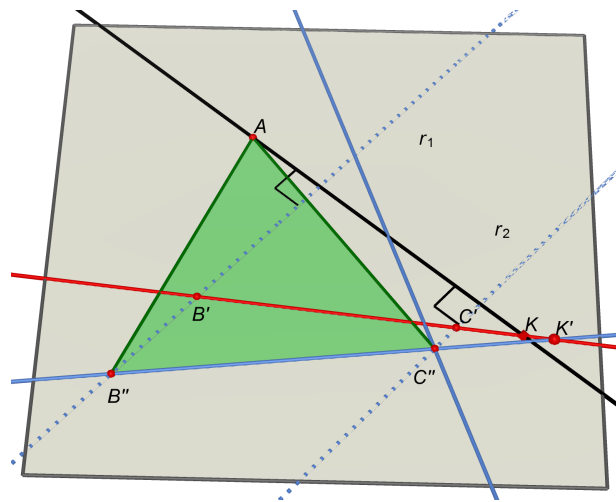


Figura 4: Construcción de los puntos  $K$  y  $K'$ .

De acuerdo con las evidencias experimentales señaladas (a cada punto  $K$  le corresponde un punto  $K'$  y hay dos posiciones de  $K$  para las que  $K = K'$ ) puede afirmarse que la correspondencia entre  $K$  y  $K'$  es una homografía y la solución del problema consistirá en encontrar sus puntos dobles. Esos puntos dobles son los puntos en los que las rectas  $B'C'$ ,  $B''C''$  y  $BC$  concurren. Siguiendo el procedimiento descrito en Cuppens, ver [3], encontramos los puntos dobles  $P$  y  $Q$  (ver Anexo 2). A partir de ellos pueden construirse dos posiciones del triángulo  $AB''C''$  (ver Figura 5).

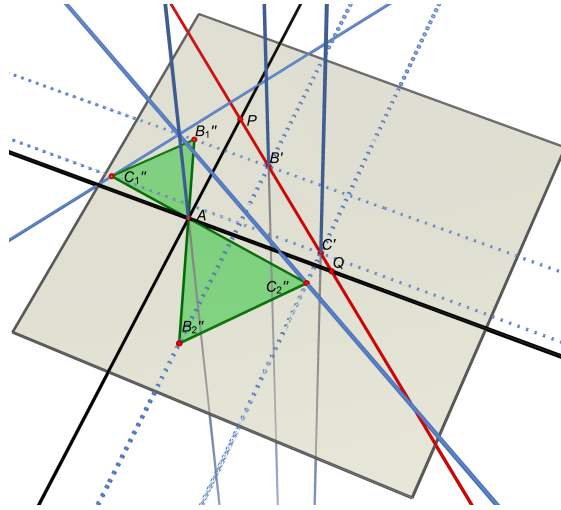


Figura 5: Construcción de los triángulos equiláteros  $\triangle AB_1''C_1''$  y  $\triangle AB_2''C_2''$  a partir de los puntos dobles de la homografía  $P$  y  $Q$ .

Para construir el triángulo  $\triangle ABC$  solución del problema deben rotarse los triángulos  $\triangle AB_1''C_1''$  y  $\triangle AB_2''C_2''$  alrededor de  $AP$  y  $AQ$  respectivamente, pero sólo uno de ellos al rotarlo tendrá sus vértices sobre las rectas paralelas (ver Figura 6).

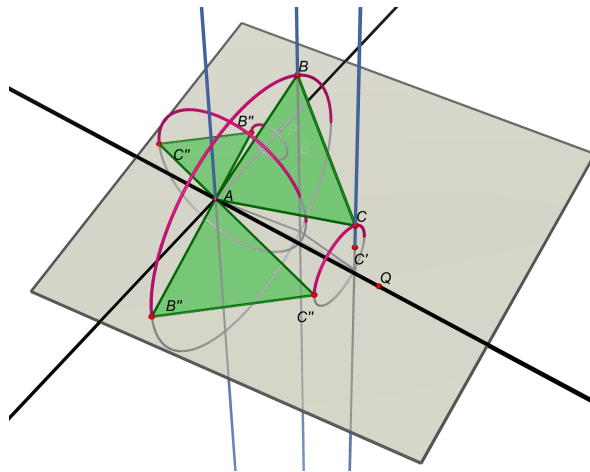


Figura 6: Construcción del triángulo  $\triangle ABC$  solución, a partir de la rotación del triángulo  $\triangle AB''C''$ .

También puede constatararse que hay dos soluciones diferentes dependiendo del sentido de la rotación.

## 4. Formalización

Es necesario demostrar que esa construcción produce efectivamente una solución. Para esto es suficiente probar las siguientes tres conjeturas hechas en el proceso de experimentación, los demás procedimientos son basados en teoremas ya demostrados:

1. En la construcción descrita en la exploración 3.1 las rectas  $BC$ ,  $B'C'$  y  $B''C''$  concurren en un punto  $K$  del eje de rotación del plano  $\pi_1$  sobre el plano  $\pi_2$ .
2. En la construcción descrita en la exploración 3.2, entre los puntos  $K$  y los puntos  $K'$  existe una correspondencia homográfica.
3. La homografía del punto 2 tiene puntos dobles reales.

Demostración de la conjetura 1.

**Proposición 4.1.** *Las rectas  $BC$ ,  $B'C'$  y  $B''C''$  concurren en un punto  $K$  del eje de rotación del plano  $\pi_1$  sobre el plano  $\pi_2$ .*

**Prueba.** La recta  $BC$  y el eje de rotación están en el plano  $\pi_1$  y por lo tanto se cortan en un punto  $K$  (que podría estar en el infinito). La recta  $B'C'$  es la proyección ortogonal de la recta  $BC$  sobre el plano  $\pi_2$ . Como el eje de rotación es la intersección de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  los puntos sobre ese eje son invariantes por la proyección, así la proyección del punto  $K$  es él mismo. Por lo tanto la recta  $B'C'$  también pasa por el punto  $K$ . Finalmente, la recta  $B''C''$  es rotación de la recta  $BC$ ; como el eje de rotación es invariante y  $K$  está sobre ese eje entonces la imagen de  $K$  es él mismo. Por lo tanto  $K$  es el punto de concurrencia de las tres rectas. □

Para demostrar la segunda conjetura se utiliza la siguiente definición que es diferente a la de Chasles pero equivalente:

**Definición 4.2.** Una Homografía es una transformación geométrica biyectiva y constructible con regla y compás, es decir, dado un punto puede obtenerse su imagen por un procedimiento de construcción que utiliza sólo regla y compás, y dado un punto imagen se puede obtener su preimagen también con regla y compás, ver [3, página 36]<sup>3</sup>.

**Lema 4.3.** *La aplicación que a cada punto  $K$  le hace corresponder un punto  $K'$  es una función.*

**Prueba.** Como  $K'$  se obtiene a partir de la intersección de dos rectas, una de las cuales depende de  $K$ , entonces se garantiza que la relación es una función<sup>4</sup>. □

<sup>3</sup>Si una aplicación  $f$  de una recta  $u$  en una recta  $u'$  es algebraica (esta condición se cumple si el punto  $M' = f(M)$  es constructible con regla y compás) y biyectiva, entonces la aplicación  $f$  es una homografía.

<sup>4</sup>Aunque la recta  $B''C''$  es el lado de un triángulo equilátero que tiene un vértice en  $A$  y sus otros dos vértices sobre las perpendiculares a  $AK$  por  $B'$  y  $C'$  respectivamente, y existen dos triángulos que cumplen esas condiciones, como dichos triángulos son simétricos con respecto a  $AK$ , las dos rectas  $B''C''$  también serán simétricas con respecto a  $AK$  y cortarán dicha recta en el mismo punto.

Ya hemos visto cómo se construye  $K'$  a partir de  $K$  (ver exploración 3.2). Si esta relación inversa es también una función entonces es biyectiva; y si es constructible entonces es una homografía.

Para ver la constructibilidad del punto  $K$  a partir del punto  $K'$  fue necesario hacer también una *exploración experimental* usando el software. En seguida se describe esa experimentación.

#### 4.1. Exploración 3 (Construcción inversa)

Partiendo de los puntos  $A$ ,  $B'$  y  $C'$  en el plano  $\pi_2$ , se pone un punto  $K'$  sobre la recta  $B'C'$  y se traza una recta  $m$  que pasa por  $K'$ , se construye el triángulo equilátero  $\triangle AB''C''$  tal que  $B''$  y  $C''$  estén sobre  $m$ .

Una forma de construir este triángulo es trazando la recta  $m_2$  perpendicular a  $m$  por  $A$  y haciendo una rotación de  $30^\circ$  de  $m_2$  alrededor de  $A$ , a la que se llama  $m_3$ . Sea  $B''$  la intersección de  $m_3$  y  $m$ . Ahora se rota  $B'' -60^\circ$  alrededor de  $A$  para obtener  $C''$ . En seguida se trazan las rectas  $B'B''$  y  $C'C''$ . Si estas rectas son paralelas se construye  $K$  como intersección de la recta  $B'C'$  con la perpendicular a  $B'B''$  por  $A$  (ver Figura 7).

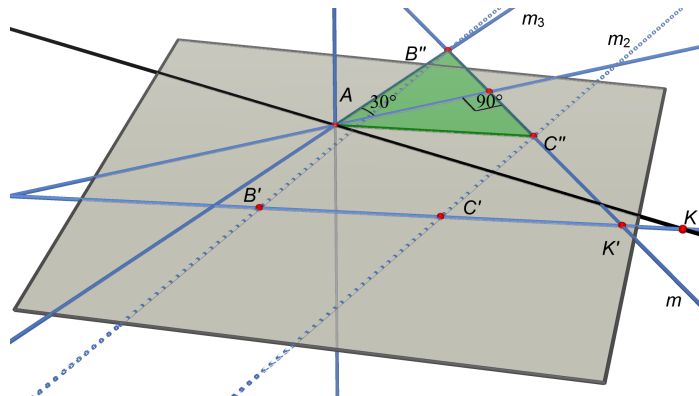


Figura 7: Construcción del triángulo equilátero  $\triangle AB''C''$  con  $B''$  y  $C''$  sobre la recta auxiliar  $m$ .

Para que esta construcción sea la inversa de la construcción de  $K'$  a partir de  $K$ , es necesario que esas dos rectas,  $B'B''$  y  $C'C''$  sean paralelas. Si se mueve la recta  $m$ , se observa que hay una posición en la que se obtiene esa propiedad, pero es necesario construirla de manera exacta. Para lograrlo es necesario hacer una nueva construcción que dependa de la posición de un punto (no de una recta), para generar un lugar geométrico.

Como se debe obtener una recta  $m$  que pase por  $K'$  y una recta  $m_2$  que pase por  $A$  y que sean perpendiculares, se construye el círculo de diámetro  $K'A$  y se coloca un punto  $L$  sobre él, así las rectas  $AL$  y  $KL$  son perpendiculares (ver Figura 8). Ahora, se construye  $m_3$  rotando  $AL$   $30^\circ$  alrededor de  $A$ , y se obtiene  $B''$  como intersección de  $m_3$  con  $K'L$ , y  $C''$  es la rotación de  $-60^\circ$  de  $B''$  alrededor de  $A$ . Si se pide a Cabri el lugar de  $B''$  cuando  $L$  se mueve sobre el círculo de diámetro  $AK'$ , se obtiene otro círculo que pasa por  $A$  y por  $K'$  (ver Figura 8).



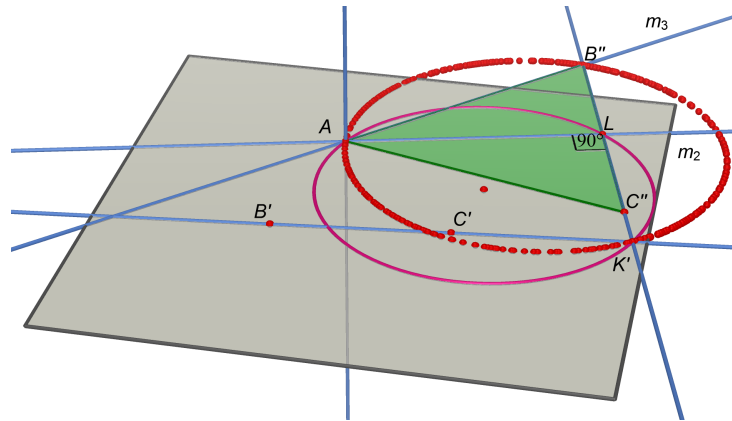


Figura 8: Círculo de diámetro  $AK'$  y lugar geométrico de  $B''$  que depende de  $L$ .

**Lema 4.4.** (En la construcción inmediatamente anterior) el lugar geométrico del punto  $B''$  cuando  $L$  se mueve sobre el círculo de diámetro  $AK'$  es un círculo que pasa por  $A$  y  $K'$ .

**Prueba.** El triángulo  $\triangle ALB''$  es un triángulo  $30 - 60 - 90$  donde  $AB'' = 2LB''$  y  $AL = \sqrt{3}LB''$ . El punto  $L'$ , resultado de rotar  $L$   $30^\circ$  alrededor de  $A$ , está sobre la recta  $m_3$  (ver Figura 9). Como  $AL = AL'$ ,  $B''$  es imagen de  $L'$  por una homotecia de razón  $2/\sqrt{3}$  con respecto a  $A$ . Por lo tanto, cuando  $L$  se mueve sobre el círculo de diámetro  $AK'$ ,  $B''$  se mueve sobre un círculo resultado de rotar el anterior  $30^\circ$  alrededor de  $A$  y luego aplicarle una homotecia de centro  $A$  y razón  $2/\sqrt{3}$  (ver Figura 9).  $\square$

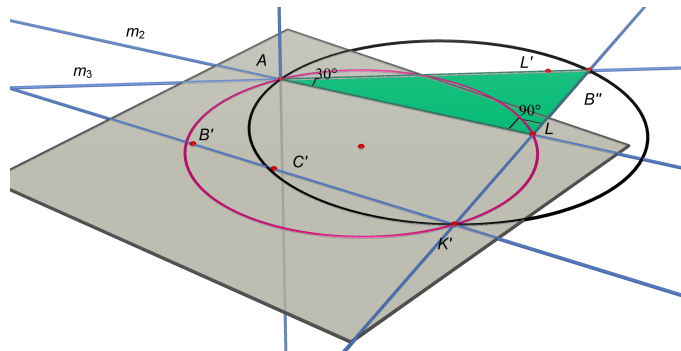


Figura 9:  $B''$  está sobre el círculo que resulta de rotar  $30^\circ$  el círculo de diámetro  $AK'$  y aplicarle una homotecia de centro en  $A$  y razón  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Ahora hagamos nuevamente un análisis. Si las rectas  $B'B''$  y  $C'C''$  son paralelas, entonces los triángulos  $\triangle K'B'B''$  y  $\triangle K'C'C''$  son semejantes obteniendo la proporción  $\frac{K'B'}{C'B'} = \frac{K'B''}{C''C''}$ , pero  $B''C'' = B''A$ , puesto que el triángulo  $AB''C''$  es equilátero, luego  $\frac{K'B'}{C'B'} = \frac{K'B''}{AB''}$  (ver Figura 10).

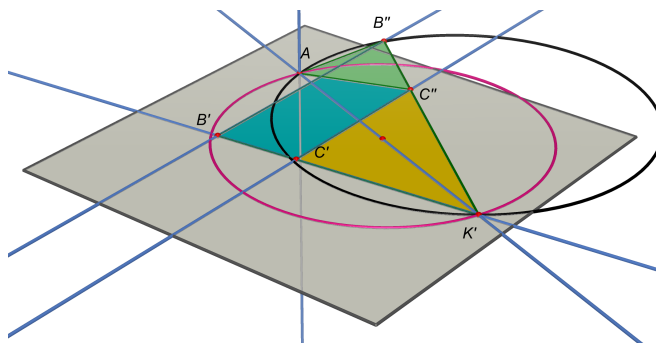


Figura 10: Los triángulos  $\triangle K'B'B''$  y  $\triangle K'C'C''$  son semejantes.

Entonces hay que encontrar un punto  $B''$  tal que sus distancias a  $A$  y  $K'$  estén en la misma razón que las distancias de  $B'$  a  $K'$  y de  $B'$  a  $C'$ . Todos los puntos que cumplen esa proporción están sobre un círculo, ver [7] y  $AK'$  es eje de simetría de este círculo<sup>5</sup>. La solución buscada estará en la intersección de ese círculo con el círculo lugar geométrico de  $B''$  (recordemos que este círculo es el resultado de aplicar al círculo de diámetro  $AK'$  una rotación de  $30^\circ$  alrededor de  $A$  y luego una homotecia de centro  $A$  y razón  $2/\sqrt{3}$ , llamamos a este círculo  $c_3$ ).

Para construir ese círculo basta con encontrar los dos puntos de la recta  $K'A$  que dividen ese segmento en esa proporción. Se traza el segmento  $C'A$  y una paralela a ese segmento por  $B'$  que corta a  $K'A$  en el punto  $B_1$ . Luego se construye el punto  $D$  simétrico de  $C'$  con respecto a  $B'$ , se traza el segmento  $DA$  y una paralela a ese segmento por  $B'$  que corta a  $K'A$  en  $B_2$ .  $B_1B_2$  es el diámetro del círculo buscado (ver Figura 11).

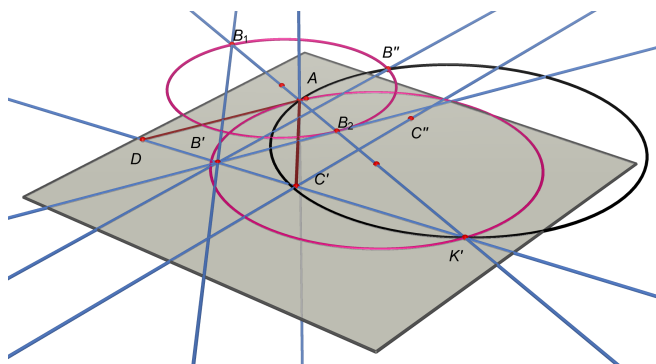


Figura 11: Construcción del círculo de diámetro  $B_1B_2$  que contiene los puntos cuyas distancias a  $A$  y  $K'$  están en la misma proporción que las distancias de  $B'$  a  $K'$  y de  $B'$  a  $C'$ .

Hay dos puntos de intersección entre el círculo de diámetro  $B_1B_2$  y el círculo

<sup>5</sup>Si  $M$  es un punto que cumple la proporción  $K'B'/C'B' = K'M/AM$  entonces su simétrico  $M'$  con respecto a  $AK'$  también la cumple, puesto que  $AM = AM'$  y  $K'M = K'M'$ .

$c_3$ . Se escoge como  $B''$  el punto tal que el ángulo  $\angle AB''K'$  sea de  $60^\circ$ , ya que el triángulo  $AB''C''$  debe ser equilátero y  $C''$  debe estar entre  $B''$  y  $K'$  (ver Figura 11). Sea  $C''$  la rotación de  $B''$   $60^\circ$  alrededor de  $A$ .

Se construyen las rectas  $B'B''$  y  $C'C''$ , que son paralelas (ver Figura 11). El punto  $K$  es la intersección de la recta  $B'C'$  y la perpendicular a  $B'B''$  por  $A$  (ver Figura 12).

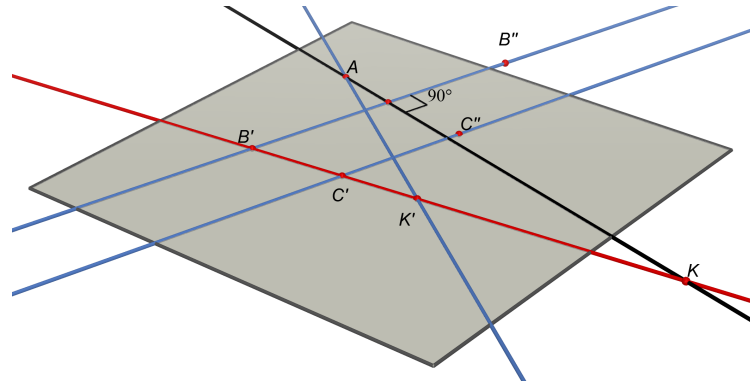


Figura 12: Construcción del punto  $K$ .

**Lema 4.5.** *La construcción descrita en la exploración 3 produce el punto  $K$  a partir del punto  $K'$ .*

**Prueba.** Hay que demostrar que esta construcción produce un triángulo  $AB''C''$  equilátero, que  $K'$  pertenece a  $B''C''$  y que  $B'B''$  es paralela a  $C'C''$ .

Como  $C''$  es rotación de  $B''$   $60^\circ$  alrededor de  $A$ , el ángulo  $B''AC''$  es de  $60^\circ$  y  $AB'' = AC''$ . Entonces  $AB''C''$  es isósceles en  $A$ , por lo que sus ángulos  $AB''C''$  y  $AC''B''$  deben ser iguales. Como tiene un ángulo de  $60^\circ$  en  $A$ , los otros dos deben medir también  $60^\circ$ , por lo que es un triángulo equilátero.

Como  $B''$  está sobre el círculo  $C_3$ , es resultado de aplicar una rotación de  $30^\circ$  alrededor de  $A$  y una homotecia de centro  $A$  y razón  $2/\sqrt{3}$ , a un punto  $L$  del círculo de diámetro  $AK'$ , y por lo tanto  $AL$  es perpendicular a  $LK'$ . Pero el triángulo  $ALB''$  es un triángulo  $30-60-90$  puesto que el ángulo  $LAB''$  es de  $30^\circ$  y  $\frac{AB''}{AL} = \frac{2}{\sqrt{3}}$  y dicho triángulo es rectángulo en  $L$ , es decir que es la mitad del triángulo  $AB''C''$ . Por lo tanto  $L$  está sobre la recta  $B''C''$ . Como  $AL$  es perpendicular a  $B''C''$  por ser altura del triángulo  $AB''C''$ , la recta  $B''C''$  es la misma recta  $K'L$ .

$B''$  está sobre el círculo de diámetro  $B_1B_2$ . Pero  $B_1B'$  es paralela a  $C'A$ , y por lo tanto  $\frac{K'B'}{C'B'} = \frac{K'B_1}{AB_1}$ . Además  $B_2B'$  es paralela a  $DA$  y por lo tanto  $\frac{K'B'}{DB'} = \frac{K'B_2}{AB_2}$ . Pero  $DB' = B'C'$ , así que  $\frac{K'B'}{C'B'} = \frac{K'B_2}{AB_2}$ ; por lo tanto  $\frac{K'B'}{C'B'} = \frac{K'B''}{AB''}$ . Por otra parte,  $AB'' = B''C''$ , así que  $\frac{K'B'}{C'B'} = \frac{K'B''}{C''B''}$ , de manera que los triángulos  $K'C'C''$  y  $K'B'B''$  son semejantes. Como además  $C''$  está sobre la recta  $K'B''$  y  $C'$  está sobre la recta  $K'B'$ , entonces las rectas  $B'B''$  y  $C'C''$  son paralelas.  $\square$

**Lema 4.6.** *La aplicación que a cada punto  $K'$  le hace corresponder un punto  $K$  es una función.*

**Prueba.** Como  $K$  es la intersección de dos rectas que se construyen a partir de  $K'$  entonces la relación es una función.  $\square$

**Proposición 4.7.** *Entre los puntos  $K$  y los puntos  $K'$  existe una correspondencia homográfica.*

**Prueba.** Según el Lema 4.3, la aplicación directa es una función y es constructible. Según los Lemas 4.5 y 4.6, la aplicación inversa es función y es constructible. Por lo tanto es una función biyectiva y constructible entonces es una homografía según la definición.  $\square$

## 4.2. Prueba de la conjetura 3

Para demostrar que la homografía siempre tiene puntos dobles reales vamos a utilizar el concepto de involución adjunta de una homografía, que es la única involución que tiene los mismos puntos dobles de la homografía <sup>6</sup>

**Definición 4.8.** Una involución adjunta  $j$  de una homografía  $h$  es la involución que asocia a un punto  $P$  el conjugado armónico de ese punto con respecto a los puntos  $h(P)$  y  $h^{-1}(P)$ . Los puntos dobles de la involución adjunta son también puntos dobles de la homografía.

**Proposición 4.9.** *La involución adjunta de la homografía  $h$  entre los puntos  $K$  y los puntos  $K'$  siempre tiene puntos dobles reales.*

Demostración:

Sean tres puntos  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  de la recta  $B'C'$ , tales que  $K_2 = h(K_1)$  y  $K_3 = h(K_2)$ . Así que  $K_1 = h^{-1}(K_2)$ . El conjugado armónico  $K'$  de  $K_2$  con respecto a  $K_1$  y  $K_3$  es homólogo de  $K_2$  en la involución  $j$  adjunta de  $h$ , ( $j(K_2) = K'$ ).

Para construir ese punto  $K'$  puede usarse el siguiente procedimiento clásico:

- Trazar las rectas  $AK_1$  y  $AK_2$ .
- Por  $K_3$  trazar  $p_1$  paralela a  $AK_1$ .
- $T$  es el punto de intersección de  $AK_2$  y  $p_1$ .
- $S$  es el simétrico de  $T$  con respecto a  $K_3$ .
- La intersección de  $AS$  y  $B'C'$  es el punto  $K'$  buscado.

Los rayos  $AK_2 = AT$  y  $AK' = AS$  son conjugados en la involución adjunta de  $h$  (ver Figura 13).

Ahora considérese el punto en el infinito  $i$  de  $B'C'$  y su conjugado en la involución adjunta de  $h$ . Siguiendo el simbolismo de Chasles,  $I = h^{-1}(i)$ ,  $J' = h(i)$ . El punto medio  $O_2$  de  $IJ'$  es el conjugado armónico de  $i$  con respecto a  $I$  y  $J'$ , es decir el conjugado de  $i$  en la involución adjunta  $j$ .

Si se hace la construcción para determinar el conjugado armónico de  $i$  con respecto a  $I$  y  $J'$ , se traza  $p_1$  paralela a  $AI$  por  $J'$  y corta  $Ai$  (paralela a  $B'C'$  por  $A$ ) en  $U$  (ver Figura 14).

<sup>6</sup>“En una forma de primera especie toda proyectividad  $\pi$ , no involutiva, admite una involución determinada  $\omega$  permutable con ella (en la que a un elemento  $A$  se asocia el conjugado armónico de ese elemento con respecto a sus correspondientes en  $\pi$  y en  $\pi^{-1}$ ); esta involución es hiperbólica, elíptica o parabólica (y degenerada) al mismo tiempo que  $\pi''$  (Enriques, Lecciones de geometría proyectiva, P. 134)

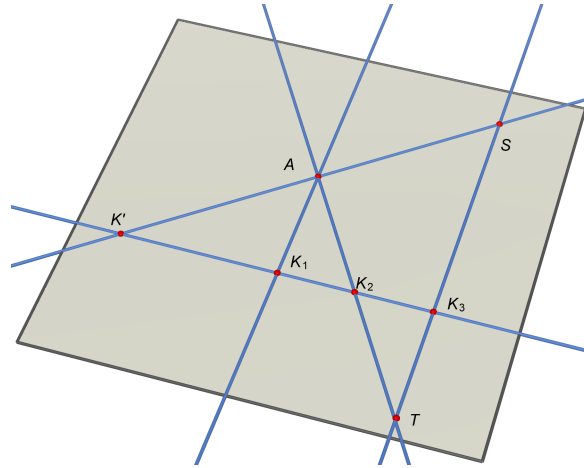


Figura 13: Construcción del conjugado armónico de  $K_2$  con respecto a  $K_1$  y  $K_3$ .

Sea  $A'$  el simétrico de  $U$  con respecto a  $J'$ . La recta  $AA'$  corta  $B'C'$  en el punto  $O_2$ . Como  $J'$  es punto medio de  $UA'$  y  $J'I$  es paralela a  $Ai$ ,  $O_2$  es punto medio de  $A$  y  $A'$ , por lo tanto  $A'$  es simétrico de  $A$  con respecto a  $O_2$ .

Considérense ahora los puntos  $O_1$  y  $O_3$ , tales que  $O_1 = h^{-1}(O_2)$  y  $O_3 = h(O_2)$  (ver Figura 15).

Como  $O_2$  es el conjugado de  $i$  en la involución adjunta, el conjugado de  $O_2$  con respecto a  $O_1$  y  $O_3$  es el punto  $i$ , por lo tanto  $V = S$  (simétrico de  $T$  con respecto a  $O_3$ ) estará sobre  $Ai$ , es decir  $AV$  es paralela a  $B'C'$ . Pero  $O_3$  es punto medio de  $S$  y  $T$ ; por lo tanto  $O_2$  es el punto medio de  $AT$ , es decir  $T = A'$ . Además,  $O_2$  es el punto medio de  $O_1$  y  $O_3$ . Como  $i$  es el conjugado de  $O_2$  en la involución adjunta, el conjugado del rayo  $AO_2$  es  $Ai$ . El punto  $V$  es la intersección de  $A'O_3$  y  $Ai$ .

Considérese ahora el lugar de la recta  $p_1$  cuando  $K_1$  recorre  $B'C'$ . A cada punto  $K_3$  de  $B'C'$  le corresponde una dirección, es decir un punto en el infinito del plano, y a cada punto del infinito le corresponde un punto  $K_3$ . Además, es evidente que podemos construir  $p_1$  a partir de  $K_3$ , y construir  $K_3$  a partir de un punto cualquiera en el infinito. Es decir, existe una homografía entre los puntos de  $B'C'$  y los puntos de la recta del infinito. Por lo tanto, según Cremona<sup>7</sup>, la recta  $p_1$  que une puntos correspondientes de esa homografía envuelve una cónica; además, como la recta del infinito es tangente a esa cónica, es una parábola que llamaremos  $\mathcal{P}$ .

Por otra parte, las rectas  $A'J'$  y  $A'O_3$  son casos particulares de la recta  $p_1$ , por lo tanto son rectas tangentes a esa parábola. En efecto, cuando  $K_2 = O_2$ ,  $p_1$  pasa por  $O_3$  y por  $A'$  (ver Figura 15) y cuando  $K_2 = i$ ,  $p_1$  pasa por  $J'$  y  $A'$  (ver Figura 14). Cuando  $K_2 = O_2$ ,  $S = V$  es simétrico de  $A'$  con respecto a  $O_3$

<sup>7</sup>Si dos series de puntos (no colineales) en el mismo plano son proyectivas entre sí (pero no perspectivas), la envolvente de las rectas que unen pares de puntos correspondientes es una cónica, es decir las rectas son tangentes a una cónica. Esta cónica es tangente a las bases de las dos series en los puntos correspondientes al punto de intersección de dichas bases. (Ver [2] p. 120, N° 150).

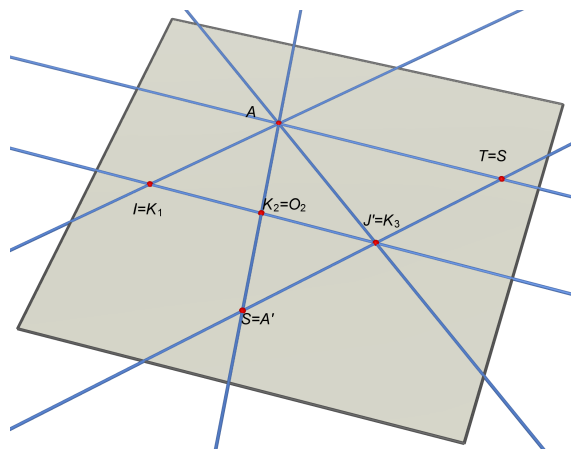


Figura 14: Conjugado armónico de  $i$  (punto en el infinito de  $B'C'$ ) con respecto a  $I$  y  $J'$ .

y es la intersección de  $Ai$  y  $A'O_3$ . Cuando  $K_2 = i$ ,  $T = U$  es simétrico de  $A'$  con respecto a  $J'$  y es la intersección de  $Ai$  y  $A'J'$ . Según Cremona, los puntos  $U$  y  $V$  son puntos de tangencia de las rectas  $A'J'$  y  $A'O_3$  y la parábola  $\mathcal{P}$ .

Los rayos  $AT$  y  $AS$  son homólogos en la involución adjunta de  $h$ . Los puntos  $T$  y  $S$  son puntos de  $p_1$ . Si  $p_1$  pasa por  $A$ , los rayos  $AT$  y  $AS$  coinciden y definen un punto doble de la homografía. Es decir, si pueden trazarse tangentes reales a la parábola  $\mathcal{P}$  por el punto  $A$ , los cortes de esas tangentes con la recta  $B'C'$  corresponden a puntos dobles reales de la involución adjunta de  $h$ , y por lo tanto también de la homografía  $h$ .

Para que las tangentes a la parábola por  $A$  sean reales, es necesario que  $A$  sea exterior a la parábola  $\mathcal{P}$ . Pero los puntos  $U$  y  $V$ , intersecciones de la recta  $Ai$  con las rectas  $A'J'$  y  $A'O_3$  respectivamente, son puntos de la parábola  $\mathcal{P}$ . Así que para que  $A$  sea exterior a la parábola  $\mathcal{P}$  basta con demostrar que  $A$  no está entre  $U$  y  $V$ .

Ahora bien, cuando  $I = J' = O_2$ ,  $O_3 = i$  (esto puede darse con  $I$  a distancia finita o en el infinito). Entonces  $U = A$  y  $V = i$ . Por otra parte,  $V$  nunca coincide con  $A$  (si  $V = A$  entonces  $A'O_3$  pasa por  $A$ , es decir  $O_3 = O_2$ ; pero  $O_2$  no puede ser punto doble, pues entonces sería su propio conjugado en la involución adjunta, lo cual contradice el hecho de que  $O_2$  sea conjugado de  $i$  en la involución adjunta). Así que  $U$  y  $V$  cambian de posición con respecto a  $A$  cuando  $I$  y  $J'$  intercambian posiciones. Esto implica que  $A$  está siempre en la misma posición relativa con respecto a  $U$  y  $V$  (exterior o interior). Pero cuando  $B' = C'$  la homografía degenera en una función constante en  $B'$  (en efecto, si  $B' = C'$ ,  $r_1 = r_2 = B'C'$ , de manera que  $B'C'$  siempre pasará por  $B'$ ); es decir,  $O_3 = J'$  y por lo tanto  $U = V$ . De manera que existe una posición de  $B'$  y  $C'$  para la cual  $A$  no está entre  $U$  y  $V$ , por consiguiente  $A$  nunca está entre  $U$  y  $V$ , es decir que  $A$  siempre es exterior a la parábola  $\mathcal{P}$ .

Así queda demostrado que la involución adjunta de la homografía siempre tiene puntos dobles reales y por consiguiente la homografía misma siempre tiene puntos reales.  $\square$

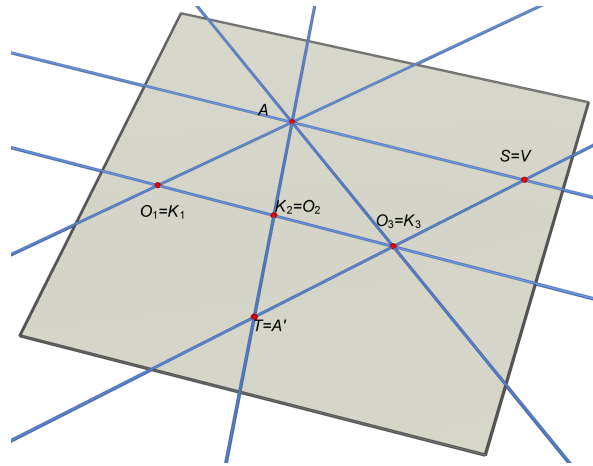


Figura 15: Construcción del conjugado armónico de  $O_2$  con respecto a  $O_1$  y  $O_3$ .

## 5. Conclusiones

La solución presentada es un ejemplo de geometría experimental: utilizando software de geometría dinámica realizamos procesos de experimentación que nos permitieron formular conjeturas sobre la solución y encontrar estrategias de formalización de los razonamientos utilizados. Postulamos así la legitimidad del uso del software de geometría dinámica en los procesos de solución de problemas y su compatibilidad con la búsqueda de formalización necesaria en el trabajo matemático. En la literatura es frecuente encontrar ejemplos de uso de software de geometría dinámica para encontrar una solución a un problema, pero no para encontrar una formalización; además, son muy escasos los ejemplos de solución de problemas de geometría en el espacio.

Por otra parte, la teoría de la homografía nos permitió interpretar de manera formal las observaciones experimentales con las figuras dinámicas. Postulamos entonces la idoneidad de la geometría sintética del siglo XIX para describir y fundamentar teóricamente los fenómenos de continuidad y movimiento característicos de las figuras dinámicas. Por su parte, la geometría euclidiana no se presta para describir y formalizar dichos fenómenos, se hace necesaria una reformulación de los mismos utilizando casos de figura. En el problema trabajado, las propiedades de la homografía fueron fundamentales para encontrar la solución. Dicha solución es un ejemplo de geometría sintética, en la que no se utiliza la ‘puesta en ecuación’ del problema.

Subrayamos así la importancia de recuperar las teorías de la geometría sintética tanto para la enseñanza de la geometría como para la solución de problemas.

**Nota.** *Agradecemos especialmente las observaciones de los evaluadores, que nos llevaron a terminar la demostración de la tercera conjetura, dándole más solidez a nuestras ideas sobre la geometría sintética.*

## A. ANEXO 1

*Problema:* Dadas tres rectas paralelas en el plano construir un triángulo equilátero con vértices en cada una de las rectas<sup>8</sup>.

Sean  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  las rectas paralelas y sea  $P$  un punto cualquiera en  $r_1$ . Construimos  $s_2$  la rotación de  $r_2$  alrededor de  $P$  con un ángulo de  $60^\circ$ . Sea  $Q$  la intersección de  $r_3$  y  $s_2$ . Sea  $R$  la rotación de  $Q$  alrededor de  $P$  con un ángulo de  $-60^\circ$ . Entonces el triángulo  $\triangle PQR$  es un triángulo equilátero puesto que el ángulo  $\angle QPR$  es de  $60^\circ$  y  $PQ = PR$ . Además  $R$  está sobre  $r_2$  puesto que:  $Q$  es la imagen de un punto  $R'$  de  $r_2$  por la rotación de  $60^\circ$  alrededor de  $P$  y  $R$  es la imagen de  $Q$  por la rotación inversa, como la rotación es inyectiva  $R' = R$  (ver Figura 16).

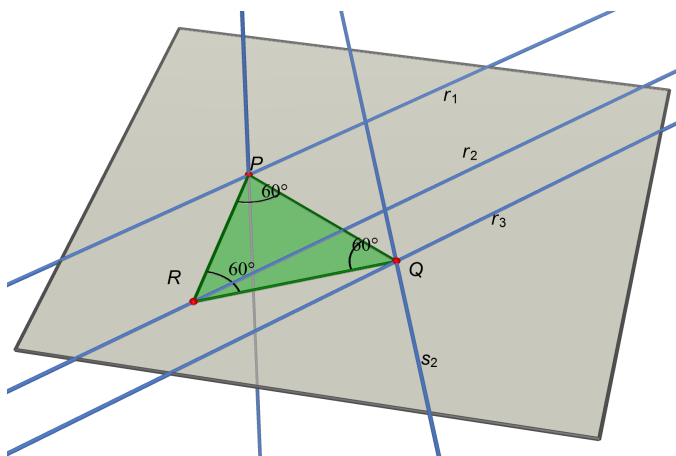


Figura 16: Triángulo equilátero  $\triangle PQR$  con vértices en las paralelas  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  del plano.

*Nota:* Tenemos una segunda solución si se refleja al triángulo  $\triangle PQR$  sobre la perpendicular a las rectas por  $P$  que es equivalente a hacer la misma construcción pero rotando la recta  $r_3$  en lugar de  $r_2$ .

<sup>8</sup>Traducido de Faire de la geometrie superieur en jouant avec Cabri-geometre II, p 74, ver [3].



## B. ANEXO 2

Construcción de los puntos dobles de una homografía a partir de tres parejas de puntos.

Partimos del siguiente resultado:

Sean  $P$  y  $Q$  los dos puntos fijos de una homografía  $f$  de la recta  $u$ . Si  $L$  y  $M$  son dos puntos cualesquiera de la recta  $u$ , sean  $f(L) = L'$  y  $f(M) = M'$ . Existe una involución<sup>9</sup> que transforma a  $L$  en  $M'$ , a  $M$  en  $L'$  y a  $P$  en  $Q$ .

Deducimos inmediatamente el siguiente resultado:

Sean  $A, A', B, B', C$  y  $C'$  seis puntos de una recta  $u$ . Los puntos fijos  $P$  y  $Q$  de la homografía que transforma a  $A$  en  $A'$ , a  $B$  en  $B'$  y a  $C$  en  $C'$  son los puntos que tienen igual imagen en la involución que transforma a  $A$  en  $B'$  y a  $A'$  en  $B$ , y en la involución que transforma a  $A$  en  $C'$  y a  $A'$  en  $C$ .

Los siguientes pasos proporcionan la construcción de los puntos fijos de una homografía (ver Figura 17):

- Se toman seis puntos  $A, A', B, B', C$  y  $C'$  de una recta  $u$ .
- Se traza el círculo  $c$  de diámetro  $AB'$ .
- Se toma un punto  $K$  sobre el círculo  $c$ .
- Se traza el círculo  $c'$  (resp.  $\gamma$ , resp.  $\gamma'$ ) que pasa por los puntos  $K, A'$  y  $B$  (resp.  $K, A$  y  $C'$ , resp.  $K, A'$  y  $C$ ).
- Se determina el segundo punto de intersección  $L$  (resp.  $M$ ) de los círculos  $c$  y  $c'$  (resp.  $\gamma$  y  $\gamma'$ ).
- Se Traza el círculo que pasa por los puntos  $K, L$  y  $M$ .

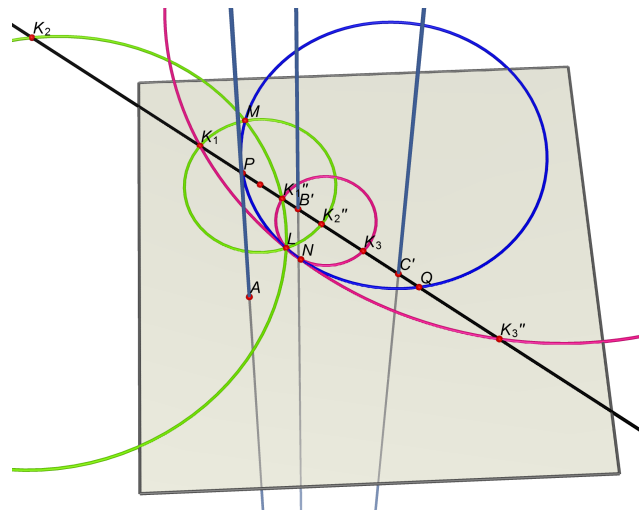


Figura 17: Construcción de los puntos doble de homografía  $P$  y  $Q$ .

<sup>9</sup>Una involución es una homografía que compuesta consigo misma es la idéntica.

Los puntos de intersección (reales o imaginarios)  $P$  y  $Q$  del círculo y la recta  $u$  son los puntos fijos de la homografía que transforma a  $A$  en  $A'$ , a  $B$  en  $B'$  y  $C$  en  $C'$ .

## Referencias

- [1] M. Chasles, *Traité de géométrie supérieure*, Paris: Bachelier, 1852.
- [2] L. Cremona, *Elements of projective geometry*, Clarendon Press (1885).
- [3] R. Cuppens, *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec cabri géomètre*, Brochure APMEP **124-125**.
- [4] F. Enriques and P. Lahérenne, *Leçons de géométrie projective*, Paris (1930).
- [5] José J. Etayo Miqueo, *El reinado de la geometría proyectiva*, Historia de la Matemática (1992), 115–138.
- [6] A. Rabu-Boyé, *El apollonius gallus y el problema de los tres círculos como defensa e ilustración de la geometría sintética*, Escuela de Matemáticas, Ediciones UIS (Universidad Industrial de Santander), 2009.
- [7] E. Rouché and C. Comberousse, *Traité de géométrie*, Jaques Gabay. Séptima edición (1970), 127.