TEORÍA DEL CRECIMIENTO ENDÓGENO. ECONOMÍA POLÍTICA Y ECONOMÍA MATEMÁTICA

Oscar A. Benavides G.
Estudiante de la Maestría en Ciencias Económicas.
Director del Proyecto
"Producción de conocimiento y dinámica del crecimiento endógeno",
CID, Universidad Nacional de Colombia.

Resumen

Oscar A. Benavides, "Teoría del crecimiento endógeno. Economía política y economía matemática", *Cuadernos de Economía,* v. XVI, n. 26, Bogotá, 1997, páginas 47-67.

Dos aspectos esenciales permiten entender los desarrollos recientes en la teoría del crecimiento: una nueva conceptualización para explicar su naturaleza, es decir, el retorno a la economía política clásica y la introducción de la teoría de los bienes públicos, y unas matemáticas que permiten formalizar esta nueva conceptualización. Con el desarrollo de ambos elementos, el artículo prresenta el "nuevo" marco teórico, las condiciones formales y las técnicas matemáticas necesarias para entender la actual teoría del crecimiento. Esta revisión de los nuevos desarrollos puede servir de punto de referencia para ampliar o cuestionar los planteamientos de las teorías del crecimiento endógeno.

Abstract

Oscar A. Benavides, "Theory of Endogenous Growth: Political Economy and Mathematical Economy", *Cuadernos de Economía,* v. XVI, n. 26, Bogotá, 1997, pages 47-67.

Two essential features allow us to understand recent developments in growth theory: a new conceptualization to explain its nature, that is, the return to classical political economy and the introduction of the theory of public goods, and some mathematics that allow the formalization of this new conceptualization. With the development of bothn elements, the article presents the "new" theoretical framework, the formal conditions and the mathematical techniques needed to understand current growth theory. This review of these new developments can serve as a point of reference to broaden or to question the formulations of endogenous growth theories.

INTRODUCCIÓN

El crecimiento económico y el mejoramiento en el bienestar de la población fueron los puntos centrales de las investigaciones de los economistas clásicos. Para Smith, Malthus y Ricardo, el bienestar formaba parte consustancial de la investigación acerca de las causas y consecuencias del crecimiento económico [Ehrlich 1990]. Así, por ejemplo, en el libro primero de *La riqueza de las naciones*, Smith señaló que el crecimiento estaba relacionado con la división del trabajo. Malthus, por su parte, desarrolló un modelo formal sobre la dinámica del crecimiento asociando cambios en el tamaño de la población con el estado estacionario en el producto *per capita* [Becker 1990].

Sin embargo, en la literatura del siglo diecinueve, y en gran parte de la del siglo veinte, fueron olvidados esos planteamientos; los sucesores de Smith y Malthus se dedicaron a desarrollar otro de los aspectos planteados por Smith, la asignación de recursos en condiciones de equilibrio competitivo. Asimismo, del análisis malthusiano se ignoró en forma sistemática la relación existente entre dinámica demográfica y proceso de crecimiento. Por su parte, el camino que escogió Ricardo en los *Principios de economía política* resultó fundamental para los desarrollos posteriores sobre el crecimiento. Específicamente,

> la teoría del valor en condiciones de equilibrio competitivo [...] (le permitió) producir resultados [...] en cuanto a la operación de la economía en el largo plazo [...] en condiciones estrictas de equilibrio competitivo [Salazar 1993].

De esa forma, Ricardo estableció las condiciones (y los límites) para el crecimiento, es decir, los rendimientos decrecientes y la ausencia de cambio técnico. Marshall retomó y formalizó estos planteamientos en los *Principios de economía* y ellos el marco fundamental del trabajo de

Solow [1956], punto de partida de la moderna teoría del crecimiento. En particular, el trabajo de Solow predecía que en ausencia de avance en la tecnología, el crecimiento en el largo plazo tendería a cero. Para salvar este obstáculo, los teóricos neoclásicos del crecimiento asumieron que el avance en la tecnología se daba de manera exógena. No obstante, como lo señaló Arrow,

> un enfoque [...] que depende en tan gran medida de una variable exógena es [...] insatisfactorio desde el punto de vista intelectual [...] más aun, si se trata de una variable de tan difícil medición como es la cantidad de conocimiento [1962, 155].

Adicionalmente, el modelo de Solow [1956] predecía la convergencia en el nivel de ingreso de los diferentes países, como resultado del comportamiento decreciente del producto marginal de los factores. No obstante su sólida construcción teórica y la amplia aceptación que tuvo en términos empíricos en los años cincuenta y sesenta, los fundamentos teóricos del modelo de Solow comenzaron a mediados de los ochenta a ser objeto de análisis.

Los primeros cuestionamientos al modelo de Solow (que dieron lugar a lo que hoy se conoce como teoría de crecimiento endógeno) surgieron de observar que el proceso de convergencia en el nivel de ingreso no se daba, es decir, el modelo perdía poder predictivo. Esto sugería que alguna de las bases teóricas sobre las que estaba construido el modelo de Solow fallaba.

Los desarrollos de Romer [1986], Lucas [1988] y Rebelo [1991] (construidos con base en los trabajos de Arrow [1962], Sheshinski [1967] y Uzawa [1965]) concluyeron que el producto marginal del capital (físico y humano) no presentaba un comportamiento decreciente, lo que permitía que el producto creciera sin cambios en la tecnología. De otro lado, los modelos desarrollados por Romer [1987, 1990a y 1990b]), Grossman y Helpman [1991], y Aghion y Howitt [1992] introdujeron el avance en la tecnología como resultado de actividades de Investigación y Desarrollo (I&D).

Estos desarrollos significaron el abandono de los rendimientos marginales decrecientes y el supuesto de tecnología constante en la teoría del crecimiento, es decir el abandono al marco establecido por Ricardo, a la vez que recuperaron los planteamientos de Smith.

Ahora bien, el presente artículo introduce las nuevas concepciones sobre el crecimiento desde dos perspectivas: la economía política en la teoría del crecimiento endógeno y la formalización correspondiente, es decir, la matemática de la teoría del crecimiento. En la última parte se hacen algunas observaciones acerca del estado actual de los principales problemas de la teoría del crecimiento endógeno, en su conceptualización y en su formalización.

LA ECONOMÍA POLÍTICA DEL CRECIMIENTO

Para hacer un análisis de la economía política en la teoría del crecimiento endógeno es preciso recurrir al libro primero de *La riqueza de las naciones* en el que Smith desarrolla la idea de que la división del trabajo está limitada por el tamaño del mercado. Lo plantea en los siguientes términos:

> la división del trabajo [...] ocasiona [...] un aumento proporcional en las facultades productivas del trabajo. [...] Esta separación se produce generalmente con más amplitud en países que han alcanzado un nivel más alto de laboriosidad y progreso [...] [1987, 9].

Adicionalmente, señala que un incremento en la división del trabajo implica una reducción de los costos medios, y presenta tres condiciones de las que proviene esa situación:

> primera, de la mayor destreza de cada obrero en particular; segunda, del ahorro de tiempo, el cual comúnmente se pierde en el paso de una ocupación a otra, y por último, de la invención de una gran número de máquinas que facilitan y abrevian el trabajo, capacitando a un hombre para hacer el trabajo de muchos [1987, 11]

Igualmente, Smith muestra que

> la extensión del mercado está positivamente relacionada con el tamaño y la densidad de la población, la cantidad de recursos naturales, el capital acumulado disponible, la facilidad de transporte y con la estabilidad del mercado [Vassilakis 1987, 761].

Es decir, muestra que la división del trabajo es el mecanismo que puede conducir a un mayor bienestar y que "una sociedad bien gobernada, (da lugar) a esa opulencia universal que se derrama hasta las clases inferiores del pueblo".[1]

Marshall [1961], al igual que Smith, consideró que la división del trabajo es la principal razón por la que la tecnología presenta rendimientos crecientes a escala [Vassilakis 1987, 762]. En particular, trató de conciliar los rendimientos crecientes y la competencia perfecta. No obstante, encontró dificultades analíticas que no lo permitían, específicamente, la imposibilidad de encontrar un equilibrio único y estable en presencia de curvas de demanda de pendiente negativa. Sin embargo, Marshall

1 Para desarrollos recientes ver Yang-Borland [1991] y Becker-Murphy [1993].

consideró que, para poder mantenerse en equilibrio competitivo, "las economías de escala son externas a la firma" [Vassilakis 1987, 763].

De ahí la solución que dio al problema: los rendimientos crecientes son internos en el agregado pero externos a la firma. De hecho,

> Marshall claramente falla para dar las condiciones de equilibrio estable [...] ya que las curvas de demanda de pendiente negativa y el comportamiento de no toma de precios no pueden ser evitados de esta forma [Vassilakis 1987, 764].

Aunque el trabajo de Marshall dejó en el limbo el problema de rendimientos crecientes y equilibrio competitivo, su análisis sirvió de base para desarrollos posteriores. A finales de los años veinte y comienzo de los treinta hubo una reacción generalizada contra los conceptos de competencia perfecta y monopolio puro como modelos analíticos de comportamiento económico [Stigler 1957]. En particular, se consideró que "ni el monopolio ni la competencia (perfecta) son jamás absolutos (y que) las teorías que se ocupan de ellos sólo examinan las fronteras de la realidad, la que debe ser buscada entre tales límites" [Ferguson y Gould 1979, 320].

Los trabajos de Sraffa [1926], Young [1928], Robinson [1933] y Chamberlin [1933] reintrodujeron los rendimientos crecientes en el análisis económico. En particular, Sraffa criticó la condición de costos marginales crecientes para el equilibrio competitivo, caso que, según él, no era el de muchas firmas o industrias y que tampoco se podía analizar como el de monopolios marshallianos [Archibald 1987]. Por su parte, Young intentó construir una teoría del crecimiento económico con base en el planteamiento de Smith, fuera de las posibilidades que brindaba el marco marshalliano de competencia perfecta y monopolio puro. No obstante, fracasó: en ese momento la teoría del equilibrio no había alcanzado su plena madurez y no permitía que la propuesta de Young, inabordable desde la teoría económica de su tiempo, se pensara en un marco teórico general [Salazar 1993, 15].

Posteriormente, Robinson y Chamberlin obtuvieron un equilibrio con firmas maximizadoras de beneficio que enfrentaban curvas de demanda con pendiente negativa, y compatibilizaron rendimientos crecientes (no convexidades en la tecnología) con maximización de beneficios. Este resultado respondía al interrogante de Sraffa y permitía, a la vez, generalizar los principios formulados por Marshall [Archibald 1987, 532].

En oposición a los conceptos de competencia perfecta y monopolio puro, Chamberlin [1933] construyó su teoría de competencia monopolística considerando que los bienes son heterogéneos y tienen *sustitutos imperfectos pero cercanos*. Este tipo de mercados se caracteriza por diferenciación de los productos y poder de monopolio por parte de la firmas.

Sin embargo, a diferencia del monopolio puro, en la competencia monopolística no existen barreras de entrada y los nuevos competidores tienen un incentivo para entrar en el mercado. Entran firmas hasta que los beneficios se reducen a cero, al igual que en el modelo de competencia perfecta. Lo mismo que el monopolio puro, las firmas se enfrentan a curvas de demanda de pendiente negativa. A medida que entran firmas disminuye la proporción de la demanda que representa cada una, y esa es la diferencia fundamental que existe entre el monopolio y la competencia monopolística Stiglitz [1993]. Aunque la teoría de la competencia monopolística significó un avance con respecto a la concepción de competencia marshalliana, por muchos años fue parcialmente olvidada. En las décadas del cincuenta y sesenta, y en parte de la del setenta, los desarrollos se enfocaron en analizar la competencia monopolística dentro de las posibilidades que ofrecía la teoría del equilibrio general.[2]

La teoría resurgió con el trabajo de Dixit y Stiglitz [1977], quienes retomaron los planteamientos de Chamberlin para analizar modelos estáticos en los que la utilidad dependía del número de bienes de consumo de la economía. Sus resultados fueron utilizados en los trabajos de Romer [1987 y 1990a] para explicar el proceso de crecimiento en el largo plazo lo que, unido al análisis del conocimiento tecnológico en términos de bienes públicos, le permitió a Romer desarrollar un modelo que cambió radicalmente la forma de analizar el crecimiento pues dejaba a un lado el marco ricardiano de rendimientos constantes y tecnología constante. De hecho, cuando el conocimiento tecnológico cambia, el crecimiento no puede explicarse en un escenario de competencia perfecta, ya que surgen rendimientos crecientes y estructuras de competencia imperfecta originadas (respectivamente) por el carácter no rival y no excluible del conocimiento tecnológico.[3]

Los modelos de crecimiento endógeno de Romer [1987 y 1990a], Grossman y Helpman [1991], y Aghion y Howitt 1992] implicaron un cambio radical en la economía política del crecimiento al introducir el planteamiento de Smith acerca de la invención de una gran número de máquinas con la generación de costos medios decrecientes y rendimientos crecientes. Igualmente, en los trabajos de Lucas [1988], Rebelo [1991] y Caballé y Santos [1993] también se dio un cambio al considerar que la mayor destreza de los trabajadores causa una externalidad que genera rendimientos crecientes, aunque en competencia perfecta y con tecnología constante.

---

2 Para un análisis detallado ver Negishi [1987].

3 En Stiglitz [1993, XVIII] y Romer [1994] se encuentra un análisis detallado sobre el tema.

En síntesis, los desarrollos recientes sobre crecimiento tienen como base una 'nueva economía política, que es el resultado de considerar las causas y consecuencias de la división del trabajo planteada por Smith en el libro primero de *La riqueza de las naciones*. En términos de crecimiento endógeno, quienes piensan que el cambio tecnológico ocasiona rendimientos crecientes y crecimiento autosostenido se basan en el argumento de Smith según el cual la invención de un gran número de máquinas reduce el tiempo de trabajo y por lo tanto los costos medios.

Asimismo, las teorías del aprendizaje (capital humano o *learning by doing*) tienen como base el argumento de Smith de la mayor destreza de los trabajadores como fuente de rendimientos crecientes. No obstante, los dos tipos de modelos son mutuamente excluyentes pues cuando se considera que existe cambio tecnológico no hay aprendizaje; mientras que cuando se considera que hay aprendizaje (acumulación de la conocimiento), la tecnología se mantiene constante. Sin embargo, no hay razón para seguir entendiendo los dos argumentos de Smith como mutuamente excluyentes. Los trabajos posteriores han buscado incorporar en forma simultánea dos de los argumentos de Smith acerca de las causas y consecuencias de la división del trabajo, específicamente el aumento de conocimiento por el aprendizaje y el cambio en la tecnología [Young 1993 y Benavides y Forero 1997].

LA ECONOMÍA MATEMÁTICA DEL CRECIMIENTO

Aunque Ricardo formuló en sus *Principios de economía política y tributación* las bases de la moderna teoría del crecimiento, su desarrollo matemático adquirió plena madurez con el trabajo de Solow [1956]. Los principios formalizados incluían en la dinámica del crecimiento el comportamiento competitivo, el equilibrio dinámico y los rendimientos decrecientes en la acumulación de capital. Excluían, a la vez, los aportes de Ramsey [1928], Young [1928] y Schumpeter [1934] acerca del papel del ahorro, la presencia de rendimientos crecientes y el poder de monopolio, aspectos fundamentales en el cambio que experimentó luego la teoría del crecimiento [Barro y Sala-i-Martin 1995, 9].

En el trabajo de Solow, la función de producción asumía rendimientos constantes a escala, rendimientos decrecientes para cada factor, sustitución unitaria entre los factores y tasa de ahorro constante. El supuesto de rendimientos decrecientes implica que países con escaso capital *per cápita* crecen más rápido que los países con capital *per cápita* abundante. En consecuencia, el ingreso *per cápita* de los países converge. Del supuesto se deriva, igualmente, que en ausencia de cambio tecnológico, el ingreso *per cápita* tiende a no crecer.

Los trabajos de Cass [1965] y Koopmans [1965] retomaron el de Ramsey sobre optimización del consumidor y lo aplicaron al de Solow; de allí obtuvieron un modelo de crecimiento con tasa de ahorro endógena, no constante. Sin embargo, en el largo plazo, el crecimiento mantenía su dependencia del avance en el conocimiento tecnológico determinado en forma exógena y tendía a preservar la hipótesis condicional de convergencia. El equilibrio obtenido por Cass y Koopmans podía conservarse en forma descentralizada, con estructuras competitivas en los mercados de factores, siendo óptimo en el sentido de Pareto, cumpliendo el Primer Teorema del Bienestar.

El modelo de crecimiento de Solow con tasa de ahorro constante

Supuestos del modelo

1. Se considera una economía cerrada en la que sólo se produce un único bien que puede destinarse al consumo o a la inversión;

2. El capital se deprecia a una tasa constante δ;

3. La población L crece a una tasa exógena n;

4. El ahorro es una parte constante s del ingreso;

5. La función de producción y cumple las siguientes propiedades:

a. Es homogénea de grado uno, o sea, presenta rendimientos constantes a escala; en términos matemáticos, eso se expresa de la siguiente manera:

$$F(\psi K, \psi L) = \psi F(K, L) \quad \text{con } K > 0 \text{ y } L > 0 \text{ para todo } \psi > 0; \qquad [1]$$

b. La productividad marginal de los factores es positiva y decreciente;

$$\partial F / \partial K > 0;\ \partial F / \partial L > 0;\ \partial^2 F / \partial K^2 < 0;\ \partial^2 F / \partial L^2 < 0 \qquad [2]$$

c. F (•) satisface las condiciones de Inada, es decir, el producto marginal del capital (o trabajo) tiende a infinito cuando el capital (o trabajo) tiende a cero, y tiende a cero cuando el capital (o trabajo) tiende a infinito:

$$\lim_{K \to 0}(F_K) = \lim_{L \to 0}(F_L) = \infty$$
$$\lim(F_K) = \lim(F_L) = 0 \qquad [3]$$

Solución del modelo en estado estacionario

Según los supuestos 1 y 4, la inversión es igual al ahorro e igual a la producción total F(K, L) menos el consumo agregado C; eso se expresa de la siguiente forma:

$$\dot{K} = sF(K, L) - \delta K \qquad [4]$$

Igualmente, el supuesto 5 implica que F (•) pueda expresarse en términos *per cápita*. Para obtenerlo se considera que y = 1/L y se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{L} F(K, L) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k, 1) = f(k) \qquad [5]$$

Donde f(k) y k son respectivamente el producto y el capital expresados en términos *per cápita*. Combinando [4] y [5], se obtiene la inversión neta expresada en términos *per cápita*. El procedimiento es el siguiente:

$$\frac{\dot{K}}{L} = sf(k) - \delta(k) \Rightarrow \dot{k} = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$$

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k \qquad [6]$$

Sustituyendo la función de producción por una de tipo Cobb-Douglas,

$$Y_t = AK^{\beta} L^{1-\beta} \qquad [7]$$

donde A es un índice que mide el estado de la tecnología, K el capital total, L la fuerza de trabajo y $0 < \beta < 1$. Expresada en términos *per cápita*, [7] se convierte en

$$f(k) = Ak^{\beta} \qquad [7.1]$$

Reemplazando [7.1] en [6] se tiene lo siguiente:

$$\dot{k} = sAk^{\beta} - (n + \delta)k \qquad [7.2]$$

La tasa de crecimiento del capital *per cápita* se obtiene dividiendo la ecuación [7.2] entre k. Si se define la tasa de crecimiento del capital *per cápita* en estado estacionario[4] como

$$\gamma_k^* = \dot{k}/k \qquad [7.3]$$

4 Definido como aquella situación en la que todas las variables crecen a una misma tasa constante que posiblemente valga cero.

Sustituyendo [7.3] en [7.2] se tiene que:

$$\left[\gamma_k^* + n + \delta\right] / sA = k^{\beta-1} \qquad [7.4]$$

donde todas las variables del primer término son constantes. Tomando logaritmos y derivando respecto al tiempo se obtiene lo siguiente:

$$0 = \gamma_k^* (1 - \beta) \qquad [7.5]$$

Como $0 < \beta < 1$, entonces $1\text{-}\beta > 0$, con lo que la única tasa de crecimiento en el modelo de Solow es cero. No obstante, el modelo no permite explicar el hecho de que la mayor parte de los países habían experimentado tasas de crecimiento positivas durante varios siglos. Esto llevó a Solow a concluir que la tecnología A, crecía a una tasa (exógena) constante x. De hecho, cuando la tecnología crece a una tasa constante, las demás variables crecen a esa misma tasa, determinada en forma exógena.

El modelo de crecimiento de Solow con optimización de los consumidores: el modelo de Ramsey de Cass-Koopmans

Supuestos del modelo sobre la producción. Se mantienen los supuestos 1, 2, 3 y 4 del modelo de Solow.

Supuestos sobre la utilidad

1. Los agentes derivan su utilidad del consumo de C(t) unidades (que se producen en el sector de bienes finales) en cada momento del tiempo. Las preferencias se caracterizan por una función de utilidad U(C(t)), con $U'(C) > 0$ y $U''(C) < 0$ para todo $C > 0$;

2. La función de utilidad cumple las condiciones de Inada:

$$\lim_{C \to 0} U'(C) = \infty$$

$$\lim_{C \to \infty} U'(C) = 0$$

3. La utilidad de los individuos es la suma de sus funciones instantáneas de utilidad descontadas entre el período 0 y el infinito.

$$\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} dt \qquad [8]$$

donde $p > 0$ es la tasa de descuento, c_t el consumo en el momento t y $\sigma \in (0, \infty)$ el grado de concavidad de la función de producción.

Solución del modelo en estado estacionario

El proceso de optimización consiste en maximizar [8] sujeto a

$$\dot{k} = Ak^{\beta} - c - (n + \delta)\,k \qquad [9]$$

donde $k_0 > 0$ está dado. Adicionalmente, se requiere que p > n, con el propósito de acotar la función de utilidad para que el problema tenga significado económico. El valor presente del hamiltoniano queda definido de la siguiente forma:

$$\mathcal{H} = e^{-(\rho-n)\,t}\left(\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right) + \lambda_k\left[Ak^{\beta} - c - (n+\delta)\,k\right] \qquad [10]$$

donde λ_k (multiplicador dinámico de Lagrange) es el precio implícito de la inversión en capital. La condición de primer orden respecto a la variable de control c es la siguiente:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = e^{-(\rho-n)t}\,c^{-\sigma} = \lambda_k \qquad [11]$$

La ecuación [11] dice que el valor marginal del consumo debe ser igual al valor marginal del la inversión en capital físico. Tomando logaritmos y derivando con respecto a t se obtiene:

$$-(\rho - n)\,t - \sigma\ln(c) = \ln\lambda_k \qquad [11.1]$$

$$-(\rho - n) - \sigma\left(\frac{\dot{c}}{c}\right) = \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k} \qquad [11.2]$$

La condición de primer orden con respecto a la variable de estado k (que se iguala a la variación de su precio implícito en el tiempo con signo menos) es la siguiente:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = \lambda_k\,(\beta A^{-(1-\beta)} - n - \delta) = -\dot{\lambda}_k \qquad [12]$$

Sustituyendo (12) en (11.2) y reordenando, se obtiene la siguiente expresión:

$$\rho + \sigma\left(\frac{\dot{c}}{c}\right) = \beta A^{-(1-\beta)}\,\delta \Rightarrow \left(\frac{\dot{c}}{c}\right) = \sigma^{-1}\,[\beta A^{-(1-\beta)} - \delta - \rho] \qquad [13]$$

Al igual que en el modelo de Solow (1956), el equilibrio obtenido es óptimo. En el óptimo, la tasa de retorno del capital debe igualar a la tasa de interés; sustituyendo en la ecuación [13] se obtiene lo siguiente:

$$\left(\frac{\dot{c}}{c}\right) = \sigma^{-1}\,[r - \delta - \rho] \qquad [13.1]$$

De [13.1] es posible obtener la tasa de crecimiento de las demás variables pues el sistema se encuentra en estado estacionario. No obstante, las conclusiones del modelo de Solow se mantienen cuando se obtiene una trayectoria de consumo en forma óptima.

Modelos de crecimiento endógeno con tecnología constante: Lucas [1988]

Supuestos del modelo sobre la producción

1. Existen dos sectores: uno produce bienes finales y el otro capital humano. Para el sector de bienes finales se mantienen los supuestos 1, 2, 3 y 5a del modelo de Solow;

2. Los dos factores acumulables, capital físico y capital humano, se producen con diferentes tecnologías;

3. El *stock* medio de capital humano genera una externalidad.

Supuestos sobre la utilidad. Se mantienen los tres supuestos del modelo del modelo de Solow con optimización de los consumidores.

Solución del modelo en estado estacionario

La función de producción de bienes finales está dada por

$$Y = AK^{\beta} [uhL]^{1-\beta} h_{\alpha}^{\psi} \qquad [14]$$

Donde u es la fracción del tiempo que los individuos destinan a producir bienes finales, h el nivel de calificación media de los trabajadores y L la oferta laboral. El término h_{α}^{ψ} y recoge la externalidad del *stock* medio de capital humano. Por lo tanto, la restricción de acumulación de capital físico en términos *per cápita* es:

$$\dot{k} = Ak^{\beta} [uh]^{(1-\beta)} h_{\alpha}^{\psi} - c - (n + \delta_k) k \qquad [15]$$

Igualmente, la producción de capital humano en términos *per cápita* se define por

$$\dot{h} = \phi (1 - u) h - (n + \delta_h) h \qquad [16]$$

Donde ϕ es un parámetro de la productividad en el sector educativo, y (1-u) la fracción del tiempo disponible que los individuos dedican a acumular capital humano. El comportamiento en estado estacionario se obtiene maximizando [8] sujeto a [15] y [16]. Sin embargo, a diferencia del modelo anterior, aquí se tienen dos variables de control (c y u) y dos restricciones dinámicas la acumulación de k y de h. Por lo tanto, el hamiltoniano queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{H} = e^{-(\rho-n)t}\left(\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right) + \lambda_k\left[Ak^{\beta}\,[uh]^{1-\beta}\,h_{\alpha}^{\psi} - c - (n+\delta_k)\,k\right]$$

$$+ \lambda_h\,[\phi\,(1-u)\,h - (n+\delta_h)h\,] \tag{17}$$

siendo λ_k y λ_h los precios implícitos de la inversión en capital físico y capital humano, respectivamente. La condición de primer orden respecto a la variable control c igualada a cero es:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial c} = e^{-(\rho-n)t}\,c^{-\sigma} = \lambda_k \tag{18}$$

Tomando logaritmos y derivando con respecto a t se obtiene:

$$-(\rho-n)\,t - \sigma\ln(c) = \ln\lambda_k \tag{18.1}$$

$$-(\rho-n) - \sigma\left(\frac{\dot{c}}{c}\right) = \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k} \tag{18.2}$$

Ahora bien, la condición de primer orden con respecto a la variable control u igualada a 0 es:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u} = \lambda_k\left[Ak^{\beta}\,h^{1-\beta}\,(1-\beta)\,u^{-\beta}\,h_{\alpha}^{\psi}\right] - \lambda_h\,h\phi = 0 \tag{19}$$

Las condiciones de primer orden con respecto a las variables de estado (igualadas a la variación de su precio implícito en el tiempo con signo menos) son las siguientes:

$$-\dot{\lambda}_k = \lambda_k\,[\beta Ak^{\beta-1}\,(uh)^{(1-\beta)}\,h_{\alpha}^{\psi} - (n+\delta_k)] \tag{20}$$

$$-\dot{\lambda}_h = \lambda_k\left[(1-\beta)\,Ak^{\beta-1}\,u^{(1-\beta)}\,h^{-\beta}\,h_{\alpha}^{\psi}\right] + \lambda_h[\phi\,(1-u) - (n+\delta_h] \tag{21}$$

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda_k\,k_t) = \lim_{h\to\infty}(\lambda_h\,h_t) = 0 \tag{22}$$

La ecuación [22] recoge las dos condiciones de transversalidad. Para garantizar consistencia interna se requiere que $h_{\alpha} = h$. Igualmente, asumiendo que $\lambda_k = \lambda_h$ y sustituyendo [18.2] en [20] y [21], se obtiene lo siguiente:

$$\left(\frac{\dot{c}}{c}\right) = \sigma^{-1}\,[\beta Ak^{\beta-1}\,u^{(1-\beta)}\,h^{1+\psi-\beta} - \rho - \delta] \tag{23}$$

Después de una cantidad significativa de álgebra, se obtiene que:

$$\gamma_y^* = \gamma_k^* = \gamma_c^* = \sigma^{-1}\left[\frac{(\phi - \rho - \delta)(1 - \beta + \psi)}{(1 - \beta + \psi) - \psi}\right] \quad [24]$$

Según la ecuación [24], se puede ver que en ausencia de externalidades, $\psi = 0$, las tasas de crecimiento de y, k, c y h son iguales a $(\phi - \delta - \rho)/\sigma$. Es importante observar que en este caso el parámetro de productividad relevante es ϕ (índice de productividad del sector educativo). En ese caso, el equilibrio competitivo es óptimo. No obstante, cuando se considera la externalidad, la tasa de equilibrio competitivo es inferior a la tasa óptima de crecimiento.

Modelos de crecimiento endógeno con cambios en la tecnología: Romer [1990]

Supuestos del modelo sobre la producción

1. El modelo tiene tres sectores: el primero, de investigación, que produce diseños a partir del capital humano y del conocimiento tecnológico disponible; el segundo, que produce bienes intermedios usando los diseños y bienes duraderos; el tercero, que produce bienes finales utilizando capital humano, trabajo, y bienes duraderos que pueden consumirse o ahorrarse en calidad de nuevo capital;

2. El crecimiento del capital se toma en términos netos;

3. El capital humano y el trabajo (oferta laboral) se mantienen constantes;

4. El ahorro no es una proporción constante del ingreso;

5. La función de producción de bienes finales tiene la siguiente característica: rendimientos crecientes a escala para el conjunto de los factores rivales y no rivales, y rendimientos constantes a escala cuando se consideran solamente los factores rivales. Esto se expresa así:

$$F[\psi A(t), \psi K(t), \psi H(t)] > F[A(t), \psi K(t), \psi H(t)] = \psi F[A_i(t), K(t), H(t)] \quad [25]$$

donde F es la función de producción de bienes finales; ψ es un escalar ($\psi > 1$); $A(t) = \{A_i(t),\ i=1, ..., m\}$ representa los factores no rivales (conocimiento tecnológico); $K(t) = \{K(t),\ i = 1,..., m\}$ el capital físico y $H(t) = \{H(t),\ j=1,..., n\}$ el capital humano;

6. Debido a que la función de producción presenta rendimientos crecientes, el producto marginal de los factores rivales no es decreciente ni se cumplen las condiciones de Inada;

7. Los bienes de capital no son sustitutos perfectos entre sí;

8. El conocimiento tecnológico es factor de producción, se acumula y tiene características de un bien público no puro, es decir, es no rival y susceptible de exclusión parcial.

Estos supuestos, invalidan los del modelo de Solow y casi todos los de los modelos de Cass-Koopmans y Lucas. Igualmente, ubican el problema del crecimiento en un escenario diferente: rendimientos crecientes y competencia imperfecta (monopolística).

Supuestos del modelo sobre la utilidad. Se mantienen los tres supuestos de los modelos anteriores, aunque la ecuación [8] no se expresa en términos *per capita*. La ecuación correspondiente es:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{C^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} dt \qquad [26]$$

Solución del modelo en estado estacionario

El sector de bienes finales presenta la siguiente función de producción:

$$Y_t = H_Y^{\alpha} L^{\beta} \int_0^{A} x(i)_t^{1-\alpha-\beta} di \qquad [27]$$

donde H_Y es el capital humano utilizado en la producción de bienes finales, el cual permanece constante; x(i) es un conjunto infinito de los insumos o diseños de capital, y A es un índice de la tecnología con $i \geq A$. Los insumos entran como una función aditivamente separableen la que hay una firma distinta i para cada bien i.

Si los insumos se proporcionan al nivel, la ecuación [23] se convierte en

$$Y_t = H_Y^{\alpha} L^{\beta} A x^{-(1-\beta)} \qquad [27.1]$$

Igualmente, dado que se requieren η unidades de capital para producir cualquier tipo de diseño, el *stock* de capital físico usado en la producción de bienes finales es:

$$K = \eta \bar{A} x \Rightarrow \bar{x} = \frac{K}{\eta A} \qquad [27.2]$$

Reemplazando [27.1] y [27.2] en [27] se tiene que:

$$\dot{K}_t = \eta^{\alpha+\beta-1} A^{\alpha+\beta} H_Y^{\alpha} L^{\beta} K^{1-\alpha-\beta} \phi^{\beta-1} - C \qquad [28]$$

La ecuación [28] permite ver que el avance tecnológico en Harrod neutral, lo que es consistente con un estado estacionario en el que la tecnología y las demás variables crecen a una misma tasa determinada. Igualmente, si

$$\dot{K}_t = \Delta - C \qquad [28.1]$$

Por su parte, el sector de investigación presenta la siguiente función de producción:

$$\dot{A} = \phi H_Y A \qquad [29]$$

Donde ϕ es un parámetro de eficiencia en el sector tecnológico, H_A, el capital humano destinado a la investigación y A el conocimiento tecnológico en el momento t.

La tasa de crecimiento en estado estacionario se obtiene maximizando [26] sujeto a [28] y [29]. Sin embargo, a diferencia del modelo anterior, aquí se tienen dos variables de control (C y H_A), y dos restricciones dinámicas de la acumulación de K y de A. Por lo tanto, el valor corriente del hamiltoniano es el siguiente:[5]

$$\mathcal{H} = \left(\frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right) + \lambda_K[\eta^{\alpha+\beta-1} A^{\alpha+\beta} H_Y^{\alpha} L^{\beta} K^{1-\alpha-\beta} \phi^{\beta-1} - C]$$
$$+ \lambda_H [\phi H_A A] \qquad [30]$$

Las condiciones de primer orden respecto a las dos variables control, C y H_A, igualadas a cero, son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C} = C^{-\sigma} = \lambda_K \qquad [31]$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H_A} = \lambda_A[\sigma A] - \lambda_K \alpha [H - H_A]^{-1} \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{\lambda_A \sigma A}{\lambda_K \alpha} [H - H_A] \qquad [32]$$

Tomando logaritmos y derivando con respecto al tiempo, la ecuación 31 se transforma en:

$$-\sigma \ln(C) = \ln \lambda_K \qquad [31.1]$$

$$-\sigma\left(\frac{\dot{C}}{C}\right) = \frac{\dot{\lambda}_K}{\lambda_K} \qquad [31.2]$$

Las condiciones de primer orden con respecto a las variables de estado (igualadas a la variación de su precio implícito en el tiempo con signo menos) son las siguientes:

5 Ver Chiang [1992] sobre valor corriente y valor presente de los hamiltonianos.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = \lambda_K (1 - \alpha - \beta) K^{-1} \Delta) = \lambda_K \rho = -\dot{\lambda}_K \qquad [33]$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A} = \lambda_A \sigma H_A - \lambda_K [\alpha + \beta] A^{-1} \Delta + \lambda_A \rho = -\dot{\lambda}_A \qquad [34]$$

A partir de las ecuaciones [31.2], [32], [33] y [34], se determina la solución explícita del modelo, aunque su solución no es fácil. Lo realmente interesante es que en estado estacionario todas la variables crecen a una misma tasa constante, con lo que, después de una buena dosis de álgebra, se obtiene que:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{A}}{A} = \sigma H_A \qquad [35]$$

Despejando y sustituyendo en las ecuaciones [31.2], [32], [33] y [34], se obtiene que la tasa de crecimiento del producto —y de las demás variables— es igual a:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \left[\frac{\sigma(\alpha + \beta) H - \alpha\rho}{\sigma\theta + \beta} \right] \qquad [36]$$

La ecuación [36] muestra que varios parámetros afectan la tasa de crecimiento. Sin embargo, lo más importante es que el *stock* total de capital humano H y la tasa de sustitución intertemporal del consumo s tienen un efecto positivo, mientras que la tasa de descuento r tiene un efecto negativo sobre la tasa de crecimiento.

CONCLUSIONES

En los modelos de crecimiento endógeno se da no sólo una nueva formalización: existe además una nueva concepción, una 'nueva economía política que ha significado el abandono gradual del marco ricardiano sobre el que reposaba el trabajo de Solow [1956]. La primera generación de modelos de crecimiento endógeno (Romer [1986], Lucas [1988] y Rebelo [1991]) abandonó el supuesto de rendimientos decrecientes para el agregado de la economía. No obstante, a nivel de firma se mantenían la competencia perfecta y la tecnología constante, aunque ya existía un cambio en la concepción del crecimiento que retomaba el planteamiento de Smith acerca de la mayor destreza de los trabajadores como causa de la división del trabajo.

La segunda generación de modelos (Romer [1987 y 1990a], Grossman-Helpman [1991] y Aghion-Howitt [1992]) significó la ruptura definitiva con el marco ricardiano. En este tipo de modelos, el crecimiento es la consecuencia de cambios en la tecnología —como resultado de acciones intencionales por parte de los agentes—, que se traduce en rendimientos crecientes. Este hecho significó la salida de la competencia perfecta y los rendimientos constantes, y de la teoría del crecimiento. Todo lo anterior estuvo inspirado en el planteamiento de Smith: 'la invención de nuevas máquinas es la fuente de rendimientos crecientes, costos decrecientes y crecimiento autosostenido. De hecho, se podría afirmar que, en su totalidad, la teoría del crecimiento endógeno tiene sus bases en los planteamientos del escocés inmortal.

BIBLIOGRAFÍA

Aghion, Philippe, Howitt, Peter 1992. "A Model of Growth Through Creative Destruction", *Econometrica* 60, 2, marzo.

Archibald, G. 1987. "Monopolist Competition", *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, McMillan Press, Londres.

Arrow, Kenneth. 1962. "The Economic Implications of Learning by Doing", *Review of Economic Studies* 29, junio.

Barro, Robert J, Sala-i-Martin, Xavier. 1995. *Economic Growth*, McGraw-Hill.

Becker, Gary, Murphy, Kevin. 1993. "The Division Labor, Coordination Cost, and Knowledge", *Human Capital: A Theorical and Empirical Analysis with Special Reference to Education*, NBER y The Chicago University Press.

Becker, Gary, Murphy, Kevin, Tamura, Robert. 1990. "Human Capital, Fertility, and Economic Growth", *Journal of Political Economy* 98, 5, octubre.

Benavides, Oscar, Forero, Clemente. 1997. "La decisión de invertir en educación o tecnología en un modelo de crecimiento endógeno", mimeo, CID, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Borland, Jeff, Xiaokai, Yang. 1991. "A Microeconomic Mechanism for Economic Growth", *Journal of Political Economy* 99, 3.

Caballé, Jordi, Santos, Manuel. 1993. "On Endogenous Growth with Physical and Human Capital", *Journal of Political Economy* 101, 6.

Cass, David. 1965. "Optimum Growth in an Agregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies* 32, julio.

Chamberlin, Edward. 1933. *The Theory of Monopolistic Competition*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, Oxford, Londres.

Chiang, Alpha. 1992. *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill, Inc., Estados Unidos.

Dixit, Avinash, Stiglitz, Joseph. 1977. "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity", *The American Economic Review* 67, 3, junio.

Domar, Evsey. 1946. "Capital Expansion, Rate of Growth and Employment", *Econometrica*, 14, abril.

Ehrlich, Isaac. 1990. "The Problem of Development: Introduction", *Journal of Political Economy* 98, 5.

Ferguson, C., Gould, J. P. 1979. *Teoría microeconómica*, Fondo de Cultura Económica, México.

Grossman, Gene, Helpman, Elhanan. 1991. *Innovation and Growth in the Global Economy*, MIT Press, Cambridge MA.

Harrod, Roy. 1939. "A Essay in Dynamic Theory", *Economic Journal* 49, junio.

Koopmans, Tjalling. 1965. "On the Concept of Optimal Economic Growth", *The Econometric Approach to Development Planning*, North Holland, Amsterdam.

Lucas, Robert Jr. 1988. "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics* 22.

Marshall, Alfred. 1961. *Principios de Economía*, Fondo de Cultura Económica, México D. F.

Negishi, Takashi. 1987. "Monopolist Competition and General Equilibrium", *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, McMillan Press.

Ramsey, Frank. 1928. "A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal* 38, diciembre.

Rebelo, Sergio. 1991. "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy* 99, 3.

Robinson, Joan. 1933. *The Economics of Imperfect Competition*, MacMillan Press, Londres.

Romer, Paul. 1986. "Increasing Returns and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy* 94, 5.

Romer, Paul. 1987. "Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization", *AEA Papers and Proceedings* 77, 2, mayo.

Romer, Paul. 1990a. "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy* 98, 5, octubre.

Romer, Paul. 1990b. "Are Nonconvexities Important for Understanding growth?", *AEA Papers and Proceedings* 80, mayo.

Romer, Paul. 1994. "The Origins of Endogenous Growth", *Journal of Economic Perspectives* 8, 1.

Salazar, Boris. 1993. "La nueva teoría del crecimiento: ¿nada nuevo bajo el Sol?", *Boletín socioeconómico* 26, diciembre.

Schumpeter, Joseph. 1934. *The Theory of Economic Development*, Harvard University Press, Cambridge MA.

Sheshinski, Eytan. 1967. "Optimal Accumulation with Learning by Doing", Karl Shell, editor, *Essays on The Theory of Optimal Economic Growth*, MIT Press, Cambridge MA.

Smith, Adam. 1987. *Investigación sobre la naturaleza y causas de la riqueza de las naciones*, Fondo de Cultura Económica, México D.F.

Solow, Robert. 1956. "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics* 70, 1, febrero.

Sraffa, Piero. 1926. "The Laws of Returns Under Competitive Conditions", *Economic Journal* 356.

Stigler, George. 1957. "Pefect Competition Historically Contempled", *Journal of Political Economy* LXV.

Stiglitz, Joseph. 1993. *Economía*, Ariel Editores, Barcelona.

Uzawa, Hirofumi. 1965. "Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth", *International Economic Review* 6, enero.

Vassilakis, Spyros. 1987. "Increasing Returns to Scale", *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, McMillan Press, Londres.

Yang, Xiaokai, Borland, Jeff. 1991. "A Microeconomic Mechanism for Economic Growth", *Journal of Political Economy* 99, 3.

Young, Allyn. 1928. Increasing Returns and Economic Progress, *Economic Journal* 38, diciembre.

Young, Alwyn. 1993. "Invention and Bounded Learning by Doing", *Journal of Political Economy* 101, 3.