

Análisis del regeneramiento óseo bajo el esquema de optimización topológica

Analysing bone regeneration using topological optimisation

Diego Alexander Garzón A.¹, Máximo Alejandro Roa G.², Carlos Alberto Duque D.³

RESUMEN

El objetivo fundamental del presente artículo es presentar la fundamentación matemática de la optimización topológica para llevar a cabo el estudio del regeneramiento óseo. La estructura ósea posee la capacidad de adaptarse de forma económica (con un "mínimo" de masa y "alta" resistencia) a diversas solicitaciones mecánicas, lo cual responde a modelos de optimización topológica. Dichos esquemas de análisis son esenciales para la formulación de la terapia física en pacientes que necesiten fortalecer parcial o totalmente la estructura del tejido de algún hueso en particular. Inicialmente se formula el modelo matemático y sus métodos de solución.

PALABRAS CLAVE: dominio, optimización topológica, regeneramiento óseo, teoría matemática.

ABSTRACT

The present article's object is to present the mathematical foundations of topological optimisation aimed at carrying out a study of bone regeneration. Bone structure can be economically adapted to different mechanical demands responding to topological optimisation models (having "minimum" mass and "high" resistance). Such analysis is essential for formulating physical therapy in patients needing partial or total strengthening of a particular bone's tissue structure. A mathematical model is formulated, as are the methods for resolving it.

KEY WORDS: bony regeneration, topological optimisation, mathematical theory.

Recibido: Noviembre 24 de 2004

Aceptado: Febrero 4 de 2005

I. Introducción

La estructura ósea posee la capacidad de adaptarse de forma económica (con un "mínimo" de masa y "alta" resistencia) a diversas solicitaciones mecánicas. El análisis del regeneramiento del tejido óseo ha sido formulado bajo tres enfoques: el de Optimización Topológica (también llamado Optimización de forma, donde se establece el estado objetivo del tejido ante las solicitaciones de carga), el enfoque fenomenológico (donde se busca establecer la relación existente entre estímulo y respuesta de forma cuantitativa para predecir la adaptación del hueso ante cargas mecánicas instantáneas), y el enfoque mecanicista (el cual estudia la adaptación ósea desde la biología celular y molecular, centrandolo su análisis al nivel del tejido).

II. Optimización Topológica: teoría matemática

A. Introducción

El objetivo fundamental de la optimización topológica es encontrar la distribución de masa en una estructura que está sometida a condiciones de carga y restricciones de frontera específicas, de tal forma que cumpla con una función objetivo que se debe optimizar.

La cantidad de material y su distribución está limitada en el dominio de diseño: Ω , el dominio mencionado puede contener regiones con material o con vacíos que no pertenecen al análisis, y por tanto, se denominan regiones pasivas. A diferencia del dominio pasivo, el dominio activo debe ser optimizado bajo una función (objetivo).

1 Profesor asociado Universidad Nacional de Colombia, M. Sc., dagarzona@unal.edu.co.

2 Profesor asociado Universidad Nacional de Colombia, M. Sc., maroag@unal.edu.co.

3 Profesor asociado Universidad Nacional de Colombia, M. Sc.

Maestría en Ingeniería - Materiales y Procesos de Manufactura, Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica, Universidad Nacional de Colombia-Sede Bogotá.

Para la solución del problema de optimización se considera un dominio bidimensional y teoría de elasticidad lineal (ver figura 1).

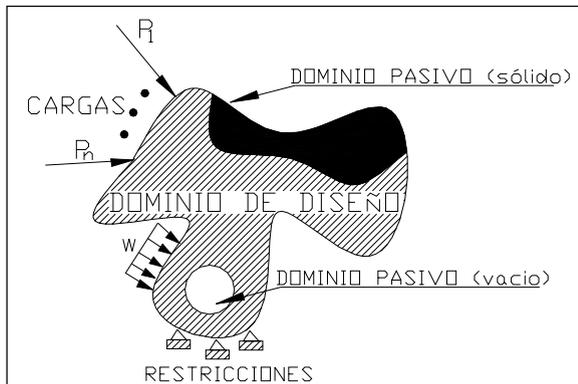


Fig. 1. Dominio para el problema de Optimización Topológica

B. Método de elementos finitos

El método de elementos finitos es un procedimiento numérico para el análisis de fenómenos que transcurren en un dominio continuo. En este método se requiere hallar la solución a problemas de valor en la frontera con condiciones iniciales, asumiendo que el dominio se divide en subdominios, los cuales se denominan elementos, y que la función desconocida de una variable de estado se define en forma aproximada en cada uno de los elementos. Con estas funciones que son definidas individualmente para cada elemento y en conjunto con los demás subdominios unidos a través de nodos (los cuales se encuentran en la interfase de los elementos), se aproxima la solución del problema.

Gracias a que el dominio completo se divide en numerosos elementos y la función objetivo (solución) es aproximada en ciertos puntos (llamados nodos), es imperativa la solución de un sistema con un gran número de ecuaciones.

Considerando las ecuaciones básicas de esfuerzo-deformación, el cálculo de deflexiones de cada elemento producidas por el sistema de carga son transmitidas desde los elementos vecinos a través de los puntos nodales. Por ello, la deformación se determina a partir de los puntos nodales, así mismo los esfuerzos se calculan a partir de la deflexión, tomando en cuenta la ecuación constitutiva adecuada.

El paquete de información más pequeño en el análisis por elementos finitos, es la llamada matriz de rigidez para cada elemento, cuya expresión se obtiene a partir de la formulación seleccionada. La matriz de rigidez se puede conceptualizar como una "pseudo" constante de resorte que describe (en el caso mecánico) el desplazamiento de puntos nodales bajo la acción del sistema de fuerzas (o cargas en general). En notación matricial se expresa:

$$[f]^e = [k]^e [u]^e \quad (1)$$

Con $e = 1$ hasta N (donde N es el número total de elementos finitos en el dominio).

Donde $[f]^e$ es el vector columna de fuerza actuante sobre el elemento (o cargas actuantes sobre el sistema, ya sean térmicas, eléctricas etc.), $[k]^e$ es la matriz de rigidez del elemento (en la cual se consideran las propiedades físicas, elasticidad, conducción térmica, eléctrica, etc.), $[u]^e$ es la matriz de desplazamiento (o cualquier otra variable de estado, p. Ej., temperatura).

Cuando se ensamblan los paquetes de información de cada uno de los elementos para configurar el sistema, se obtiene la ecuación matricial:

$$[F] = [K][U] \quad (2)$$

Donde:

$[U]$: Matriz de rigidez maestra, la cual es ensamblada a partir de $[k]^e$ para los elementos.

$[F]$: Fuerzas externas a cada nodo.

$[U]$: Desplazamientos de los nodos.

Las incógnitas son los desplazamientos o variables de estado. Estas ecuaciones son resueltas computacionalmente, obteniendo los desplazamientos de los puntos nodales, para posteriormente emplear esta solución en el cálculo de otras variables, como por ejemplo, los esfuerzos.

C. Minimización de una variable con restricciones

Para llevar a cabo el proceso de optimización topológica (o de forma) se define la variable de diseño x^e que representa la densidad relativa del material en el elemento e , esto es: (3)

$$\rho^e = x^e \rho_0 \quad (3)$$

Donde:

ρ_0 : Es la densidad del elemento en el dominio de diseño sin optimizar.

Gracias a esta variable, la elasticidad y, por tanto, la resistencia de un modelo estructural, modifican su comportamiento ante cargas externas hasta llegar a su estado óptimo. Es así como la matriz de rigidez para un elemento e se convierte en: (4).

$$k^e = (x^e)^p k_0 \quad (4)$$

Donde p es el factor de penalización. Si $p=1$, la experiencia indica (BensØe) que el mapa de densidades puede obtener valores intermedios, lo cual es inconveniente para su posible manufactura. Si $p=3$, el material se

optimiza hasta encontrar distribuciones de densidad que toman valores relativos de 0 ó 1.

Se desea entonces minimizar la densidad de energía de deformación existente en el componente estructural homogeneizando su valor en todo el continuo del modelo. Para ello, se utiliza el concepto de la energía almacenada en un resorte:

$$E = \frac{1}{2} ku^2 \quad \text{Energía almacenada en un resorte}$$

De forma análoga: (5)

$$C = \frac{1}{2} [F]^T [U] \quad (5)$$

Reemplazando el vector $[F]$ se obtiene: (6)

$$C = \frac{1}{2} [U]^T [K] [U] \quad (6)$$

Reemplazando la ecuación (4) en (6) y realizando la notación en términos del desplazamiento y rigidez de los elementos se obtiene: (7)

$$C = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N u^e k^e u^e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N x^p u^e k_0^e u^e \quad (7)$$

Donde N es el número de elementos del dominio continuo. C es la función objetivo del problema de optimización.

El volumen del material que se desea remover está dado por: (8)

$$V = fV_0 \therefore f = \frac{V}{V_0} \quad (8)$$

Donde f es la fracción del material que se desea remover y V_0 es el volumen total del dominio de diseño en su estado no optimizado.

Definidas las anteriores variables, el proceso de optimización se reduce matemáticamente al siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar :} & \quad C = [F]^T [U] \\ \text{Sujeto a :} & \quad f = \frac{V}{V_0} \\ & \quad 0 < x_{\min} \leq x^e \leq x_{\max} \\ & \quad [F] = [K] [U] \end{aligned} \quad (9)$$

Donde x_{\min} y x_{\max} son los límites superior e inferior de la densidad relativa, respectivamente. Se puede escoger por ejemplo, $x_{\max} = 1$ y $x_{\min} = 0.3 > 0$, de tal suerte que se evite que la matriz de rigidez se convierta en singular.

En muchos ejemplos prácticos, la reducción de volumen en el dominio de diseño puede ser $f=0.5$ (50% de reducción), se debe tener en cuenta que $0 < f \leq 1$.

En este momento cabe la pregunta: ¿cuáles son los métodos de solución? Existen varios para solucionar el problema de optimización, con lo cual se desea hallar x^e . El primero está basado en la formulación lagrangiana, donde se utiliza un criterio de optimalidad (método heurístico) para actualizar las variables de diseño y los multiplicadores de Lagrange encontrados en cada iteración. Este método se explica a continuación.

D. Solución heurística

1) Fundamento Geométrico de los multiplicadores de Lagrange

En este apartado se proporciona una explicación geométrica intuitiva del método de los multiplicadores de Lagrange. Este método es útil para calcular máximos y mínimos de funciones sometidas a ligaduras, siendo una herramienta importante en análisis de economía y mecánica avanzada.

Considérese el problema: (10)

$$\begin{aligned} \text{Maximizar ó Minimizar :} & \quad C = f(x, y) \\ \text{Sujeto a} & \quad : \quad g(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

El gráfico de $g(x, y) = 0$ es en general una curva Γ , como la mostrada en la figura 2. Se supone que f , considerada sólo sobre Γ , alcanza un máximo (o un mínimo) en un punto P .

Sea la función vectorial $\mathbf{G}: \vec{G}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ una parametrización de Γ . Sea también $G(t_0) = \vec{OP}_0$, Entonces C es una función de t dada por: (11)

$$C = f(x(t), y(t)) \quad (11)$$

Existe un teorema² que enuncia la existencia de la derivada total de la función C dada por: (12)

$$\frac{dC}{dt} = \nabla f \bullet \vec{G}'(t_0) \quad (12)$$

Como f , considerada sólo sobre Γ , tiene un máximo en $G(t_0)$, se puede reconocer que (12) se convierte en:

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

En t_0 por (12) se tiene que $\nabla f \bullet \vec{G}'(t_0) = 0$.

Esto significa que ∇f es perpendicular a $\vec{G}'(t_0)$ en P_0 . Pero ∇g , calculado en P_0 , es también perpendicular a $\vec{G}'(t_0)$, ya que el gradiente ∇g es perpendicular a la curva de nivel $g(x, y) = 0$. Entonces, ∇f es paralelo a ∇g . (ver figura 2).

¹ Se denota por la letra C , gracias a que en textos escritos en inglés se denomina *Compliance*.

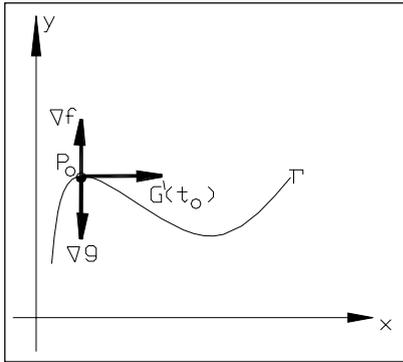


Fig. 2. Comportamiento de las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$. ∇f y ∇g son perpendiculares a $\vec{G}'(t_0)$ en P_0 . ∇f y ∇g son paralelos.

Dicho de otra forma, existe un escalar λ tal que: (13)

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad (13)$$

Por tanto, dado un máximo (o un mínimo) de f , sujeto a $g(x,y)=0$, existe un escalar λ tal que:

$$\begin{aligned} f_x \vec{i} + f_y \vec{j} &= \lambda (g_x \vec{i} + g_y \vec{j}) \\ \therefore f_x &= \lambda g_x \\ f_y &= \lambda g_y \end{aligned}$$

En consecuencia, para $P_0=(x_0,y_0)$ existe un escalar λ tal que se cumplan las tres siguientes condiciones: (14)

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = \lambda g_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) = \lambda g_y(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Las condiciones enunciadas en (14) proporcionan tres ecuaciones con tres incógnitas x_0 , y_0 y λ .

Para simplificar las condiciones anteriores, se introduce la función L (Lagrangiana) definida según: (15)

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (15)$$

Con lo cual las ecuaciones (14) y (15) son equivalentes a: (16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0, \text{ lo cual es equivalente a } -g(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Cuando se tienen más de dos variables, se utiliza el mismo método para hallar máximos y mínimos con una o más restricciones, con lo cual el método se puede extender a: (17)

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \quad (17)$$

Donde las condiciones para hallar los máximos (o mínimos) están dadas por: (18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 0 \\ &: \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 0 \\ &: \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

El desarrollo riguroso del problema de Lagrange plantea la existencia de máximos o mínimos en puntos extremos del intervalo analizado (punto inicial o final) de la curva en cuestión. También se puede discutir si las dos funciones no se cortan (o dos superficies) en un punto (o según una curva) en la cual el método no es aplicable.

Una vez discutido el método de multiplicadores de Lagrange, se utiliza en el problema de optimización topológica aplicado a la ecuación (19).

2) Aplicación del método de multiplicadores de Lagrange al problema de optimización topológica

Se describe, nuevamente, el problema de optimización topológica: (ecuación 9)

$$\begin{aligned} \text{Minimizar :} & \quad C = [F]^T [U] \\ \text{Sujeto a :} & \quad f = \frac{V}{V_0} \\ & \quad 0 < x_{min} \leq x^e \leq x_{max} \\ & \quad [F] = [K][U] \end{aligned} \quad (19)$$

Con $e = 1$ hasta N (donde N es el número total de elementos finitos en el dominio).

Utilizando la ecuación (17) aplicada al problema de optimización topológica, se obtiene el lagrangiano: (19)

$$L = C + \lambda(V - fV_0) + [\lambda_e]^T ([K][U] - [F]) + \sum_{e=1}^N \lambda_2^e (x_{min} - x^e) + \sum_{e=1}^N \lambda_3^e (x^e - x_{max}) \quad (19)$$

Donde λ y $[\lambda_e]$ son multiplicadores de Lagrange de la función global y λ_2^e y λ_3^e son los multiplicadores de Lagrange para los límites de las restricciones. Se debe notar además que λ es un escalar, $[\lambda_e]$ es un vector que contiene multiplicadores de Lagrange y λ_2^e y λ_3^e son escalares.

Como se mencionó, la optimalidad se encuentra cuando las derivadas de la función lagrangiana con respecto a las variables de diseño sean iguales a cero, con lo cual: (20)

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = 0, \text{ para } e = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = \frac{\partial C}{\partial x^e} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x^e} + [\lambda_1]^T \frac{\partial([K][U])}{\partial x^e} - [\lambda_1]^T \frac{\partial([F])}{\partial x^e} - \lambda_2^e + \lambda_3^e \quad (20)$$

Asumiendo que las restricciones laterales no están activas ($\lambda_2^e = \lambda_3^e = 0$), que las cargas son independientes de la variable de diseño ($\frac{\partial([F])}{\partial x^e} = 0$) y reemplazando la ecuación (5) en (20) se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = \frac{\partial([U]^T [K][U] + [U]^T \frac{\partial([K])}{\partial x^e} [U] + [U]^T [K] \frac{\partial([U])}{\partial x^e} + \lambda V^e + [\lambda_1]^T (\frac{\partial([K])}{\partial x^e} [U] + [K] \frac{\partial([U])}{\partial x^e}))}{\partial x^e}$$

Ordenando la ecuación se tiene que: (21)

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = [U]^T \frac{\partial([K])}{\partial x^e} [U] + [\lambda_1]^T \frac{\partial([K])}{\partial x^e} [U] + \frac{\partial([U])}{\partial x^e} (2[U]^T [K] + [\lambda_1]^T [K]) + \lambda V^e \quad (21)$$

En busca de la eliminación de $\frac{\partial([U])}{\partial x^e}$ se puede seleccionar $[\lambda_1]^T$ de tal suerte que $2[U]^T [K] + [\lambda_1]^T [K] = 0$, con lo cual se llega a: (22)

$$\frac{\partial L}{\partial x^e} = -[U]^T \frac{\partial([K])}{\partial x^e} [U] + \lambda V^e = -p(x^e)^{p-1} u^e k_0 u^e + \lambda V^e = 0 \quad (22)$$

De la ecuación (22) se obtiene que:

$$\frac{p(x^e)^{p-1} u^e k_0 u^e}{\lambda V^e} = 1 \quad (23)$$

El significado físico de la ecuación (23) es: la densidad de la energía de deformación es constante a través del dominio de diseño, de tal suerte que el multiplicador de Lagrange λ es el escalamiento para mantener su valor invariable. Obsérvese que en (23) cambia el valor de la variable x^e y de λ , por lo tanto, se debe iterar hasta que se cumpla dicha ecuación. Por tal razón, se establece un método heurístico para la actualización de los valores de la variable de diseño, esto es: (24)

$$x_{k+1}^e = x_k^e \left(\frac{p(x_k^e)^{p-1} u^e k_0 u^e}{\lambda V^e} \right)^{\xi} = x_k^e (B_k^e)^{\xi} \quad (24)$$

Donde x es el coeficiente de amortiguamiento, que a menudo es 0.5 y el subíndice k es el contador del número de iteraciones. El coeficiente de amortiguamiento puede variar entre 0 y 1 ($0 < x < 1$), lo cual tiene el propósito de estabilizar la iteración.

También, para estabilizar la iteración, se mueven los límites de la variable de diseño, con el objetivo de evitar grandes variaciones entre iteraciones. Esto es, se sigue el algoritmo: (25)

$$x_{k+1}^e = \begin{cases} \text{máx}((1 - m)x_k^e, x_{\text{mín}}) & \text{si } x_k^e (B_k^e)^{\xi} \leq \text{máx}((1 - m)x_k^e, x_{\text{mín}}) \\ x_k^e (B_k^e)^{\xi} & \text{si } \text{máx}((1 - m)x_k^e, x_{\text{mín}}) \leq x_k^e (B_k^e)^{\xi} \leq \text{mín}((1 + m)x_k^e, x_{\text{máx}}) \\ \text{mín}((1 + m)x_k^e, x_{\text{máx}}) & \text{si } x_k^e (B_k^e)^{\xi} \geq \text{mín}((1 + m)x_k^e, x_{\text{máx}}) \end{cases} \quad (25)$$

Donde m es el límite del movimiento, en la mayoría de los casos $m=0.2$ (Bendsoe). El valor de m se encuentra en el intervalo entre 0 y 1, ($0 < m < 1$).

El multiplicador de Lagrange debe satisfacer la restricción de volumen. Entonces, el valor de λ es actualizado entre cada una de las iteraciones utilizando su definición, esto es:

$$V - fV_0 = 0$$

Pero el volumen en cada iteración es función de la variable de diseño (la cual es a su vez función del multiplicador de Lagrange), por lo cual se obtiene (26) (observar la figura 3):

$$g(\lambda) = V(x(\lambda)) - fV_0 \quad (26)$$

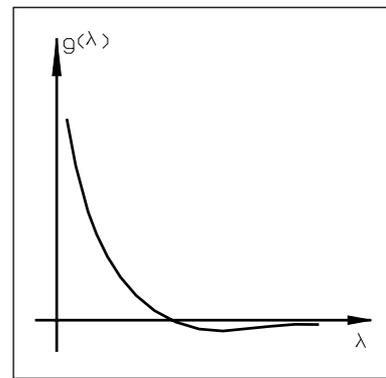


Fig. 3. Comportamiento de la función $g(\lambda)$. Esta función actualiza el valor del multiplicador de Lagrange.

III. Aspectos de la Optimización Topológica aplicada al modelo de regeneramiento óseo

El objetivo de la optimización topológica es hallar la distribución de material en un componente estructural, de tal suerte que se obtenga una representación de sus densidades como mapa a seguir para el diseño.

El proceso de regeneramiento óseo guarda una profunda relación con la optimización topológica para nuevos desarrollos terapéuticos en el área de la rehabilitación. Es así como la posible recuperación de tejidos atrofiados puede llevarse a cabo gracias a la terapia con la ubicación estratégica de cargas hasta alcanzar estados finales óptimos.

A. Biomecánica

El tejido óseo es una compleja estructura que se encuentra en constante remodelamiento para adaptarse a las condiciones actuales de carga. Normalmente, los huesos

muestran trazados específicos de la distribución de densidades y la orientación del material. El hueso puede redistribuir su material para alcanzar la máxima resistencia y el mínimo de masa?, la respuesta en general es NO; sin embargo, esquemas clásicos de análisis de regeneramiento óseo se basan en señales de error que optimizan el tejido.

Se puede argumentar que en general el hueso no sigue un procedimiento de optimización topológica, esto se debe a que existen cargas instantáneas que modifican su distribución de material. Sin embargo, el procedimiento descrito aquí se constituye en una aproximación al comportamiento ante cargas estáticas.

El tejido del hueso es modelado mediante la homogenización de la densidad de energía de deformación como un material isotrópico.

De hecho, el hueso, de forma global, cambia su comportamiento de isotropismo gracias a la orientación de los osteones (Sistemas de Havers) en dirección de los esfuerzos para soportar eficientemente las cargas. Por ejemplo, el fémur alinea sus unidades celulares con el eje del hueso para soportar las cargas de compresión debidas al peso corporal. ¿Es posible que la existencia de cargas diferentes al peso (en diferentes direcciones) orienten los osteones en otro sentido o en múltiples direcciones para conformar el hueso como un material isotrópico? La respuesta es desconocida. Se sabe que el ambiente de microgravedad afecta la constitución ósea produciendo una pérdida excesiva de calcio (vía orina), lo que modifica el comportamiento mecánico del hueso; sin embargo, el tiempo de estancia no ha sido tal, para llevar a cabo una remoción total del material para observar la orientación de las nuevas células.

B. Modelo isotrópico

El modelo requiere conocer el tensor de elasticidad que contiene las características de rigidez del material a optimizar, el tejido. Estos modelos son denominados SIMP² (por sus siglas en inglés), los cuales utilizan factores de penalización.

El modelo isotrópico del tejido óseo considera las siguientes variables: (27)

$$\begin{aligned} a) & k(E_{ijkl}^e) = x_e^p k(E_{ijkl}^0) \\ b) & p > 1 \\ c) & \sum_{e=1}^N x_e V_e \leq V \\ d) & 0 \leq x_e \leq 1, \forall e = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (27)$$

Donde x_e es la densidad relativa para el elemento e que va de 1 hasta N . Esta "densidad" se constituye en la variable de diseño. Observando la ecuación (27c), se reconoce que la suma de los volúmenes parciales de los ele-

mentos optimizados no puede superar al volumen inicial del componente. Por su parte, E_{ijkl} es el tensor de propiedades elásticas del material, el cual constituye el tensor (matriz) de rigidez obtenida en el análisis de elementos finitos.

Los modelos biomecánicos del tejido trabecular consideran material isotrópico, calculando su optimización mediante SIMP con $p=3$, con lo cual se garantiza que la densidad relativa toma valores extremos de 0 ó 1. El tejido trabecular es considerado como un material compacto que tiene propiedades isotrópicas e iguales en todo ser humano. Este tejido conforma el hueso esponjoso. Por otro lado, algunos investigadores (Huiskes, Cowin) consideran que el hueso compacto tiene las mismas propiedades microestructurales del hueso trabecular, pero su conformación global macroscópica es "altamente" densa, razón por la cual se utiliza el modelo isotrópico.

Entonces, el modelo de optimización topológica isotrópica con penalización para el hueso se reduce a: (28)

$$\begin{aligned} \text{Minimizar :} & C = [F]^T [U] \\ \text{Sujeto a :} & f = \frac{V}{V_0} \\ & 0 < x_{\min} \leq x^e \leq x_{\max} \\ & [F] = [K][U] \\ & \sum_{e=1}^N x_e V_e \leq V \end{aligned} \quad (28)$$

Donde

$[F]$: es el vector de fuerzas externas globales sobre el hueso.

$[U]$: Es el vector de desplazamientos.

V, V_0 : Son el volumen actualizado e inicial, respectivamente.

X^e : Es la variable de diseño.

La ecuación (28) establece la minimización y homogenización de la densidad de energía de deformación en el tejido con propiedades isotrópicas. Bajo estas condiciones se obtiene la solución heurística: (29)

$$x_{k+1}^e = x_k^e \left(\frac{p(x_k^e)^{p-1} u^e k_0(E_{ijkl}^0) u^e}{\lambda V^e} \right)^\xi = x_k^e (B_k^e)^\xi \quad (29)$$

Donde:

p : Es el factor de penalización.

ξ : Es el factor de amortiguamiento de la iteración.

$k_0(E_{ijkl}^0)$: Es el tensor de rigidez que es función del tensor de elasticidad.

K : Es el subíndice que indica el conteo de la iteración.

2 Solid Isotropic Material With Penalization.

$$x_{k+1}^e = \begin{cases} \text{máx}((1-m)x_k^e, x_{\text{mín}}) & \text{si } x_k^e (B_k^e)^\xi \leq \text{máx}((1-m)x_k^e, x_{\text{mín}}) \\ x_k^e (B_k^e)^\xi & \text{si } \text{máx}((1-m)x_k^e, x_{\text{mín}}) \leq x_k^e (B_k^e)^\xi \leq \text{mín}((1+m)x_k^e, x_{\text{máx}}) \\ \text{mín}((1+m)x_k^e, x_{\text{máx}}) & \text{si } x_k^e (B_k^e)^\xi \geq \text{mín}((1+m)x_k^e, x_{\text{máx}}) \end{cases} \quad (30)$$

También, para estabilizar la iteración, se mueven los límites de la variable de diseño, con el objetivo de evitar grandes variaciones entre iteraciones. Esto es, se sigue el algoritmo: (30)

Donde m es un control del movimiento de la frontera entre cada una de las iteraciones.

La solución se lleva a cabo mediante rutinas de elementos finitos hasta llegar a la convergencia de la variable x_e .

C. Modelo anisotrópico

Para materiales anisotrópicos, el tensor de rigidez es función de las variables geométricas sobre las cuales se dan las direcciones de esfuerzo, esto es: (31)

$$\begin{aligned} &\text{Variables geométricas } \mu_e, \gamma_e, \dots, \text{ ángulo } \theta \\ &E_{ijkl}(x_e, \vec{r}) = E_{ijkl}^H(\mu_e, \gamma_e, \dots, \theta_e) \\ &\text{Densidad del material } x_e = x_e(\mu_e, \gamma_e, \dots, \theta_e) \\ &\sum_{e=1}^N x_e V_e \leq V; \quad 0 \leq x_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (31)$$

Donde E_{ijkl}^H es el tensor de elasticidad anisotrópico que es obtenido vía homogeneización de la energía de deformación, la cual es función de la densidad relativa (variable de diseño) y de la posición r en donde se encuentra ubicado el elemento finito. En este caso, la optimización depende del ángulo de rotación de la anisotropía θ , por lo cual entra en el análisis como una variable de diseño. Los valores μ , γ , etc., son constantes del material a optimizar (por ejemplo, relación de Poisson, etc.).

El método es implementado de forma similar que para el de materiales isotrópicos, teniendo en cuenta que: primero, se debe generar una base de datos de las propiedades del material como función de las variables de diseño, y segundo, la respuesta debe contener información respecto del ángulo de rotación.

El modelo es presentado a continuación. En el marco de referencia de un material anisotrópico se tiene la relación esfuerzo deformación (2D) dada por $\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$, donde las componentes E_{1111} , E_{2222} , E_{1122} y E_{1212} , son las únicas componentes diferentes de cero en el tensor E_{ijkl} . Asumiendo que $E_{1111} \leq E_{2222}$, y considerando que el tensor de deformación ϵ_{kl} es dado, se llega a la siguiente ecuación de densidad de energía de deformación (32):

$$C = \frac{1}{2} [E_{1111} \epsilon_{11}^2 + E_{2222} \epsilon_{22}^2 + 2E_{1122} \epsilon_{11} \epsilon_{22} + 4E_{1212} \epsilon_{12}^2] \quad (32)$$

Expresando las deformaciones en términos de las deformaciones principales ϵ_I y ϵ_{II} , y asumiendo que $\zeta \epsilon_I \zeta^3 \zeta \epsilon_{II} \zeta$ se tiene (33):

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{2} [(\epsilon_I + \epsilon_{II}) + (\epsilon_I - \epsilon_{II}) \cos 2\psi] \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{2} [(\epsilon_I + \epsilon_{II}) - (\epsilon_I - \epsilon_{II}) \cos 2\psi] \\ \epsilon_{12} &= -(\epsilon_I - \epsilon_{II}) \sin 2\psi \end{aligned} \quad (33)$$

Donde ψ es el ángulo de rotación del marco relativo al marco de las deformaciones principales³.

Entonces, el modelo a optimizar está dado por: (34)

$$\begin{aligned} \text{Minimizar :} & \quad C = W(E, U) \\ \text{Sujeto a :} & \quad f = \frac{V}{V_0} \\ & \quad 0 < x_{\text{mín}} \leq x^e \leq x_{\text{máx}} \\ & \quad \sum_{e=1}^N x_e V_e \leq V \end{aligned} \quad (34)$$

$$\therefore W(E, U) = E_{ijpq}(x_e, r) \epsilon_{ij}(U) \epsilon_{pq}(U)$$

D. Modelo viscoelástico

La optimización topológica no se “debe” aplicar a un modelo de viscoelasticidad porque:

1. El modelo viscoelástico considera el tiempo, mientras la optimización topológica considera un estado de dominio homogéneo y un estado objetivo, que son independientes del tiempo (pero dependientes de la iteración).
2. El modelo viscoelástico considera el factor de amortiguamiento, lo cual no tiene sentido en un análisis atemporal.
3. La velocidad de deformación no interviene en el análisis por las razones 1 y 2.

IV. Conclusiones

La optimización topológica es una técnica novedosa que busca establecer la uniformidad de la energía de deformación en un dominio de diseño que tiene como condi-

³ El ángulo ψ define las direcciones principales de deformación, de forma similar al análisis mediante círculo de Mohr.

ciones de borde: cargas y restricciones de movimiento. La técnica se basa en la maximización de la resistencia y la minimización de masa en el elemento analizado.

Dicho esquema ha sido utilizado convenientemente en el análisis del proceso de remodelamiento óseo, lo cual se presentará en artículos posteriores.

III. Bibliografía

- [1] Beer, F.; Johnston, E., *Mecánica de materiales*, Ed. McGrawHill, México, Cuarta edición, 1993.
- [2] Campo, O., "Análisis de esfuerzos en la interfase implante cemento - hueso (ICH) en una endoprótesis típica de cadera", *Revista El Hombre y la Máquina* N° 16, México, 1999.
- [3] Cowin, Stephen (editor). *Bone Mechanics Handbook*. CRC Press Boca Raton (E.U.A), segunda edición, 2001.
- [4] Doblaré, M., et al. "Simulación del proceso de migración en prótesis de cadera mediante un modelo 3d de elementos finitos con rozamiento", *Métodos Numéricos en Ingeniería V (SEMNI)*, Madrid, quinta edición, 2002.
- [5] Duda, George N.; Schneider, Erich.; Chao, Edmund, "Internal Forces And Moments in the Femur During Walking", *J. Biomechanics*, Elsevier Science Ltd., Londres, Vol. 30, N° 9, pp. 933-947, 1997.
- [6] Fernandes, Paulo.; Ruben, Rui, "Optimización de forma de prótesis de articulación de la cadera", *Métodos Numéricos en Ingeniería V (SEMNI)*, Madrid, tercera edición, 2002.
- [7] Flinn, Richard, Trojan, Paul. *Materiales de ingeniería y sus aplicaciones*, Ed. McGrawHill, México, tercera edición, 1991.
- [8] Fondrk, M.T.; Bahniuk, E.H.; Davy, D.T., "A Damage Model for Nonlinear Tensile Behavior of Cortical Bone". *J. Biomechanical Engineering*, Transactions of the ASME, Nueva York, Vol. 121, pp. 533-541, 1999.
- [9] Gannong, William, *Fisiología Médica*, Ed. El Manual Moderno, México, décima edición, 1986.
- [10] Harris, William.; Sledge, Clement, "Total Hip and Total Knee Replacement", *The New England Journal of Medicine*, E.U.A., Vol. 323, N° 11, pp. 725-731, 1990.
- [11] Jacobs, C.; Simo, Juan et al. "Adaptative Bone Remodeling Incorporating Simultaneous Density And Anisotropy Considerations", *J. Biomechanics*, Elsevier Science Ltd., Londres, Vol. 30, N° 6, pp. 603-617, 1997.
- [12] Keyak, Joyce et al., "Prediction of Femoral Fracture Load Using Automated Finite Element MODELING", *J. Biomechanics*, Elsevier Science Ltd., Londres, Vol. 21, pp. 125-133, 1997.
- [13] Sigmund, Ole, "A 99 Line Topology Optimization Code Written In Matlab", *Revista Structure Optimization*, Springer Verlag, Vol. 21, pp. 120-127, Lyngby, 2001.

Programa de Investigación sobre Adquisición y Análisis de Señales PAAS-UN



El Programa de Investigación PAAS-UN, ha venido estudiando desde 1982 la caracterización espacial y temporal de fenómenos de perturbación e Interferencia Electromagnética debida a procesos naturales (Rayos) o artificiales (armónicos, sags, swells, transitorios). Actualmente se está organizando el III Simposio Internacional sobre Calidad de la Energía Eléctrica – SICEL 2005, los días 16,17 y 18 de noviembre en Bogotá. Más información www.paas.unal.edu.co/sicel2005/

El Grupo PAAS-UN se encuentra ubicado en Bogotá en la Cra. 50 No. 27 – 70, Unidad Camilo Torres Bloque B5 Of. 401. Si desea ampliar esta información puede consultar la página web www.paas.unal.edu.co o comunicarse al teléfono 3165000 ext: 18426/25 o al fax 3165488.