Aplicación de la Programación Lineal en Transporte

Por: SERGIO GAMBOA (U. Industrial de Santander)

1. Introducción

El presente problema es la determinación del costo mínimo de transporte de la fábrica de muebles Almeyda e Hijos Ltda. de Bucaramanga la cual se encuentra actualmente en periodo de ensanche; y es su deseo estudiar el costo del transporte al instarar otra fábrica en Bogotá y operar en el pais con el sistema de depositos en las ciudades de Barranquilla, Medellin, Cali y Cúcuta. Antes de entrar a analizar los diferentes tópicos del problema es importante traer a cuento lo que podría llamarse la iniciación de la programación lineal.

A fines del siglo XVIII el conde Luis de la Grange estableció la famosa teoría de los multiplicadores que permiten resolver teoricamente el siguiente problema de optimación.

$f(x_1,x_2,\dots x_n)$ óptimo con las restricciones

$g_1(x_1,x_2,\dots x_n)=0$

$g_2(x_1,x_2,\dots x_n)=0$

$\dots \qquad g_p(x_1,x_2,\dots x_n)=0$

Años más tarde el barón Joseph de Fourier resolvió el problema:

$$\lambda_{OP}=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

sometido a las restricciones:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_i \geq e_j \qquad \text{con } x_i \geq 0$$

Despues de la segunda guerra mundial, es decir casi dos siglos despues, nació la teoría llamada teoría de la programación lineal que en realidad es un caso particular de la teoría de Lagrange y que en su forma particular fue tratada por Fourier.

Más tarde Borel, Ville y Newman dieron gran impulso a esta teoría con la demostración de teoremas importantes sobre la forma dual y sobre la existencia del óptimo.

Hacia los años de 1947 apareció el método llamado simplex encontrado por el americano Danzing que no es otra cosa que un algoritmo de cálculo que permite llegar a la solución más rapidamente que los anteriores.

En la aplicación de esta teoría de la programación lineal a el problema del transporte, que es el objeto de este trabajo, apareció ligado al método simplex el llamado método de la esquina noroeste, el cual permite, alcanzar rapidamente la solución del problema pero teniendo en cuenta que su fundamento teorico se basó en la teoría de los multiplicadores de Lagrange.

El presente problema será resulto por los método simplex y el método de la esquina noroeste dejando los métodos de Fourier y de Lagrange debido a que el primero presenta sus restricciones en forma de desigualidades lo que haría la solución para el problema del transporte demasiado complejo ya que este problema presenta sus restricciones , en forma de igualidades; y el método de Lagrange nos traería a solucionar un sistema condicionado de n ecuaciones lo que para este problema sería muy largo.

2. Hipotesis

1) Determinación del precio de la tonelada/kilometro. (Es de notar que no se contabiliza la tonelada como peso sino como volumen).

Un camion de 6 T transporta de Bogotá a Barranquilla las 6 T de muebles (en volumen) por \$ 8.500.00 incluido el embalaje. Esto da por tonelada \$ 1.416.66 y teniendo en cuenta que la distancia es de 1.407 km. nos da un precio de 1.01. Tomando un 25% por seguros, deterioro de la mercancia e imprevisto nos da como precio de la tonelada-kilometro \$ 1.25.

2) Determinación del stok por almacén.

La producción total de las fábricas durante el año para entregar a los depositos se estima en 2.300 toneladas (volumen) distribuidas en 1.300 para la fábrica de Bogotá y 1.000 para la de Bucaramanga.

Este volumen de producción se repartió proporcionalmente al número de habitantes de las ciudades de Barranquilla, Medellin, Cali y Cúcuta según los datos estadisticos siguientes:

Barranquilla	520.000	Habitantes
Medellin	780.000	"
Cali	820.000	"
Cúcuta	150.000	"

Correspondiendo de esta forma a

Barranquilla	500	Toneladas (volumen)
Medellin	800	"
Cali	850	"
Cúcuta	150	"

3) Determinación de los costos por tonelada/kilometro.

El costo de Tonelada/kilometro de Bogotá a:

Barranquilla	1407 km.	$1.25	$1.758.75
Cali	508 km.	$1.25	635.00
Medellin	572 km.	$1.25	715.00
Cúcuta	690 km.	$1.25	862.50

de Bucaramanga a:

Barranquilla	1127 km.	$ 1.25	$ 1.408.75
Cali	978 km.	$ 1.25	$ 1.222.50
Medellin	1042 km.	$ 1.25	$ 1.302.50
Cúcuta	220 km.	$ 1.25	$ 275.00

4) Determinación del cuadro del costo por tonelada/kilometro

	B/quilla	Cali	Medellin	Cúcuta
Bogotá	1.758.75	635	715	862.50
Bucaramanga	1.408.75	1.222.50	1.302.50	275

2. MODELO MATEMATICO

a) Notaciones

x_{ij} = Número de toneladas enviadas de la ciudad i al deposito j.

$i = 1,2$ respectivamente Bogotá y Bucaramanga.

$j = 1,2,3,4$, respectivamente Barranquilla, Cali, Medellin y Cúcuta.

C_{ij} = Precio por Tonelada/kilometro del costo del transporte de la fábrica i al almacén j.

P_{ij} = Vectores correspondientes a la fila i y a la columna j.

b) Planteamiento del sistema a solucionar.

Se quiere minimizar:

$$\lambda = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{4} C_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

1. $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1.300$
2. $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1.000$
3. $x_{11} + x_{21} = 500$
4. $x_{12} + x_{22} = 850$
5. $x_{13} + x_{23} = 800$

3. Justificación de las t restricciones 4, 3 y 5 son simplemente la traducción de la hipótesis 2.

   Las restricciones 1 y 2 son simplemente la traducción del estimativo de producción en las fábricas de Bogotá y Bucaramanga resp.

4. Solución del método matemático.

   a) Solución por el método de la esquina noroeste.

   1º) Cuadro general de origenes y destinos:

DESTINOS

i \ j	1	2	3	4	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	1300
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	1000
	500	850	800	150	

2º) Determinación del cuadro de costos por tonelada/kilometro dentro de las notaciones del modelo matemático especificado anteriormente.

i \ j	1	2	3	4
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}

METODO DE LA ESQUINA NOROESTE

CUADRO 1 - A Destinos

i \ j	1	2	3	4	
1	0	850	300	150	1300
2	500	0	500	0	1000
	500	850	800	150	

CUADRO 1 - B

i \ j	1	2	3	4	
1	+1	850	300 + 1 299	150	1300
2	500 - 1 499	0	500 + 1 501	0	1000
	500	850	800	150	

$\delta_1 = +C_{11} - C_{13} + C_{23} - C_{21}$ $\delta_1 = 937.50 > 0$ no se considera

CUADRO - 1 - C

i \ j	1	2	3	4	
1	0	850 − 1 849	300 + 1 301	150	1300
2	500	+1	500 − 1 499	0	1000
	500	850	800	150	

$\delta_1 = C_{22} - C_{12} + C_{13} - C_{23}$ $\delta_1 = 0$ No presenta variación en el cuadro intermedio.

CUADRO 1 - D

i \ j	1	2	3	4	
1	0	850	300 + 1 301	150 − 1 149	1300
2	500	0	500 − 1 499	+1	1000
	500	850	800	150	

$\delta_1 = +C_{24} - C_{14} + C_{13} - C_{23} = \delta_1 = -1175 < 0$. Aumentamos x_{24} al máximo posible +150 para obtener el máximo.

CUADRO 2 - A

i \ j	1	2	3	4	
1	0	850	450	0	1300
2	500	0	350	150	1000
	500	850	800	150	

CUADRO 2 - B

i \ j	1	2	3	4	
1	+ 1	850	450 − 1 449	0	1300
2	500 − 1 499	0	350 + 1 351	150	1000
	500	850	800	150	

$\delta_1 = +C_{11} - C_{13} + C_{23} - C_{21}$ $\delta_1 = 937.50 > 0$ no se considera.

Cuadro 2 - C

i \ j	1	2	3	4	
1	0	850 - 1 849	450 + 1 451	0	
2	500	+1	350 - 1 351	150	

$\delta_1 = C_{22} - C_{12} + C_{13} - C_{23}$ $\delta_1 = 0$. No presenta variación.

i \ j	1	2	3	4	
1	0	850	450 - 1 449	+1	1300
2	500	0	350 + 1 349	150 - 1 149	1000
	500	850	850	150	

$\delta_1 = C_{14} - C_{24} + C_{23} - C_{13}$ $\delta_1 = 1175 > 0$; no se considera.

Por lo tanto el cuadro 2A da solución al problema, pero debido a que el cuadro intermedio no presenta variación para δ no encontramos en un caso de degeneración local la cual da soluciones para x_{22} desde 0.350 con las correspondientes variaciones en el cuadro interior.

SOLUCION LIMITES DEL PROBLEMA

de Bogotá a :

	Solución A	Solución B
Barranquilla	0	0
Cali	850	500
Medellin	450	800
Cúcuta	0	0

De Bucaramanga a :

	Solución A	Solución B
Barranquilla	500	500
Cali	0	350
Medellin	350	0
Cúcuta	150	150

METODO SIMPLEX

CUADRO I

			1758.75	635.00	715.00	862.50	1408.75	1222.50	1302.50	275.00
	x_o	C_{ij}	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
P_2	850	635.00	1	1	0	0	0	0	0	-1
P_3	300	715.00	1	0	1	0	0	-1	0	-1
P_4	150	862.50	-1	0	0	1	0	1	0	2
P_5	500	1408.75	1	0	0	0	1	0	0	0
P_7	500	1302.50	-1	0	0	0	0	1	1	1
z_j			-1175	-	-	-	-	227.50	-	1402.50

CUADRO II

			1758.75	635.00	715.00	862.50	1408.75	1222.50	1302.50	275.00
	x_o	C_{ij}	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
P_2	850	635.00	1/2	1	0	1/2	0	1/2	0	0
P_3	450	715.00	1/2	0	1	1/2	0	-1/2	0	0
P_8	150	275.00	-1/2	0	0	1/2	0	1/2	0	1
P_5	500	1408.75	1	0	0	0	1	0	0	0
P_7	350	1302.50	-1/2	0	0	-1/2	0	1/2	1	0
z_j			-463.75	-	-	-701.25	-	-473.75	-	-

$$\theta_4 = \frac{150}{2} = 75 \qquad \theta_7 = \frac{500}{1}$$

θ_4 igual a 75 mínimo positivo por lo tanto introducimos en la base el vector P_8 y sacamos el vector P_4.

--- --- ---

O lo que el cuadro II nos da la solución del problema; la que concuerda con la obtenida por el método de la esquina noroeste.

Valor de λ mínimo:

$$\lambda_{min} = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{4 \\ i=2}} C_{ij} X_{ij}$$

$$= C_{12} x_{12} + C_{13} x_{13} + C_{21} x_{21} + C_{23} x_{23} + C_{24} x_{24} = 2.063.000.$$

5. Concluciones

El resultado obtenido nos fija claramente que las cantidades x_{11}, x_{14} x_{21}, x_{24} son fijas pero en cambio el costo no presenta variación en el cuadro interior para x_{22} comprendido entre 0 y 350, cncluido con las respectivas variaciones para x_{12}, x_{13} y x_{23} en cada una de las variaciones de x_{22} lo que nos permite determinar estas variables por medio de otras restricciones de caracter interno únicamente.

Aunque este resultado nos dio solamente valores fijos para x_{11}, x_{14}, x_{21}, y x_{24} esto nos permite obtener un ahorro considerable.

La consideración exhaustiva de los factores que influyen en el costo del transporte, el control estadistico y la determinación de nuevas restricciones matemáticas, entre los parámetros nos permitirá obtener resultados más halagueños.

6. BIBLIOGRAFIAS

(1) Dantzing C B. Maximization of linear funtion of varaables.

(2) Saul L Gass, Programación Lineal

(3) Sasieni, Yaspan and Friedman Operation Research.

(4) Willard C.J. Iniciation a la programation linearie. Centre de Documentation Universitaire.