

# ACERCA DE LA EXISTENCIA DEL FENOMENO DE HURST

Germán Poveda

Oscar J. Mesa

Postgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos  
Universidad Nacional de Colombia, Medellín

## Resumen

Se presenta una revisión de la paradoja conocida en hidrología como el fenómeno de Hurst. Se presentan los distintos enfoques que se han planteado para tratar de explicarla: un efecto pre-asintótico, no estacionariedad y memoria infinita en las series temporales de registros geofísicos. En este trabajo se plantea y se somete a prueba una hipótesis alterna: la estimación incorrecta del exponente de Hurst. Los diferentes estimadores que se han presentado en la literatura se evaluaron mediante un proceso no estacionario con exponentes de Hurst conocidos. Adicionalmente, mediante resultados obtenidos con el teorema funcional del límite central se diseñó una prueba estadística para determinar si una serie temporal exhibe el fenómeno de Hurst. Los resultados obtenidos muestran que la mayoría de las series temporales analizadas no presentan el fenómeno de Hurst, si se considera su definición más precisa.

## INTRODUCCION

El fenómeno de Hurst puede señalarse como el problema no resuelto más importante de la hidrología estocástica. Desde los trabajos originales de Hurst (1951) hasta hoy han proliferado los artículos en las revistas especializadas, se han dividido los hidrólogos en escuelas en torno a distintas interpretaciones sobre el problema, se han otorgado a trabajos sobre el tema los premios más importantes que la comunidad hidrológica ofrece, la discusión ha trascendido hasta campos de la estadística y probabilidad interesando a personalidades de la talla de Feller (1951) y ha contribuido al desarrollo de una de las temáticas más en boga últimamente en matemáticas y física: los fractales, popularizados por Mandelbrot (1983).

Sin embargo, en hidrología aunque la discusión continúa, casi que está agonizante. Las distintas escuelas fueron incapaces de convencer a sus oponentes y el problema dejó de ser productivo. Desde el punto de vista práctico se diluyó la importancia. La motivación original de Hurst (1951) relativa al dimensionamiento de la capacidad de embalses fue resuelta sin necesidad de descifrar la paradoja teórica. Se concluyó que sólo en casos muy precisos y escasos es necesario tener en cuenta este fenómeno en los problemas prácticos (Klemes, et al, 1981). No sin olvidar que aun continúan apareciendo estudios que demuestran la necesidad de considerar cuidadosamente el modelamiento hidrológico

y que inequívocamente señalan las repercusiones prácticas y económicas de distintas opciones (Mejía y Millán, 1982; Zapata, 1987). Pero, como se mostrará más adelante, implícito en dichos estudios hay una confusión entre el efecto económico de la persistencia hidrológica y el fenómeno de Hurst.

Es desconcertante también cómo a pesar del interés inicial ya señalado, en el ámbito de la estadística y la probabilidad, el problema dejó de ser de actualidad. Citando un comentario casual de un distinguido estadístico al ser informado e interrogado sobre el problema se puede ilustrar la reacción generalizada; su respuesta fue inmediata: "eso no puede estar bien planteado". Tal vez esta despreocupación sea justificada, como podrá interpretarse de las conclusiones del presente trabajo.

En realidad, sería bastante triste que después de 40 años y de todo el esfuerzo invertido se llegara ahora a concluir que el fenómeno de Hurst proviene de un planteamiento incorrecto del problema. Pero como siempre, los hechos son tercos y no se compadecen de la buena voluntad. Además en el proceso, hay que reconocerlo, la hidrología se ha modernizado bastante y el fenómeno de Hurst ha sido un factor significativo en ello, contribuyendo fundamentalmente a la introducción de las técnicas estadísticas y operacionales.

En este trabajo se examina esta posibilidad. Las sospechas que motivaron la hipótesis de que el problema

estaba mal planteado son múltiples, pero no es posible entrar en detalles sin definir de manera precisa lo que es el fenómeno de Hurst y sin hacer un recuento de los distintos enfoques. El Capítulo 2 contiene dicha revisión bibliográfica.

Dada la motivación anterior, es claro que el problema se centra en la construcción de un mecanismo o prueba de hipótesis que permita definir inequívocamente la existencia o no del fenómeno de Hurst. El desarrollo de esta prueba de hipótesis es la contribución más importante de este trabajo.

La discusión acerca de los anteriores análisis es presentada en el Capítulo 4, considerando los diversos argumentos a favor y en contra. A pesar de que la longitud de algunas de las series analizadas no permite conclusiones definitivas, se puede demostrar la inexistencia del fenómeno de Hurst para la mayoría de las series estudiadas y en los casos restantes se abre la posibilidad de distintas interpretaciones, todas especulativas y sin base experimental, fundamentadas en distintas concepciones ideológicas.

Esto constituye un medio excepcional para insistir en algunos aspectos filosóficos de la modelación estocástica en hidrología que son presentados en el Capítulo final.

## ANTECEDENTES

### Definición

El fenómeno de Hurst apareció en el contexto del diseño de la capacidad de almacenamiento de un embalse destinado a regular los aportes naturales de un río para diversos propósitos. El trabajo de Hurst (1951) abordó este problema en la forma que se presenta a continuación.

Sea  $X_t$ ,  $t=1,2,\dots,n$  una secuencia de variables aleatorias que representa los aportes naturales del río al embalse, durante el  $t$ -ésimo intervalo de tiempo (año). Se define la Suma Acumulada de los ingresos Previos  $S_t$  como

$$S_t = S_{t-1} + X_t, \text{ para } t=1,\dots,n, \quad (1)$$

$$S_0 = 0 \quad (2)$$

Si se estudia la operación del embalse durante  $n$  intervalos de tiempo, dada la serie de aportes del río  $X_t$ , se puede observar que los niveles máximo ( $M_n$ ) y mínimo ( $m_n$ ) alcanzados por el embalse, son respectivamente

$$M_n = \text{Máx}(0, S_1, S_2, \dots, S_n) \quad (3)$$

y

$$m_n = \text{mín}(0, S_1, S_2, \dots, S_n) \quad (4)$$

A partir de estos parámetros se define el Rango,  $R_n$  como

$$R_n = M_n - m_n \quad (5)$$

Si los aportes al embalse están "ajustados" por un porcentaje  $\alpha$  de la media muestral, que puede interpretarse como el desembalse deseado para cada período de tiempo, es decir un nivel de regulación que se le asigna al embalse, se define la Suma Acumulada de los Ingresos Ajustados,  $S_t^*$ , como

$$S_t^* = S_{t-1} - \alpha \bar{X}_n, \text{ para } t=1,\dots,n, \quad (6)$$

$$S_0^* = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (7)$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (8)$$

Obsérvese que es posible escribir la ecuación (6) cuando  $\alpha = 1$ , como

$$S_t^* = \sum_{i=1}^t X_i - \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (9)$$

En forma análoga, los valores máximo ( $M_n^*$ ) y mínimo ( $m_n^*$ ) de estas sumas son, respectivamente

$$M_n^* = \text{Max}(0, S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*) \quad (10)$$

y

$$m_n^* = \text{mín}(0, S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*) \quad (11)$$

A partir de éstos se define el Rango Ajustado,  $R_n^*$ , como

$$R_n^* = M_n^* - m_n^* \quad (12)$$

El parámetro  $R_n^*$  puede interpretarse como el volumen de almacenamiento mínimo que debe tener un embalse ideal para que:

- Suministre un caudal regulado igual a la media de los caudales del río, sin incurrir nunca en déficit, con  $\alpha = 1$  en la ecuación (6).
- No presente vertimientos.
- El volumen almacenado al final de los  $n$  períodos sea igual al volumen del almacenamiento inicial.

Este concepto de embalse ideal es retrospectivo ya que cuando se conocen los aportes al embalse, éstos ya no tienen utilización para propósitos de diseño, sin embargo Hurst (1951) consideró que  $R_n^*$  podía proporcionar una idea del tamaño del embalse formado por los aportes hidrológicos  $X_t$ .

En la Figura 1 se puede observar el significado de la  $t$ -ésima Suma Acumulada Ajustada,  $S_t^*$ ; la máxima suma parcial,  $M_n^*$ ; la mínima suma parcial,  $m_n^*$  y el Rango Ajustado,  $R_n^*$ .

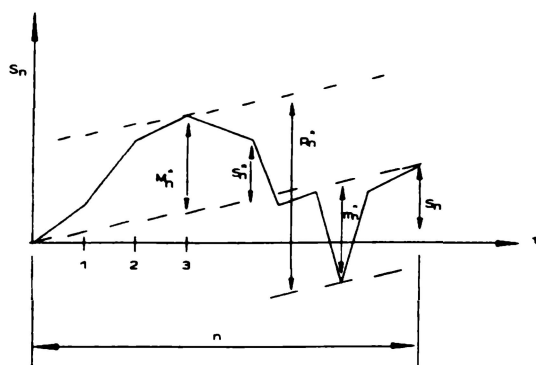


FIGURA 1. Representación de  $S_t^*$ ,  $M_n^*$ ,  $m_n^*$  y  $R_n^*$

El trabajo original de Hurst (1951) se interesó en estudiar la relación existente entre el Rango Ajustado,  $R_n^*$ , la variabilidad de los aportes  $X_t$  ( $t=1, 2, \dots, n$ ), expresada por su desviación típica  $d_n$  y el número  $n$  de años de registro. Para ello trabajó con el Rango Ajustado Reescalado,  $R_n^{**}$  definido como

$$R_n^{**} = \frac{R_n^*}{d_n} \quad (13)$$

Es decir que estaba interesado en analizar el comportamiento de  $R_n^{**}$  vs.  $n$ . La escasez de series de tiempo muy extensas de caudales de ríos, lo condujo a examinar series de otros fenómenos geofísicos tales como precipitación, temperatura, presión atmosférica, espesor de anillos de árboles, espesor de estratos de lodo, número de manchas solares, etc. En total utilizó los registros de 690 series cronológicas de 75 fenómenos diferentes, para los cuales encontró la relación empírica

$$R_n^{**} \propto n^h \quad (14)$$

Es decir que  $R_n^{**}$  crece en forma exponencial a la potencia  $h$ , la cual en adelante se denominará como el exponente de Hurst. De manera que la ecuación (14) se puede plantear como

$$R_n^{**} = an^h \quad (15)$$

Hurst planteó la siguiente relación para los fenómenos estudiados

$$R_n^{**} = \left(\frac{1}{2}n\right)^K, \quad (16)$$

en donde  $K$  representa su estimador del exponente  $h$ , y lo calculó para cada serie como

$$K = \frac{\log R_n^{**}}{\log(n/2)} = \frac{\log R_n^* - \log d_n}{\log n - \log 2} \quad (17)$$

Los valores de  $K$  obtenidos para las series geofísicas fueron: 0,72 para la media, 0,092 para la desviación estándar y un rango de valores entre 0,46 y 0,96. Lo anterior llevó a Hurst a escribir la ecuación (16) como

$$R_n^{**} = \left(\frac{n}{2}\right)^{0,72} = 0,61 n^{0,72} \quad (18)$$

Como se mencionó, Hurst (1951) extendió su análisis del estudio teórico de  $R_n^{**}$  al caso de procesos de variables independientes con distribución Normal, utilizando la teoría de la caminata aleatoria aplicada al lanzamiento de una moneda, para los cuales encontró el valor esperado.

$$E(R_n^*) \sim \sigma \left( \frac{n}{2} \pi \right)^{0.5} \quad (19)$$

Sabiendo que  $\sigma$  tiende a  $d_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene

$$E(R_n^{**}) \sim \left( \frac{n}{2} \pi \right)^{0.5} \sim 1,2533 n^{0.5} \quad (20)$$

El símbolo  $\sim$  indica una igualdad asintótica, es decir que la razón entre los dos lados de las ecuaciones (19) y (20), es igual en el límite a la unidad cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Feller (1951) interesado por los resultados de Hurst, estudió el comportamiento asintótico de  $R_n^*$  y  $R_n^{**}$ , para procesos de variables aleatorias independientes, continuas e idénticamente distribuidas (Normal, aunque precisó que podría ser cualquier tipo de distribución), con valor esperado nulo y varianza finita  $\sigma^2$ . Mediante la teoría del movimiento Browniano demostró que  $R_n^*/d_n^{0.5}$  converge en distribución a una variable aleatoria, casi seguramente (con probabilidad uno) diferente de cero, cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Demostó que la distribución asintótica y los dos primeros momentos estadísticos de  $R_n^*$  son respectivamente

$$f(x) = xg''(x) + \sum_{k=2}^{\infty} [2k(k-1)[g'((k-1)x) - g'(kx)] + (k+1)^2 xg''[(k-1)x] + k^2 xg''(kx)] \quad (21)$$

$$E(R_n^*) \sim \sigma \left( \frac{n}{2} \pi \right)^{0.5} \quad (22)$$

y

$$Var(R_n^*) \sim \sigma^2 \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} \right) n \quad (23)$$

Las ecuaciones (19) de Hurst y (22) de Feller son iguales y obtenidas por caminos diferentes. Obsérvese que a partir de las ecuaciones (22) y (23) se obtiene

$$E(R_n^{**}) \sim \left( \frac{n}{2} \pi \right)^{0.5} \sim 1,2533 n^{0.5} \quad (24)$$

$$Var(R_n^{**}) \sim \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} \right) n \sim 0.0744 n \quad (25)$$

La discrepancia entre el resultado promedio obtenido por Hurst,  $K = 0,72$ , para los fenómenos geofísicos y el valor de  $h = 0,5$  deducido teóricamente para variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, es lo que se ha llamado el fenómeno de Hurst.

Recientemente se han presentado nuevas formulaciones del fenómeno en el contexto de la teoría de procesos estocásticos, así:

- Se define que un proceso estocástico  $X_n$  posee el fenómeno de Hurst para el Rango Ajustado Reescalado,  $R_n^{**}$  si la secuencia  $R_n^{**}/n^h$ , con  $h > 0,5$  converge en distribución a una variable aleatoria límite que posiblemente es degenerada, pero casi seguramente (con probabilidad uno) es diferente de cero, cuando  $n \rightarrow \infty$  (Battacharya et al, 1983).
- Se define que un proceso estocástico  $X_n$  exhibe el fenómeno de Hurst en  $R_n^{**}$ , si  $E(R_n^{**})/n^h$ , con  $h$  mayor que 0,5, converge a una constante diferente de cero cuando  $n \rightarrow \infty$  (Ballerini y Boes, 1985).

La primera definición está dada en términos de una convergencia en distribución, mientras que la segunda utiliza la convergencia de un primer momento. En este trabajo se considera la primera de ellas, pues la convergencia de la varianza es importante.

## ENFOQUES DEL PROBLEMA

Fundamentalmente se han utilizado cuatro argumentos diferentes para tratar de explicar el origen del fenómeno de Hurst en las series de tiempo geofísicas: la estructura de correlación, el comportamiento transitorio pre-asintótico, la no estacionariedad en la media de los procesos geofísicos y el efecto de variables aleatorias con segundo momento infinito.

Estructura de correlación. Dado que para procesos independientes se demostró que  $h = 0,5$  las primeras miradas del problema sugirieron que el fenómeno de Hurst se explicaba debido a la estructura de correlación (memoria) de los procesos geofísicos. En este enfoque se incluye la persistencia, la memoria corta y la memoria infinita.



- **Persistencia.** Las series hidrológicas presentan una característica conocida como la persistencia, que se manifiesta en el hecho que a valores altos de la variable hidrológica (caudales) tienden a seguir valores altos y similarmente para los valores bajos, lo cual significa algún tipo de dependencia entre las realizaciones de los procesos hidrológicos. Fue el mismo Hurst (1951) quien postuló la hipótesis de la persistencia como la razón del origen del fenómeno, ya que implica que no hay independencia física ni estadística.
- **Memoria corta. Dependencia Markoviana.** Feller (1951) atribuyó la existencia del fenómeno de Hurst a la estructura de dependencia markoviana de los procesos geofísicos. Este tipo de dependencia se caracteriza por presentar una función de autocorrelación que decae muy rápidamente en el tiempo y por tanto se dice que poseen una memoria corta. Sin embargo, Barnard (1956) indicó que para procesos markovianos es válida la ecuación asintótica.

$$E(R_n^{**}) \sim an^{0.5} \quad (26)$$

Mandelbrot y Wallis (1968) puntualizaron que para todos los procesos pertenecientes al dominio de atracción Browniano el exponente  $h$  converge al valor de 0,5 en forma asintótica, cuando  $n \rightarrow \infty$ . Sobre este enfoque se destaca el resultado del trabajo de Matalas y Huzzen (1967) mediante simulación de secuencias de 10.000 variables de un proceso markoviano con distribución Normal y para diferentes valores de  $\rho$  (coeficiente de correlación serial de primer orden), estimaron el exponente  $h$  a la manera de  $K$  (ecuación 17) y obtuvieron valores entre 0,58 y 0,87.

- **Memoria Larga. Dependencia Infinita.** Se trata de la hipótesis que atribuye la existencia del fenómeno de Hurst a una supuesta memoria larga que poseen los fenómenos geofísicos. Esta hipótesis ha sido respaldada por modelos operacionales de procesos estocásticos estacionarios que yacen por fuera del dominio de atracción Browniano (Mandelbrot y Van Ness, 1968; Mandelbrot y Wallis, 1968 y 1969a) que producen un exponente  $h$  de Hurst, típicamente  $0,5 < h < 1$ , y que se caracterizan por tener una función de autocorrelación que decae muy lentamente en el tiempo.

Los modelos planteados se han llamado: movimiento fraccional Browniano (mfB) y su análogo en tiempo discreto, el ruido fraccional Gaussiano.

Mandelbrot y Wallis (1969a) desarrollaron experimentos de simulación con este último tipo de modelo y estimaron el exponente  $h$  como la pendiente de la regresión  $\log n$  vs  $\log R_n^{**}$  ("diagramas-pox"), con los cuales obtuvieron resultados aceptables en cuanto a reproducir el valor de  $h$  escogido.

Esta hipótesis ha sido objeto de una larga y a veces agria controversia entre aquellos que la respaldan y los que sostienen la hipótesis de la memoria corta de los procesos hidrológicos. Por una parte lo que significa este tipo de dependencia en las realizaciones de los procesos y por otra parte la influencia de utilizar uno u otro tipo de modelos en los análisis de simulación y optimización de sistemas de recursos hidráulicos.

Scheidegger (1970) y Klemes (1974) rechazaron la utilización de este tipo de modelos para representar las series de tiempo geofísicos y los consideraron completamente injustificados desde el punto de vista físico. Y McLeod y Hipel (1978) demostraron que los modelos de rfG no se ajustan de manera adecuada a las series históricas de caudales anuales de algunos ríos.

**Efecto transitorio. Comportamiento pre-asintótico.** Esta segunda hipótesis sobre la existencia del fenómeno de Hurst, está basado en el hecho que el resultado teórico de  $h = 0,5$  se presenta asintóticamente cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por ello, algunos autores han postulado que los valores de  $h > 0,5$  simplemente reflejan un comportamiento pre-asintótico del Rango Ajustado Reescalado,  $R_n^{**}$  en los valores pequeños de  $n$ . Esto quiere decir que transitoriamente se da un valor de  $h > 0,5$ , aunque en forma asintótica se obtiene  $h = 0,5$ .

Esta hipótesis ha tenido dos tipos de enfoque sobre el comportamiento pre-asintótico de  $R_n^{**}$ : Estadístico y Físico.

- **Pre-asintótico Estadístico.** Este enfoque niega la existencia del fenómeno de Hurst en las series geofísicas y atribuye la discrepancia encontrada al hecho de que las series con las cuales trabajó Hurst, no son suficientemente largas para poder estimar un valor de  $h = 0,5$ . Lloyd (1967) planteó

inicialmente esta hipótesis al señalar que la convergencia de  $h$  al valor de  $h = 0,5$  puede ser extremadamente lenta.

Salas y Boes (1974) demostraron la naturaleza transitoria de la ecuación general para  $E(R_n^{**})$  y propusieron un estimador de  $h$  diferente.

Gomide (1975 y 1978) respaldó esta hipótesis al apoyarse en el análisis del Rango condicionado,  $cR_n^{**}$  ( $R_n^{**}$  tal que  $S_n = 0$ ) para procesos con una estructura de correlación markoviana. Allí demostró que los registros de Hurst caen en la misma región transitoria de los coeficientes de correlación ( $\rho$ ) típicos de los modelos markovianos y atribuyó la desviación de  $h > 0,5$  al drástico incremento de la región transitoria con el aumento de  $\rho$ .

Los trabajos de Troutman (1976 y 1978) y Siddiqui (1976) apoyan esta hipótesis. A partir de resultados obtenidos mediante la utilización del teorema funcional del límite central, demostraron que  $R_n^{**}/n^{1/2}$  de todos los procesos que pertenecen al dominio de atracción Browniano convergen en distribución a una variable aleatoria cuya media y varianza son conocidas y que dependen de la estructura de correlación del proceso.

Este enfoque también está respaldado por los trabajos de Salas et al (1979a y b), en los cuales utilizaron modelos ARMA (1,1) y señalaron que todos los datos utilizados por Hurst caen en la región transitoria para la cual  $h > 0,5$ . Los mismos autores demostraron que este comportamiento pre-asintótico también se manifiesta en procesos independientes y que la región transitoria puede extenderse debido a tres causas: distribuciones marginales asimétricas, estructura de dependencia y no estacionariedad en la media de los procesos.

Esta hipótesis ha sido rechazada como explicación del fenómeno de Hurst por autores como Jackson (1975) al considerar que algunas de las series con las cuales trabajó Hurst (Río Nilo, Estratos de Lodó, Anillos de árboles) son de longitud suficientemente larga para poder obtener valores de  $h = 0,5$ .

Los experimentos de simulación de Wallis y Matalas (1970) con diversos modelos de rfG tienden a descartar esta hipótesis al obtener rápidamente el valor de  $h$  asignado al modelo,

estimado de una manera que se presentará más adelante.

Mandelbrot y Wallis (1968) rechazaron esta hipótesis al criticar la "inmerecida importancia que se le da a los tamaños de las series disponibles actualmente".

- Pre-asintótico Físico. Este enfoque acepta la existencia del fenómeno de Hurst en las series geofísicas, de tal manera que para propósitos de simulación de tales series, se utilizan modelos que producen un exponente  $h > 0,5$  en forma pre-asintótica, pero que cuando  $n \rightarrow \infty$ , producen un  $h = 0,5$ .

Es el caso de los llamados modelos de Línea Quebrada (Rodríguez-Iturbe et al, 1972; Mejía et al, 1972) y de la utilización que hace O'Connell (1974) de los modelos ARMA (1,1) para "preservar" el fenómeno de Hurst.

Como se sabe, estos dos tipos de procesos poseen una función de autocorrelación que es sumable y por lo tanto pertenecen al dominio de atracción Browniano, entonces inequívocamente tienen un valor de  $h = 0,5$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , o si se quiere, estos procesos presentan convergencia en la distribución de  $R_n^{**}$  con una media y una varianza asintótica cuyos valores son conocidos.

## PROCESOS NO ESTACIONARIOS EN LA MEDIA

Una tercera hipótesis atribuye el origen del fenómeno de Hurst a que los procesos geofísicos son no estacionarios en la media, es decir, procesos cuya tendencia central crece o decrece con el tiempo, o bien, presenta cambios abruptos. En algunas series de registros geofísicos han sido detectados diferentes tipos de no estacionariedad (Chin, 1976; Potter, 1979 y 1976).

La primera referencia a esta hipótesis la dio el propio Hurst (1957), quien intentó reproducir los resultados obtenidos con las series geofísicas. Para ello elaboró un complicado experimento con "cartas de probabilidad" que presentaban cambios abruptos en la media, y al generar series largas obtuvo un diagrama de la relación  $\log R_n^{**}$  vs  $\log n$  con un valor de  $K = 0,71$  (ecuación 17).

Klemes (1974) y Potter (1975) desarrollaron modelos operacionales con diferentes tipos de no estacionariedad en la media, que reprodujeron valores del exponente de Hurst mayores de 0,5 en todos los casos.

Boes y Salas (1978) desarrollaron un modelo de niveles (medias) móviles que preserve el fenómeno de Hurst en forma pre-asintótica ya que posee la estructura de correlación de un modelo ARMA (1.1).

Battacharya et al (1983) demostraron que el fenómeno de Hurst se presenta en forma asintótica en un proceso  $X(n)$  de variables aleatorias independientes, o débilmente dependientes, con alguna tendencia monotónica, expresada como

$$X(n) = Y(n) + c(m+n)^{\beta}, \quad (27)$$

en la cual  $Y(n)$  es una secuencia estacionaria de variables aleatorias i.i.d. con media cero y varianza uno,  $c$  y  $m$  son constantes enteras. Demostraron que asintóticamente cuando  $n \rightarrow \infty$  se conoce el valor de  $h$  dependiendo del valor de  $\beta$  así

$$\begin{aligned} -\infty < \beta \leq -0,5 & \rightarrow h=0,5 \\ 0,5 < \beta < 1 & \rightarrow h=1 + \beta \\ \beta = 0 & \rightarrow h=0,5 \\ \beta > 0 & \rightarrow h=1 \end{aligned}$$

Tal relación se puede apreciar en la Figura 2.

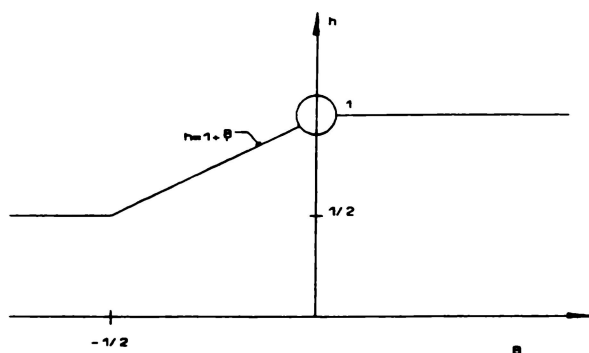


FIGURA 2. Relación  $\beta$  vs  $h$  (Tomado de Battacharya et al 1983)

## SEGUNDO MOMENTO INFINITO

Moran (1964) y Boes y Salas (1973) han considerado la posibilidad de que el fenómeno de Hurst se deba a variables aleatorias independientes con segundo momento infinito. Sin embargo, Mandelbrot y Taqqu

(1979) mostraron que para una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas pertenecientes al dominio de atracción de un proceso estable con índice entre cero y dos, tiene lugar una relación como la (14) con exponente  $h = 1/2$  y por lo tanto no exhiben el fenómeno de Hurst. También estudios de simulación con v.a. independientes con distribución estable de índice  $\gamma = 1.3$  desarrollados por McLeod y Hipel (1978) dieron valores de  $R_n^{**}$  casi iguales a los de v.a. independientes con distribución Normal, lo que sugiere un comportamiento de  $E(R_n^{**}) \sim n^{0,5}$  aunque  $E(R_n) \sim n^{0,77}$  y  $E(R_n^*) \sim n^{0,77}$  en este caso, según Boes y Salas (1973).

## ESTIMACION

### Justificación

Después de tantos esfuerzos, de tanta gente brillante que ha considerado el problema, hay que tener una buena justificación para retomarlo. Existe una serie de sospechas que en conjunto conforman un cuadro que se podría catalogar como clínico y que sugiere un diagnóstico. Aunque esto se sale del ámbito del problema mismo y pertenece al espacio las motivaciones personales, metacientíficas e ideológicas, tal vez sea ilustrativo enumerar estas sospechas:

- La gran mayoría (con una sola excepción) de los estimadores del exponente  $h$  de Hurst son sesgados con sobreestimación (Wallis y Matalas, 1970; Poveda, 1987).
- La varianza de los estimadores casi nunca ha sido considerada y por tanto, no hay ninguna cuantificación de las variaciones muestrales (Poveda, 1987).
- Hay estudios en los que se presentan estimados del exponente  $h$  de Hurst significativamente mayores de 0,5 a pesar de que corresponden a muestras tomadas de procesos markovianos para los cuales se sabe que asintóticamente  $h = 0,5$ . (Matalas y Huzzen, 1967).
- El resultado teórico contenido en el teorema funcional del límite central (Ibragimov, 1962; Billingsley, 1968) no se refiere al exponente  $h$  sino a la convergencia en distribución de  $R_n^{**}/n^{0,5}$  a una variable aleatoria con distribución conocida, para una familia bastante grande de procesos

estocásticos estacionarios, los pertenecientes al dominio de atracción Browniano. Este aspecto ha sido soslayado en la mayoría de las investigaciones.

La omnipresencia o ubicuidad del problema es al menos llamativa. En efecto, el fenómeno de Hurst se ha "observado" en registros geofísicos de diversa índole, lluvias, caudales, espesor de estrato de lodo, niveles de ríos, manchas solares, etc. y en series un poco más mundanas como los resultados de partidos de fútbol, el tiempo de reinado de los faraones de Egipto, la edad de los reyes de Europa, etc.

Las excepciones teóricas conocidas a la ley de exponente 0,5 se refieren a procesos con memoria infinita (correlograma no sumable) de difícil justificación física (Klimes, 1974) o a procesos no estacionarios. (Battacharya et al, 1983). Esta segunda explicación, aunque físicamente más plausible, también choca con el hecho de que una diversidad de fenómenos muy grande presenta un exponente  $h$  muy estable, cercano a 0,72. Esto implicaría tendencias semejantes en por ejemplo los niveles máximos del Río Nilo y las edades de las familias reales en Europa, lo cual sería bastante extraordinario.

Este conjunto de razones fue conformando una hipótesis de trabajo que se quiso verificar, la hipótesis referente a que el rompecabezas del fenómeno de Hurst no obedecía a un correcto planteamiento, pues si los datos se analizaron juiciosamente se llegaría a la inexistencia del fenómeno de Hurst en las series geofísicas analizadas normalmente para ilustrarlo. Esta hipótesis requiere entonces de un medio de comprobación o de falsificación. Dicho procedimiento se describe en este capítulo. No se insistirá en la importancia de la formulación y prueba de hipótesis en el proceso investigativo. Como siempre, gran parte del trabajo de solución de un problema está contenido en la formulación misma.

#### ESTIMADORES DEL EXPONENTE $h$ DE HURST

Inicialmente el exponente  $h$  de Hurst se estimó mediante el parámetro  $K$  en la expresión (17), desarrollada por Hurst. Rápidamente se reconoció lo inadecuado de hacer pasar la recta en papel logarítmico por el punto  $n=2, R_n^{**} = 1$ . Wallis y Matalas (1970) introdujeron la regresión mínimo cuadrática para estimar la pendiente de la recta en dicho espacio:  $\log R_n^{**}$  vs  $\log n$ .

El diagrama que contiene el logaritmo del rango ajustado reescalado  $R_n^{**}$  contra el logaritmo de  $n$  se ha denominado como el diagrama "POX" según Mandelbrot y Wallis (1969b).

Estos diagramas permitían comparaciones visuales con la pendiente teórica de 0,5. Conviene notar que pequeños cambios en el exponente  $h$  tienen efectos significativos en  $n^h$  para  $n$  grande y que el análisis no se refiere a una corrección insignificante. Un inconveniente inevitable de la estimación del fenómeno de Hurst se refiere a que aunque lo que se busca estimar es la pendiente o exponente asintótica ( $n$  muy grande) toda muestra por grande que sea su longitud  $n_0$ , contiene sólo una observación de  $R_n^{**}$ , dos de  $R_{n_0/2}$  y así sucesivamente, siendo siempre menor el número de observaciones mientras mayor sea  $n$  ( $1 \leq n \leq n_0$ ). Esta circunstancia lleva a que en una regresión se le dé mejor peso a las observaciones de  $R_n^{**}$  para  $n$  menor que para  $n$  grande, contradiciendo el carácter asintótico del resultado teórico. Esto puede dar lugar a una serie de variantes en la estimación mínimo cuadrática de la pendiente.

En el trabajo de Poveda (1987) se encuentra un muy amplio detalle sobre estas variantes.

Gomide (1975) en un trabajo que es precursor en muchos aspectos, propone un estimador que se aleja de la filosofía mínimo cuadrática.

Siddiqui (1976) plantea un estimador de  $h$  válido para todos los procesos pertenecientes al dominio de atracción Browniano (de memoria corta) para los cuales se tiene  $h = 0,5$  asintóticamente.

Diversos estimadores de  $h$  que se han planteado en la literatura han sido sometidos a prueba (Poveda, 1987) utilizando para ello el modelo no estacionario (con tendencia) de Battacharya et al (1983) que permite conocer de antemano el valor asintótico de  $h$  de acuerdo al valor de la tendencia  $\beta$  (ecuación 27). Se simuló dos series de 20.000 términos con dos grupos de parámetros  $c$  y  $m$ ; el primero para valores de  $\beta = -1,0; -0,5; -0,4; -0,3; -0,2; -0,1; 0$  y  $0,5$  con  $c = 1,0$  y  $m = 1000$  y el segundo con  $c = 3,0$  y  $m = 0$ . Los resultados obtenidos indicaron que el valor asintótico de  $h$  se alcanza después de un intervalo transitorio que para el primer grupo de parámetros  $c$  y  $m$  llega hasta  $n = 2500$  y para el segundo grupo es variable.

En la Tabla 1 se presentan los diferentes estimadores evaluados con el primer grupo de parámetros para  $\beta = -0,3$ . Allí se observa que se obtiene el valor de  $h = 0,7$

con el estimador 16, definido como la pendiente mínimo-cuadrática de la relación  $\log R_n^{**}$  vs  $\log n$ , tomando los valores de  $n$  de mayor a menor, de valores de  $n \geq 2500$ . En la Figura 3 se observa tal conclusión, que para todos los valores de  $\beta$  y por tanto de  $h$ , respalda fuertemente la hipótesis pre-asintótica del fenómeno de Hurst.

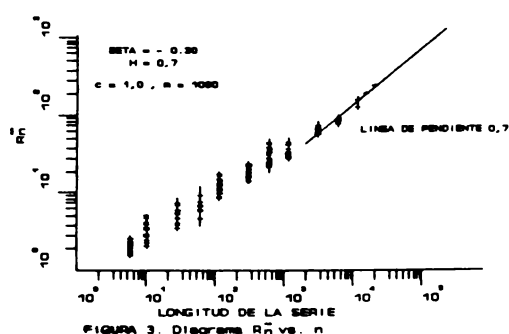


FIGURA 3. Diagrama  $R_n$  vs.  $n$

## REFORMULACION BASADA EN EL TEOREMA FUNCIONAL DEL LIMITE CENTRAL

Como ya se mencionó, la formulación del fenómeno de Hurst de acuerdo con el teorema funcional del límite central, se basa en la convergencia de la distribución de  $R_n^{**}/n^h$ , con  $h > 0,5$ , a la distribución de una variable aleatoria límite que posiblemente es degenerada, pero con probabilidad uno es diferente de cero. Análogamente, el fenómeno no existe si la distribución de  $R_n^{**}/n^{0,5}$  converge a la distribución de una variable aleatoria, cuya media y varianza son conocidas, cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Este tipo de enfoque del problema permite verificar o rechazar la existencia del fenómeno de Hurst en cualquier serie geofísica, considerando el comportamiento de la distribución de la variable  $R_n^{**}/n^{0,5}$  con  $n$ , que se puede visualizar en los

TABLA 1. Estimadores de  $h$   
 $\beta = -0,3$ ;  $h = 0,7$ ;  $c = 1,0$ ;  $m = 1.000$

n	Hurst (1951)			Wallis y Matalas (1970) Estimador 6	Gomide (1975) Estimador 7	Estimador 14	Estimador 15	Estimador 16
	Estimador 1	Estimador 2	Estimador 3					
5	0,482	0,706	0,717	-	0,134	0,268	0,573	0,541
10	0,680	0,678	0,690	0,654	0,377	0,384	0,553	0,537
25	0,617	0,647	0,657	0,622	0,414	0,445	0,532	0,536
50	0,751	0,628	0,637	0,604	0,560	0,467	0,521	0,536
100	0,704	0,613	0,620	0,589	0,549	0,477	0,512	0,540
250	0,544	0,599	0,605	0,576	0,479	0,488	0,497	0,551
500	0,565	0,590	0,594	0,566	0,466	0,491	0,505	0,576
1000	0,594	0,572	0,575	0,551	0,502	0,485	0,551	0,626
2500	0,577	0,554	0,556	0,535	0,497	0,478	0,662	0,709
5000	0,541	0,547	0,547	0,522	0,471	0,476	0,797	0,800
10000	0,571	0,563	0,564	0,525	0,504	0,497	0,826	0,792
15000	0,586	0,586	0,586	0,537	0,520	0,520	0,453	0,453
20000	0,581	0,581	0,581	0,542	0,518	0,518	-	-

NOTA: la descripción de estos estimadores del exponente  $h$  puede consultarse en Poveda (1987).  
AVANCES EN RECURSOS HIDRAULICOS Número 0 1991

denominados "diagramas GEOS" (Poveda, 1987), así: Si una serie geofísica exhibe el fenómeno de Hurst, presentará un diagrama "GEOS" de la forma:

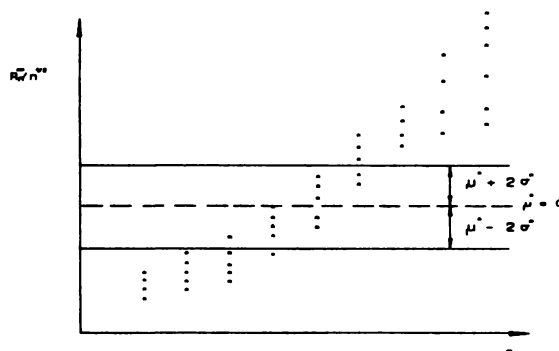


FIGURA 4. Diagrama "GEOS" si se presenta el fenómeno de Hurst.

Obsérvese que en la Figura 4 se ha indicado el intervalo  $\mu \pm 2\sigma$  de la distribución asintótica teórica de la variable  $R_n^{**}/n^{0.5}$  correspondiente a un proceso cualquiera de memoria corta ajustado a la serie geofísica. Los valores muestrales cruzarán de largo a través del intervalo señalado, debido a que no se escala adecuadamente el valor de  $R_n^{**}$ . A su vez si tal serie no exhibe el fenómeno su diagrama "GEOS" será de la forma ilustrada en la Figura 5.

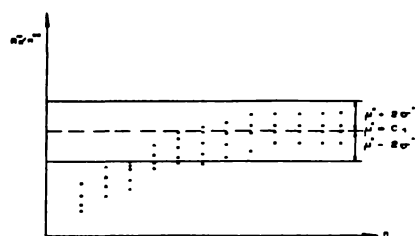


FIGURA 5. Diagrama "GEOS" si no existe fenómeno de Hurst.

También es posible verificar el comportamiento de  $R_n^{**}/n^h$  ( $h > 0,5$ ) a través de los diagramas "GEOS-h". Si una secuencia exhibe el fenómeno de Hurst presentará un diagrama "GEOS-h" de la forma descrita en la Figura 6.

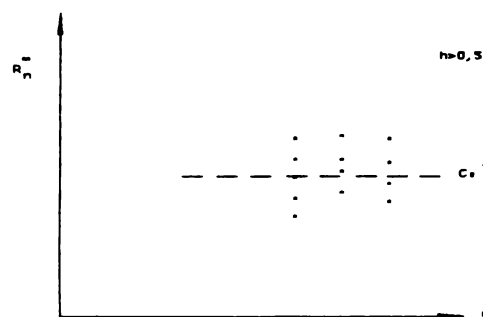


FIGURA 6. Diagrama "GEOS-h" si existe el fenómeno de Hurst.

Por otro lado, si una serie geofísica no exhibe el fenómeno de Hurst presentará un diagrama "GEOS-h", ( $h > 0,5$ ) que tiende a cero en media y varianza como se muestra en la Figura 7.

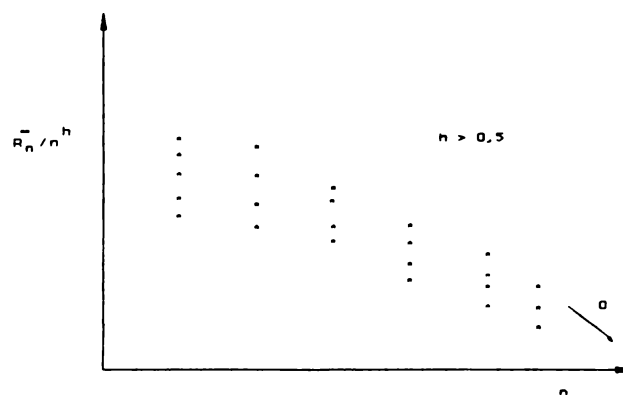


FIGURA 7. Diagrama "GEOS-h" si no existe el fenómeno de Hurst.

Este comportamiento de los diagramas "GEOS" ( $R_n^{**}/n^{0.5}$  vs  $n$ ) y "GEOS-h" ( $R_n^{**}/n^h$  vs  $n$ , con  $h > 0,5$ ) permitió efectuar pruebas de hipótesis sobre la convergencia de tales valores de las series geofísicas a su distribución asintótica teórica. Para ello se utilizaron los resultados ya citados sobre el teorema funcional del límite central sobre la distribución asintótica exacta de  $R_n^{**}/n^{0.5}$  en procesos de memoria corta, cuya media ( $\mu$ ) y desviación típica ( $\sigma$ ) se pueden escribir como (Siddiqui, 1976, Troutman, 1978)

$$\mu^* = E \left( \frac{R_n^*}{n^{0.5}} \right) \sim \left( \theta \frac{\pi}{2} \right)^{0.5} \quad (28)$$

y

$$\sigma^* = \left[ \text{Var} \left( \frac{R_n^*}{n^{0.5}} \right) \right]^{1/2} \sim \left[ \theta \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} \right) \right]^{1/2} \quad (29)$$

donde  $\theta$  es la escala de fluctuación, un parámetro como (Taylor, 1921; Vanmarcke, 1983):

$$\theta = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) d\tau \\ \lim_{T \rightarrow \infty} T \Gamma(T) \\ \pi g(0) \end{cases} \quad (30)$$

En donde  $\rho$  es el coeficiente de correlación,  $\Gamma$  es la función de varianza de los promedios locales y  $g(0)$  es la función de densidad espectral de área unitaria evaluada en cero. La escala de fluctuación,  $\theta$ , es finita para procesos en el dominio de atracción de lo Browniano. Así por ejemplo, para el caso de modelos ARMA (p,q) se tiene

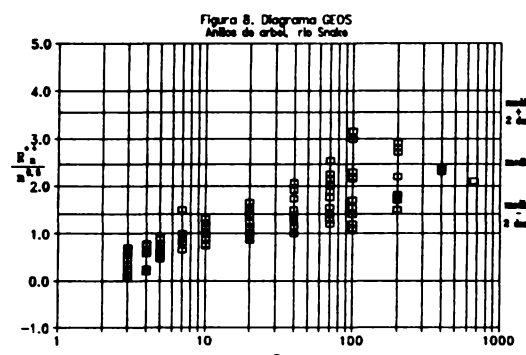
$$\mu^* \sim \left( \frac{\pi}{2} \right)^{0.5} \frac{1}{[\gamma(0)]^{1/2}} \frac{\left( 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j \right)}{\left( 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i \right)} \quad (31)$$

y

$$\sigma^* \sim \left[ \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{[\gamma(0)]^{1/2}} \frac{\left( 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j \right)}{\left( 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i \right)} \right]^{1/2} \quad (32)$$

donde  $\gamma(0)$  es la varianza y los  $\theta$ 's y  $\phi$ 's son los parámetros del proceso.

Para verificar el comportamiento de  $R_n^{**}/n^{0.5}$  con las series geofísicas se utilizaron modelos de memoria corta ARMA (p,q) ajustados por Hipel y McLeod (1979) a una gran cantidad de series geofísicas extensas. Los resultados que se obtuvieron mostraron que para la gran



mayoría de las series estudiadas no hay razón para pensar en la existencia del fenómeno de Hurst, pues el diagrama "GEOS" presenta valores muestrales de  $R_n^{**}/n^{0.5}$  en el Rango teórico asintótico del modelo de memoria corta ajustado.

De las diferentes series se escogió la Figura 8 que representa el diagrama "GEOS" para la serie de los anillos de un abeto en la cuenca del Río Snake (EE.UU), en el cual se observa un comportamiento de la clara convergencia hacia los valores asintóticos teóricos de la distribución de  $R_n^{**}/n^{0.5}$  del modelo de memoria corta ajustado.

Estos resultados concuerdan con la estimación del exponente  $h$  de Hurst para tales series propuestas por Siddiqui (1976) mediante

$$SH = \frac{\log R_n^{**} - \log \mu^*}{\log n} \quad (33)$$

en donde  $\mu^*$  está dado por la ecuación (31). En la Tabla 2 se presentan los resultados de dicha estimación, confrontados con

los valores  $SH'$  calculados por Hipel y McLeod (1978). Allí puede observarse que los valores de  $SH$  no difieren significativamente del valor teórico de  $h = 0.5$ . Los valores de  $SH < 0.5$  significan que el valor de  $R_n^{**}/n^{0.5}$  para el mayor valor de  $n$ , está por debajo de la media asintótica  $\mu^*$  y viceversa para los valores de  $SH > 0.5$ .

A partir de estos resultados se concluye que el fenómeno de Hurst no existe para las 23 series geofísicas ya mencionadas, con longitudes que van desde los 96 a los 1164 años. Esto a pesar de que los estimadores

TABLA 2. Coeficiente h de Hurst propuesto por Siddiqui (1976)

Código	n	SH	SH' (Según Hipel y Mcleod,1978)
Mstouis	96	0,451	0,591
Neumunas	132	0,499	0,591
Danubio	120	0,495	0,495
Rhin	150	0,484	0,484
Ogden	97	0,436	0,929
Gota	150	0,504	0,636
Española	350	0,455	0,927
Temp	255	0,521	0,640
Precip	100	0,473	0,473
Minimum	848	0,462	0,746
Snake	669	0,475	0,663
Exshaw	506	0,420	0,580
Naratama	515	0,435	0,543
Dell	655	0,475	0,667
Lakeview	544	0,449	0,706
Ninemile	771	0,466	0,642
Eaglecol	858	0,485	0,701
Navajo	700	0,468	0,584
Bryce	625	0,513	0,727
Tioga	661	0,498	0,691
Bigcone	509	0,404	0,691
Whitment	1164	0,530	0,623

tradicionales del exponente h indican que  $h > 0,5$ . Para algunas de las series (estratos de lodos) sin embargo, el diagrama "GEOS" continúa ascendiendo sin estabilizarse, aunque por debajo del nivel medio  $E(R_n^{**}/n^{0,5})$  calculado según el modelo de memoria corta (ARMA) ajustado. Esto admitiría dos interpretaciones opuestas: la muestra no es lo suficientemente larga y de serlo el diagrama "GEOS" se estabilizará dentro del rango de confiabilidad predicho por la teoría asumiendo memoria corta ( $h = 0,5$ ); o por el contrario puede

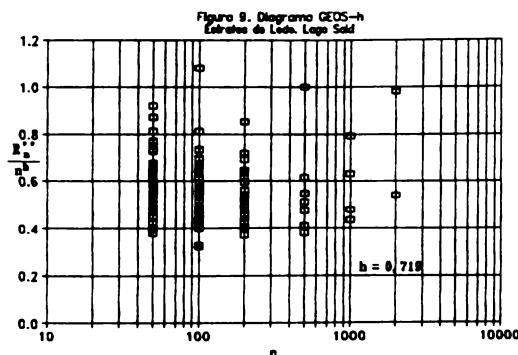
asumirse que el crecimiento observado continuará indefinidamente, como resultado del fenómeno de Hurst ( $h > 0,5$ ). Como puede verse, ambas interpretaciones son especulativas.

El análisis del comportamiento de  $R_n^{**}/n^h$ , con  $h > 0,5$ , a través de los diagramas "GEOS-h" busca dilucidar la anterior disyuntiva. Se utilizarán valores de h estimados por mínimos cuadrados. Se observó una especie de estabilización de  $R_n^{**}/n^h$  para los estratos de lodo (ver Figura 9), lo que podría conducir a pensar que este tipo



de registros geofísicos realmente poseen el fenómeno de Hurst, lo cual exigiría una explicación particular. Sin embargo, aún en este caso subsiste el interrogante.

El comportamiento preasintótico de  $R_n^{**}/n^{0.5}$  se puede deducir a partir de algunos procesos de memoria corta (Gomide, 1975; Hipel y McLeod, 1978, Troutman, 1976). De allí se concluye que la convergencia al valor límite es más lenta mientras mayor sea la persistencia, medida por el parámetro  $\theta$  en la ecuación (30). Además, se sabe (ecuación 28) que el valor límite es mayor cuando hay mayor persistencia.



Estudio adicional de la distribución de  $R_n^{**}$  o al menos de  $E(R_n^{**})$  para valores finitos de  $n$  en procesos de memoria corta podría aportar argumentos convincentes en la anterior discusión.

Como puede observarse, la escala de fluctuación es mucho más pertinente de estimar que el exponente  $h$  de Hurst. Dicho con otras palabras, el coeficiente resultó ser más importante que el exponente.

Al respecto, conviene anotar que los modelos de memoria larga ajustados de acuerdo a estimaciones mínimo cuadráticas del exponente  $h$  de Hurst predicen correlogramas bastante distantes de los correlogramas empíricos (ver McLeod y Hipel, 1978; Poveda, 1987).

Está claro que las pruebas de hipótesis efectuadas sobre el comportamiento de los valores de  $R_n^{**}/n^{0.5}$  y de  $R_n^{**}/n^h$  ( $h > 0.5$ ), no profundizan en los aspectos técnicos de esas pruebas, tales como los intervalos de confianza, la confiabilidad o nivel de significancia en la estimación de  $\theta$  la cual se hace mediante un estimador y no con el valor poblacional, pero sin embargo todo se enmarca dentro de la filosofía general de una prueba de hipótesis en estadística, cuyos detalles pueden ser trabajados.

## CONCLUSIONES

El aporte básico de este trabajo es que presenta una metodología inequívoca para determinar si una secuencia cronológica suficientemente larga presenta el fenómeno de Hurst. El procedimiento se apoya en el resultado teórico del teorema funcional del límite central (Ibragimov, 1962; Billingsley, 1968) y su simplicidad sorprende que no hubiera sido empleado antes y que se hubiera creado tanta confusión con estimaciones del exponente  $h$  de Hurst.

Un parámetro importante involucrado en la anterior metodología es la escala de fluctuación,  $\theta$ , que se define como la suma de la función de correlación y análogamente en términos de la función de varianza y de la función de densidad espectral de área unitaria, y por lo tanto es una buena medida del grado de persistencia presente en la serie. En la nueva perspectiva aquí presentada, la escala de fluctuación se convierte en el sustituto del exponente  $h$  de Hurst y su adecuada modelación tiene importantes repercusiones prácticas (ver Vanmarcke, 1983). De hecho, casi todas las implicaciones prácticas del llamado fenómeno de Hurst son realmente consecuencias de la necesidad de modelar un parámetro de persistencia adecuado.

De la aplicación de la metodología aquí propuesta se deduce que no existe el fenómeno de Hurst para la mayoría de las series geofísicas largas tradicionalmente usadas para ilustrar el fenómeno. Subsiste alguna duda sobre un conjunto pequeño de series, todas relativas a espesores de estratos de lodo. Sin embargo, se puede afirmar que no hay evidencia empírica real que indique la existencia del fenómeno de Hurst en las series analizadas. El desarrollo histórico de las ideas sobre el particular, ha conducido a miradas cargadas, que buscan el fenómeno de Hurst. Es bien sabido que sólo se ve lo que se quiere ver. Por eso, lo más natural y lógico, dada la evidencia empírica, los resultados teóricos y la interpretación física de las causas atribuidas al fenómeno de Hurst sería no sospechar siquiera de la violación del exponente 0,5. Inclusive, la tardanza para que enfoques tan simples y naturales como el aquí presentado hayan aparecido es una evidencia que señala la carga presente en las miradas anteriores al problema.

Al respecto, conviene comentar acerca de la filosofía subyacente en la práctica extendida de modelar el hasta ahora llamado fenómeno de Hurst con modelos de memoria corta: Modelo de la Línea Quebrada (Mejía, et al, 1972) o los modelos ARMA (O'Connell, 1974). Aunque desde el punto de vista práctico probablemente

se esté utilizando la herramienta correcta, la razón es tal vez errónea. De hecho, en esta nueva perspectiva los anteriores modelos se emplearían a partir de la capacidad de modelar el parámetro de persistencia, lo cual es de por sí bastante importante y de obvia consideración.

A pesar de que subsisten algunas pistas sueltas, la imagen que emerge es que ya es hora de clausurar el asunto del fenómeno de Hurst y de que la modelación estocástica en hidrología se concentre en problemas importantes, sin olvidar la base física de las series con las que se trabaja.

## REFERENCIAS

- Ballerini, R. y Boes, D. C. Hurst Behavior of Shifting Level Processes. *Water Res. Res.*, Vol. 21, No. 11, pp. 1642-1648, 1985.
- Battacharya, R. N., Gupta, V. K. y Waymire, E. The Hurst Effect under Trends. *Jour. Appl. Probability*, Vol. 20, No. 3, pp. 649-662, 1983.
- Billingsley, P. *Converge of Probability Measures*, John Wiley, New York, 253 p., 1968.
- Boes, D. C. y Salas, J. D. Nonstationarity of the Mean and Expected Adjusted Range of Partial Sums of exchangeable random variables. *Jour. Appl. Probability*, Vol. 10, pp. 671-677, 1973.
- Chin, W. Q. Long-range changes. IN: *Stochastic approaches to water resources*. Vol. I, Ed. H.W. Shen, Fort Collins, Colorado, 1976.
- Feller, W. The Asymptotic Distribution of the Range of Sums of Independent Random Variables. *Ann. Math. Stat.*, Vol. 22, pp. 427-432, 1951.
- Gomide, F. L. S. Markovian Inputs and the Hurst Phenomenon. *Jour. of Hydrology*. Vol. 37, pp. 23-45, 1978.
- Gomide, F. L. S. Range and Deficit Analysis using Markov Chains. *Hidrol. Pap.* No. 79, Colorado State University, Fort Collins, 76 p., 1975.
- Hipel, K. W. y McLeod, A. I. Preservation or the Rescaled Adjusted Range, 2. Simulation studies using Box-Jenkins models. *Water Res. Res.*, Vol. 14, No. 3, pp. 509-516, 1978.
- Hurst, H. E. Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. *Trans. ASCE*, Vol. 116, pp. 776-808, 1951.
- Ibragimov, I. A. Some Limit Theorems for Stationary Processes. *Theor. Probl. Appl.*, Vol. 7, pp. 349-382, 1962.
- Jackson, B. B. The use of Streamflow Models in Planning. *Water Res. Res.*, Vol. 11, No. 1, pp. 54-63, 1975.
- Klemes, V. The Hurst Phenomenon: A Puzzle? *Water Res. Res.*, Vol. 10, No. 4, pp. 675-688, 1974.
- Klemes, V., Srikanthan, R. y McMahon, T.A. Long-Memory Flow Models in Reservoir Analysis: What is Their Practical Value? *Water Res. Res.*, Vol. 17, No. 3, pp. 737-751, 1981.
- Lloyd, E.H. Stochastic Reservoir Theory. *Advances in Hydrosience*, ed. Ven Te Chow, Vol. 4, pp. 281-339, 1967.
- Mandelbrot, B.B. *The fractal Geometry of Nature*. Freeman and Co., New York, 1983.
- Mandelbrot, B.B. y Taqqu, M. Robust R/S Analysis of Long run Serial Correlation. *42nd Int. Stat.*, Manila, pp. 1-38, 1979.
- Mandelbrot, B.B. y Wallis, J.R. Some Long-run Properties of Geophysical Records. *Water Res. Res.*, Vol. 5, No. 2, pp. 321-340, 1969.
- Mandelbrot, B. B. y Wallis, J. R. Noah, Joseph and Operational Hydrology. *Water Res. Res.*, Vol. 4, No.5, pp. 909-918, 1968.
- Mandelbrot, B. B. y Van Ness, J. W. Fractional Brownian Motions, Fractional Gaussian Noises and Applications. *SIAM Rev. Appl. Math.*, Vol. 10, No. 4, pp. 422-437, 1968.
- Matalas, N. C. y Huzzzen, C. S. A Property of the Range of Partial Sums. *Proc. Int. Hydrol. Symp.*, Vol. 1, pp. 252-257, 1967.
- McLeod, A. I. y Hipel, K. W. Preservation of the Rescaled Adjusted Range. 1. A reassessment of the Hurst phenomenon. *Water Res. Res.*, Vol. 14, No. 3, pp. 491-508, 1978.
- Mejía, J. J. y Millán, J. Efecto de la Memoria Larga de los Procesos Hidrológicos sobre la Operación de los Sistemas Hidrotérmicos de Generación Eléctrica. IN: *Seminario sobre hidrología con énfasis en el problema de la información escasa*. Universidad Nacional, Facultad de Minas, Medellín, 1982.
- Mejía, J. M. Rodríguez-Iturbe, I. y Dawdy, D. R. Streamflow Simulation 2. The Broken Line Process as a Potential Model for Hydrologic Simulation. *Water Res. Res.*, Vol. 8, No. 4, pp. 931-941, Ago. 1972.
- Moran, P. A. P. On the Range of Cumulative Sums. *Ann. Inst. Stat. Math.*, Vol. 16, pp. 109-112, 1964.
- O'Connell, P. E. Stochastic Modelling of Long Term Persistence in Streamflow Sequences. *Ph. D. Thesis*, Civil Eng. Dept., Imperial College. London, 1974.
- Potter, K. W. Annual Precipitation in the Northeast United States: Long Memory, Short Memory, or no Memory? *Water Res. Res.*, Vol. 15, No. 2, pp. 340-346, 1979.

- Potter, K. W. Evidence for Nonstationarity as a Physical Explanation of the Hurst Phenomenon. *Water Res. Res.*, Vol. 12, No. 5, pp. 1047. 1976.
- Potter, K. W. Comment on The Hurst Phenomenon: A puzzle? by V. Klemes. *Water Res. Res.*, Vol. 11., No. 2, pp. 373-374, 1975.
- Poveda, G. *El Fenómeno de Hurst*. Tesis de Magíster no publicada. Postgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos. Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, 1987.
- Rodríguez-Iturbe, I., Mejía, J. M. y Dawdy, D. R. Streamflow Simulation. 1. A new Look at Markovian Models, Fractional Gaussian Noise, and Crossing Theory. *Water Res. Res.*, Vol.8, No. 4, pp. 921-930, Ago. 1972.
- Salas, J. D. y Boes, D. C. Expected Range and Adjusted Range of Hydrologic Sequences. *Water Res. Res.*, Vol. 10, No. 3, pp. 457-463, 1974.
- Salas, J. D., Boes, D. C., Yevjevich, V. y Pegram, G. G. S. On the Hurst Phenomenon. IN: *Modeling hydrologic processes*. Ed. H.J. Morel-Seytoux. Water Resources Publ., Fort Collins, Colorado, 1979a.
- Salas, J. D., Boes, D. C., Yevjevich, V. y Pegram., G. G. S. Hurst Phenomenon as a Pre-Asymptotic Behavior. *Jour. of Hydrology*, Vol. 44, pp. 1-15, 1979b.
- Scheidegger, A.E. Stochastic Models in Hydrology. *Water Res. Res.*, Vol. 6, No. 3, pp. 750-755, 1970.
- Siddiqui, M.M. The Asymptotic Distribution of the Range and Other Functions of Partial Sums of Stationary Processes. *Water Res. Res.*, Vol. 12, No. 6, pp. 1271-1276, 1976.
- Taylor, G. I. Processes by Continuous Movements. *Proc. London Math. Soc.* (2), Vol. 20, pp. 196-211. 1921.
- Troutman, B.M. Reservoir Storage with Dependent, Periodic net Inputs. *Water Res. Res.*, Vol. 14, No. 3, pp. 395-401, 1978.
- Troutman, B.M. Limiting Distributions in Storage Theory. *Ph. D. Dissertation*. Dep. of Statist., Colorado State Univ., Fort Collins, 1976.
- Vanmarcke, E. *Random Fields: Analysis and Synthesis*. The M.I.T. Press, Cambridge. 1983
- Wallis, J.R. y Matalas, N.C. Small Sample Properties of H and K Estimators of the Hurst Coefficient h. *Water Res. Res.*, Vol. 6, pp. 1583-1594, 1970.
- Zapata, D.D. *El Problema de la Información Escasa en la Simulación de la Operación de un Sistema Hidrotérmico*. Tesis de Magíster no publicada. Postgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos. Universidad Nacional. Facultad de Minas. 1987.

