

# MODELAMIENTO MATEMATICO DE FENOMENOS HIDRODINAMICOS EN REGIONES CERCANAS A LA COSTA

Saul Marín

Interconexión Eléctrica S. A.

Francisco Mauricio Toro

Postgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos  
Universidad Nacional de Colombia, Medellín

## RESUMEN

Se presenta la formulación de un modelo matemático, hidrodinámico y de transporte por difusión, y su solución numérica por el método de los elementos finitos. El modelo parte de las ecuaciones básicas bidimensionales de Navier-Stokes integradas a lo largo de la profundidad, válidas en un principio para aguas poco profundas, y de la ecuación de difusión Euleriana, a la que se incorpora una ecuación de estado que expresa la relación entre la densidad y la sustancia a difundir. Las variaciones a lo largo de la profundidad se incorporan al dividir el dominio en capas horizontales, prevaleciendo la condición de distribución hidrostática de presiones (la componente vertical de la velocidad es pequeña en comparación a las componentes horizontales). La integración numérica en el tiempo, para el campo de flujo (modelo hidrodinámico), se realiza mediante el algoritmo de Lax-Wendroff modificado que reduce el ruido numérico manifestado en oscilaciones nodo a nodo de las variables. Para el campo difusivo se utiliza el esquema implícito de Crank Nicolson, teniendo presente que las escalas de tiempo de ambos fenómenos pueden ser diferentes. Como condiciones de borde se utilizan las de velocidad normal igual a cero en las fronteras rígidas, y en las fronteras abiertas variaciones de la superficie libre o velocidad conocida. El modelo aquí presentado se aplica a la bahía de Cartagena, Colombia.

## ABSTRACT

A mathematical model and its numerical solution by the Finite Element technique is presented here. The mathematical model is based on the depth integrated Reynolds-Orr equations valid for shallow waters. Variations along the depth are taken into account by dividing the computational domain in horizontal layers keeping the hydrostatic pressure distribution assumption for every layer (vertical velocities are small in comparison to the horizontal components). The modified Lax-Wendroff time integration scheme is used with the advantage of reducing the spurious node to node oscillations present in others time marching schemes. This model is applied to Cartagena Bay in the Caribbean coast of Colombia.

## EL MODELO HIDRODINAMICO

En los últimos años se han desarrollado varios modelos numéricos hidrodinámicos, la mayoría de ellos basados en la teoría bidimensional para aguas poco profundas o superficiales, cuyas ecuaciones son promediadas en la dirección vertical asumiendo fluido incompresible no homogéneo en esta dirección, y distribución hidrostática de presiones (UNIC, 1984; Lendertsee et al., 1973; Wang y Connor, 1975; Kawahara et al., 1983; Wang, 1975).

La teoría asume que las componentes horizontales de la velocidad son predominantes sobre la componente vertical de la velocidad. Por otro lado, esta última es la responsable del fenómeno de circulación vertical que produce efectos importantes en el transporte de sustancias tales como salinidad, contaminantes, etc. Por

consiguiente, es necesario tener en cuenta la componente vertical de la velocidad, en el análisis de las corrientes.

Otros factores que influyen en el movimiento de grandes masas de agua son el viento y la marea. El efecto del viento puede ser incluido explícitamente en la formulación y las mareas se representan mediante una función analítica, la cual se toma en consideración como una condición de borde.

En los estuarios la densidad del agua está influenciada por la temperatura y por la salinidad. Los cambios en la densidad producidos por variaciones en la temperatura son pequeños si se le compara con la influencia de la salinidad; por lo tanto, en este estudio se considera que la densidad depende únicamente de la salinidad.

## ECUACIONES BASICAS

- Ecuación de continuidad de masa.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

- Ecuación de Momentum Lineal en dirección x (oeste - este)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - fv + \frac{1}{\rho} - \frac{\partial P}{\partial x} \\ - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

- Ecuación de Momentum Lineal en dirección y (sur - norte)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

- Ecuación de Momentum en dirección z

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (4)$$

La ecuación de momentum en dirección z, se reduce a la ecuación (4) cuando se desprecia la componente vertical de la velocidad.

- Ecuación de Conservación de Salinidad.

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(us)}{\partial x} + \frac{\partial(vs)}{\partial y} + \frac{\partial(ws)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ D_x \frac{\partial s}{\partial x} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left[ D_y \frac{\partial s}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ D_z \frac{\partial s}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

que representa el balance de masa de sal disuelta en el agua.

- Ecuación de Estado.

Esta ecuación expresa la relación entre la densidad y la salinidad.

$$\rho = \rho_0 + \rho(s) \quad (6)$$

que puede ser representada por

$$\rho = \rho_0(1+cs) \quad (7)$$

Los términos usados en las ecuaciones (1) a (7) se definen como:

- x, y, z : Coordenadas cartesianas convencionales.
- u, v, w : Componentes de velocidad en las direcciones x, y, y z respectivamente.
- t : Tiempo
- f : Parámetro de Coriolis
- P : Presión
- s : Salinidad
- $\rho$  : Densidad
- $\rho_0$  : Densidad de referencia
- c : Coeficiente de influencia para expresar la densidad en función de la salinidad
- $\tau_{ij}$  : Componentes del Tensor de Tensiones
- D<sub>x</sub>, D<sub>y</sub>, D<sub>z</sub> : Coeficientes de difusión en las direcciones x, y, z respectivamente.

Dado que pueden existir cambios considerables de las variables existentes a lo largo de la vertical, para modelar adecuadamente la circulación en esta dirección se discretiza la profundidad en varias capas de igual o diferente espesor, y por lo tanto el sistema de ecuaciones (1) a (5) requiere ser integrado sobre la altura de cada capa.

La representación del sistema se muestra en la Figura 1, en donde el origen de coordenadas se toma en el nivel medio del agua; la interfaz entre el aire y el agua es  $z = N(x,y,t)$ , la cual incluye las mareas y ondas grandes, y es el límite de la capa superior del sistema. Similarmente, existe una consideración de borde para el fondo, el cual define una de las capas del sistema. En estos dos límites los flujos de masa son cero, y el movimiento está influenciado, en la superficie por las fuerzas producidas por el viento y en el fondo, por un efecto disipador de energía dependiente de la velocidad local.

Un nivel representativo del sistema de capas mostrado en la Figura 1 se define como  $L^{(k)}$ , donde  $L^{(k)}$  denota los valores negativos de  $z$  medidos desde el nivel medio

de la superficie del agua; la capa superficial se define como  $L^{(1)}$ , la capa de fondo como  $L^{(b)}$ .

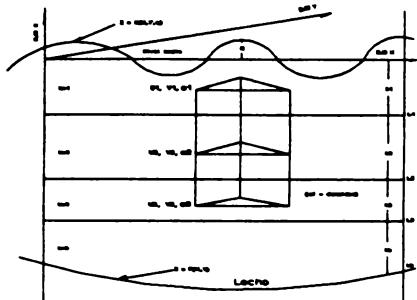


FIG. 1. DEFINICION DE CAPAS

### INTEGRACION DE LAS ECUACIONES A LO LARGO DE LA PROFUNDIDAD.

Se integran las ecuaciones (1) a (5) a lo largo de cada capa, considerando el espesor de capa constante y las capas horizontales. Como resultado se obtienen las siguientes ecuaciones :

- Ecuación de Continuidad de Masa: Capa 1 o Capa Superior

$$\frac{\partial N}{\partial x} + \sum_{i=1}^b \left[ \frac{\partial(h_i U_i)}{\partial x} + \frac{\partial(h_i V_i)}{\partial y} \right] = 0 \quad (8)$$

Para Capas Intermedias

$$W_k = - \sum_{i=k}^b \left[ \frac{\partial(h_i U_i)}{\partial x} + \frac{\partial(h_i V_i)}{\partial y} \right] = 0 \quad (9)$$

- Ecuación de Momentum Lineal en Dirección x:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_k}{\partial x} + U_k \frac{\partial U_k}{\partial x} + V_k \frac{\partial U_k}{\partial y} + \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial P_k}{\partial x} \\ & + \frac{1}{h_k} [(UW)_{k-\frac{1}{2}} - (UW)_{k+\frac{1}{2}}] \\ & - \frac{1}{\rho_k h_k} \left[ h_k \frac{\partial(\tau_{yx})_k}{\partial x} + h_k \frac{\partial(\tau_{yy})_k}{\partial y} + (\tau_y)_{k+}^{ab} - (\tau_y)_{k-}^{ab} \right] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

- Ecuación de Momentum Lineal en Dirección y:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_k}{\partial x} + U_k \frac{\partial V_k}{\partial x} + V_k \frac{\partial V_k}{\partial y} + \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial P_k}{\partial y} \\ & + \frac{1}{h_k} [(VW)_{k-\frac{1}{2}} - (VW)_{k+\frac{1}{2}}] \end{aligned} \quad (11)$$

En donde el subíndice k denota la capa, y los subíndices ar y ab denotan las fronteras superior e inferior de la capa k, respectivamente.

$U_k, V_k, W_k$ : Velocidades promedio de la capa k en las direcciones x, y, z, respectivamente.

$h_k$ : Espesor de la capa k.

$P_k$ : Presión en el punto medio de la capa k.

N : Posición del nivel de agua con respecto al nivel de referencia.

b : Número de capas a considerar.

La presión en la capa k se puede expresar como:

$$P_k = P_0 + \rho_1 g(h_i + N) + \rho_2 g h_2 + \dots + \rho_k \frac{g h_k}{2} \quad (12)$$

siendo  $P_0$  la presión atmosférica o presión de referencia.

$(\tau_i)_{kar}, (\tau_i)_{kab}$ : Denotan los esfuerzos cortantes superior e inferior en la dirección i de la capa k.

$\tau_{ij}$ : Tensor de Esfuerzos.

El esfuerzo interfacial se modela haciendo uso de la ley de fricción cuadrática, la cual tiene una forma diferente, dependiendo del tipo de interfaz.

- Superficie del Agua: Capa 1.

$$(\tau_x)_i^{sr} = C_0 \rho_a (Vv)_x (Vv) (\tau_y)_i^{sr} = C_0 \rho_a (Vv)_y (Vv)$$

- Niveles Intermedios.

$$(\tau_x)_k^{sr} = \frac{\beta}{2} (h_k)^2 (\rho_{k-1} + \rho_k) (U_{k-1} - U_k) (UV)_k$$

$$(\tau_y)_k^{sr} = \frac{\beta}{2} (h_k)^2 (\rho_{k-1} + \rho_k) (V_{k-1} - V_k) (UV)_k \quad (14)$$

- Capa de Fondo

$$(\tau_x)_{\bar{x}}^{ab} = \frac{\beta}{(h_k)^2} (\rho_k + \rho_{k+1}) (U_k - U_{k+1}) (UV_k)$$

$$(\tau_y)_{\bar{y}}^{ab} = \frac{\beta}{(h_k)^2} (\rho_k + \rho_{k+1}) (V_k - V_{k+1}) (UV_k)$$

$$(\tau_x)_b^{ab} = \rho_b \frac{g}{C^2} U_b \{(U_b)^2 + (V_b)^2\}^{1/2}$$

$$(\tau_y)_b^{ab} = \rho_b \frac{g}{C^2} V_b \{(U_b)^2 + (V_b)^2\}^{1/2} \quad (15)$$

En donde:

$$(UV)_k = \{[U_{k-1} - U_k]^2 + [V_{k-1} - V_k]^2\}^{1/2}$$

$\rho_a$ : densidad del aire.

$Vv$ : Magnitud de la velocidad del viento.

$(Vv)_i$ : Componente de la velocidad del viento en la dirección  $i$ .

$\beta$ : Coeficiente de fricción entre capas.

$C_o$ : Coeficiente de dragado del aire.

$C$ : Coeficiente de Chezy.

El tensor de Esfuerzos  $\tau_{ij}$  representados por los términos de difusión de momentum horizontal, se expresan como gradientes de las tensiones de Reynolds y por lo tanto pueden ser evaluadas haciendo uso del coeficiente de viscosidad turbulenta mediante las siguientes relaciones:

$$(\tau_{xx})_k = 2E \frac{\partial U_k}{\partial x} \quad (16)$$

$$(\tau_{yy})_k = 2E \frac{\partial V_k}{\partial y}$$

$$(\tau_{xy})_k = (\tau_{yx})_k = E \left( \frac{\partial U_k}{\partial y} + \frac{\partial V_k}{\partial x} \right)$$

Siendo  $E$  el coeficiente de difusión turbulenta. Finalmente, los términos convectivos  $(UW)$  y  $(VW)$  se aproximan como:

$$(UW)_{k-\frac{1}{2}} = W_k \left( \frac{1}{2} \right) (U_k + U_{k-1}) \quad (17)$$

$$(VW)_{k-\frac{1}{2}} = W_k \left( \frac{1}{2} \right) (V_k + V_{k-1})$$

- Procesos Difusivos.

El modelamiento de procesos difusivos puede ser acoplado a la solución de las ecuaciones del modelo hidrodinámico, ecuaciones (8) a (11), haciendo uso de la ecuación de conservación de la especie difusiva que se quiere modelar.

En el presente trabajo, se incorpora a las ecuaciones del modelo hidrodinámico la ecuación de conservación de salinidad, representada por la ecuación (5), que representa la forma estándar de la ecuación de difusión euleriana en un campo difusivo - convectivo.

- Ecuación de conservación de sal, para el nivel  $k$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + U_k \frac{\partial S_k}{\partial x} + V_k \frac{\partial S_k}{\partial y} + \frac{1}{h_k} [(SW)_{k-\frac{1}{2}} - (SW)_{k+\frac{1}{2}}] \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[ D_x \frac{\partial S_k}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ D_y \frac{\partial S_k}{\partial y} \right] \\ - \frac{D_z}{h_k} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)_{k-\frac{1}{2}} - \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)_{k+\frac{1}{2}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

En donde

$S_k$ : Concentración de sal promedia en la capa.

Densidad de campo.

Considerando despreciable la compresibilidad del agua, y teniendo presente que la influencia de la temperatura sobre la densidad es mucho menor que la de la salinidad, la densidad se puede expresar como función únicamente de la salinidad, haciendo uso de la ecuación de estado, ecuación (7).

Las ecuaciones (8) a (11) y (18), son las formas finales de las ecuaciones hidrodinámicas gobernantes a tener en cuenta para modelar el comportamiento del flujo y la difusión salina en los estuarios.

## FORMULACION EN ELEMENTOS FINITOS.

Para solucionar las ecuaciones (8) a (11) y (18), se requiere utilizar un método numérico. En este trabajo se presenta la formulación de dichas ecuaciones dentro del esquema del método de los elementos finitos y en particular el método de Galerkin, dividiendo el dominio en pequeños triángulos con funciones base de interpolación lineales.

Así, cada variable se interpola de la siguiente manera

$$[\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3] \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = [\Phi] \{U\} = U \quad (19)$$

Siendo  $\phi_i$  la función de interpolación para el nodo i que depende de las coordenadas espaciales y  $u_i$  el valor nodal de la variable en el nodo i que depende del tiempo. Con base en lo dicho anteriormente, las componentes de velocidad, la elevación del agua y la concentración de sal, pueden ser aproximadas mediante las siguientes expresiones, para cada elemento de la capa k.

$$\begin{aligned} U &= [\Phi] \{U_k\} \\ V &= [\Phi] \{V_k\} \\ W &= [\Phi] \{W_k\} \\ S &= [\Phi] \{S_k\} \\ N &= [\Phi] \{N\} \end{aligned} \quad (20)$$

Al aplicar el método de Galerkin se obtienen las siguientes ecuaciones en elementos finitos para un elemento de la capa k

-ecuaciones de momentum lineal

$$\begin{aligned} [A]\{U_k\} + [CUBX]\{U_k\} + [CVBY]\{U_k\} + [B_x]\{P_k\} \\ + [D2XY]\{U_k\} + [DYX]\{V_k\} - \{TX\} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} [A]\{V_k\} + [CUBX]\{V_k\} + [CVBY]\{V_k\} + [BY]\{P_k\} \\ + [DX2Y]\{V_k\} + [DXY]\{U_k\} - \{TY\} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

-Ecuación de continuidad para el nivel superior

$$[A]\{N_k\} + \{FCS\} = 0 \quad (23)$$

-Ecuación de continuidad para los niveles inferiores

$$[A]\{W_k\} = -\{FCK\} \quad (24)$$

-Ecuación de conservación de salinidad

$$\begin{aligned} [A]\{S_k\} + [CUVX]\{S_k\}RBACE + [CVBY]\{S_k\} + \{ASW\} \\ + [AXX]\{S_k\} + [AYY]\{S_k\} - \{TS\} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

En donde:

$$[A] = \int_A \{\phi\} [\phi] dA$$

$$[BX] = \frac{1}{\rho} \int_A \{\phi\} [\phi_x] dA$$

$$[CUBX] = \int_A \{\phi\} [\phi] \{U_k\} [\phi_k] dA$$

$$[BY] = \frac{1}{\rho} \int_A \{\phi\} [\phi_y] dA$$

$$[CVBY] = \int_A \{\phi\} [\phi] \{V_k\} [\phi_k] dA$$

$$[DXY] = \frac{E}{\rho} \int_A \{\phi_x\} [\phi_y] dA$$

$$[AXX] = \int_A \{\phi_x\} [\phi_x] dA \times D_x$$

$$[DYX] = \frac{E}{\rho} \int_A \{\phi_y\} [\phi_x] dA$$

$$[AYY] = \int_A \{\phi_y\} [\phi_y] dA \times D_y$$

$$[D2XY] = 2 \frac{E}{\rho_A} \int_{A} (\phi_x) [\phi_x] dA + \frac{E}{\rho_A} \int_{A} (\phi_y) [\phi_y] dA$$

$$[DX2Y] = \frac{E}{\rho_A} \int_{A} (\phi_x) [\phi_x] dA + 2 \frac{E}{\rho_A} \int_{A} (\phi_y) [\phi_y] dA$$

$$\{AUW\} = \int_{A} (\phi) [\Phi] dA \left[ \frac{1}{h_k} \left[ (UW)_{k-\frac{1}{2}} - (UW)_{k+\frac{1}{2}} \right] \right]$$

$$\{AVW\} = \int_{A} (\phi) [\Phi] dA \left[ \frac{1}{h_k} \left[ (VW)_{k-\frac{1}{2}} - (VW)_{k+\frac{1}{2}} \right] \right]$$

$$\{ASW\} = \int_{A} (\phi) [\Phi] dA \left[ \frac{1}{h_k} \left[ (SW)_{k-\frac{1}{2}} - (SW)_{k+\frac{1}{2}} \right] \right]$$

$$\{TX\} = \frac{1}{\rho_k h_k A} \int_{A} (\phi) [\phi] dA \times ((\tau_x)^{\alpha\sigma}_k - (\tau_x)^{\alpha b}_k)$$

$$\{TY\} = \frac{1}{\rho_k h_k A} \int_{A} (\phi) [\phi] dA \times ((\tau_y)^{\alpha\sigma}_k - (\tau_y)^{\alpha b}_k)$$

$$\{TS\} = \int_{A} (\phi) [\phi_x] dA \times \frac{D_z}{h_k} \left[ \left[ \frac{\partial S}{\partial z} \right]_{k-\frac{1}{2}} - \left[ \frac{\partial S}{\partial z} \right]_{k+\frac{1}{2}} \right]$$

$$\{FCS\} = \sum_{i=1}^b h_i \left[ \int_{A} (\phi) [\phi_x] dA \times \{U_i\} + \int_{A} (\phi) [\phi_y] dA \times \{V_i\} \right]$$

$$\{FCK\} = \sum_{i=1}^b h_i \left[ \int_{A} (\phi) [\phi_x] dA \times \{U_i\} + \int_{A} (\phi) [\phi_y] dA \times \{V_i\} \right]$$

$$[\phi_x] = \frac{\partial [\phi]}{\partial x}; [\phi_y] = \frac{\partial [\phi]}{\partial y}; [U_k] = \frac{\partial [U_k]}{\partial t}$$

## SISTEMA FINAL DE ECUACIONES

Las matrices de coeficientes globales resultan de sumar para cada nodo dado dentro del sistema, las contribuciones de las matrices elementales de cada uno de los elementos que concurren al nodo. Con el fin de simplificar la escritura del sistema de ecuaciones se usa la siguiente notación para las matrices de coeficientes globales:

-Ecuaciones de momentum lineal

$$[A]\{\dot{U}\} + [CUBX]\{U\} + [CVBY]\{U\} + [BX]\{P\} + \{AUW\}$$

$$+ [D2XY]\{U\} + [DYX]\{V\} - \{TX\} = 0 \quad (26)$$

$$[A]\{\dot{V}\} + [CUBX]\{V\} + [CVBY]\{V\} + [BY]\{P\} + \{AVW\}$$

$$+ [DX2Y]\{V\} + [DXY]\{V\} - \{TY\} = 0 \quad (27)$$

-Ecuación de continuidad de masa

$$[A]\{\dot{N}\} + [FCS] = 0 \quad (28)$$

-Ecuación de conservación de salinidad

$$[A]\{S\} + [CUBX]\{S\} + [CVBY]\{S\} + \{ASW\}[AXX]\{S\} + [AYY]\{S\} - \{TS\} = 0 \quad (29)$$

En donde U, V, N y S son vectores columna que contienen los valores para cada nodo de las velocidades, elevación del agua y salinidad respectivamente.

## INTEGRACION NUMERICA EN EL TIEMPO.

El tiempo total a ser analizado o simulado se divide en varios intervalos obteniéndose m puntos de tiempos discretos. El intervalo entre el punto de tiempo discreto t y el punto de tiempo discreto t + Dt se denota por Dt. Para obtener los valores de las variables en el tiempo t + Dt partiendo de los valores conocidos en el tiempo t, es necesario hacer uso de un esquema de integración numérica en dirección del tiempo. Con este fin para el campo de flujo representado por las ecuaciones (26), (27) y (28) se hace uso del esquema explícito de dos pasos de Lax - Wendroff mejorado por Kawahara, et al (1982) y para el campo dispersivo representado por la ecuación (29) se utiliza el esquema implícito de Crank Nicolson, teniendo en cuenta que las escalas de tiempo de ambos fenómenos pueden ser diferentes.

-Esquema explícito en dos pasos . Cuando las ecuaciones incluyen los términos de viscosidad como en el presente caso, el esquema se expresa mediante los siguientes dos pasos. Se define

$$\{CUP\} = [CUBX]\{U\} + [CVBY]\{U\} + [BX]\{P\}$$

$$\{CUP\} = [CUBX]\{V\} + [CVBY]\{V\} + [BY]\{P\}$$

$$\{ CUP \} = [CUBX] \{ V \} + [CVBY] \{ V \} + [BY] \{ P \}$$

$$\{ CUT \} = [AUW] + [D2XY] \{ U \} + [DYX] \{ V \} - [TX]$$

$$\{ CVT \} = [AUW] + [DX2Y] \{ V \} + [DXY] \{ U \} - [TY]$$

Primer Paso.

$$[\bar{A}] \{ N \}^{t+\frac{1}{2}} = [\bar{A}] \{ N \}^t - D \frac{t}{2} \{ FCS \}^t \quad (30)$$

$$[\bar{A}] \{ U \}^{t+\frac{1}{2}} = [\bar{A}] \{ U \}^t - \frac{Dt}{2} (\{ CUP \}^t + \{ CUT \}) \quad (31)$$

$$[\bar{A}] \{ V \}^{t+\frac{1}{2}} = [\bar{A}] \{ V \}^t - \frac{Dt}{2} (\{ CVP \}^t + \{ CVT \}) \quad (32)$$

Segundo Paso.

$$[\bar{A}] \{ N \}^{t+1} = [\bar{A}] \{ N \}^t - \frac{Dt}{2} \{ FCS \}^{t+\frac{1}{2}} \quad (33)$$

$$[\bar{A}] \{ U \}^{t+1} = [\bar{A}] \{ U \}^t - \frac{Dt}{2} (\{ CUP \}^{t+\frac{1}{2}} \{ CUT \}^{t+\frac{1}{2}}) \quad (34)$$

$$[\bar{A}] \{ V \}^{t+1} = [\bar{A}] \{ V \}^t - \frac{Dt}{2} (\{ CVP \}^{t+\frac{1}{2}} + \{ CUT \}^{t+\frac{1}{2}}) \quad (35)$$

en donde el superíndice t denota los valores para el tiempo t y el superíndice t+1/2 denota los valores para t+Dt/2.

La matriz [A] esta compuesta por los coeficientes agregados de la matriz [A].

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

es decir, la masa del elemento se distribuye igualmente entre sus tres nodos. A es el área del elemento.

La matriz [Ā] se define como

$$[\bar{A}] = colu [\bar{A}] + (1 - colu) [A] \quad (36)$$

El parámetro colu expresa la relación de los coeficientes agregados y se recomienda utilizar valores entre 0.8 y 0.95, (Kawahara et al 1982). El intervalo de tiempo Dt se debe escoger usando la siguiente relación, con el fin de conservar estabilidad en la integración.

$$\max \left[ \frac{Dt}{Dx}, \frac{Dt}{Dy} \right] \leq \frac{2 - colu}{3\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{gH}} \quad (37)$$

Donde H corresponde a la profundidad total.

Cálculos numéricos han demostrado que el efecto de amortiguamiento artificial se minimiza cuando el incremento de tiempo Dt es máximo (Kawahara et al 1982).

-Esquema implícito de Crank - Nicolson

El esquema se expresa mediante la siguiente relación:

$$\begin{aligned} & ([A] + \frac{Dt'}{2} ([CUBX]^t + [CVBY]^t) + \frac{Dt'}{2} ([AXX])) S^{t-1} \\ & = -([ASW] + TS) + [A] S^t - \frac{Dt'}{2} [CUBX]^t S^t \\ & \quad - \frac{Dt'}{2} [CBVY]^t S^t - \frac{Dt'}{2} [AXX] S^t - \frac{Dt'}{2} [AYY] S^t \end{aligned} \quad (38)$$

En la cual el superíndice t denota los valores para el tiempo t. El método de Crank - Nicolson es incondicionalmente estable para cualquier valor del incremento de tiempo Dt que se escoja, pero a medida que el incremento de tiempo se hace más grande la solución va perdiendo representatividad. Por consiguiente la escogencia de este valor debe ser razonable y se realiza buscando un equilibrio entre tiempo de cálculo y validez de la solución.

#### CONDICIONES DE BORDE.

En mares y estuarios existen dos tipos diferentes de bordes a considerar, borde fijo dado por la frontera física del dominio solución (línea de la costa), y borde abierto, que normalmente consiste en un grupo de líneas rectas que actúan como límites artificiales con otras partes del mar abierto o con una entrada o afluencia de

un río. En los bordes fijos la velocidad normal toma el valor de cero y en los bordes abiertos la velocidad normal o el valor de la variación del nivel medio deben ser especificados.

Al modelar las fronteras curvas mediante aproximaciones con líneas rectas, la dirección normal no queda definida explícitamente, pues a cada nodo de la frontera concurren dos segmentos que normalmente no son colineales y por lo tanto cada uno tiene su dirección normal.

Wang y Connor (1975) proponen para estos casos determinar la dirección normal aplicando el principio de conservación de masa en la dirección perpendicular al segmento de recta que une los otros extremos de los dos segmentos de recta que concurren al nodo.

$$\frac{1}{2}qL_1\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)=\frac{1}{2}qL_2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}-\theta+\theta_1\right)$$

Para obtener una relación general se define la dirección positiva de los segmentos que concurren al nodo, de tal manera que el área bajo estudio esté a la izquierda y la normal a la derecha. Si se denota el ángulo interior por  $\theta$  y el ángulo que forma la prolongación del segmento anterior al nodo (relativo al sentido antes escogido) con la normal,  $\theta_1$ , se obtiene la siguiente expresión para  $\theta_1$  realizando un balance de flujo a través de los dos segmentos. Resolviendo se obtiene

$$\cot\theta_1=\frac{L_2\operatorname{sen}\theta}{L_1-L_2\cos\theta}; \quad 0<\theta_1<\Pi, \quad \frac{\Pi}{2}<\theta<2\Pi$$

Para  $\theta \leq \pi/2$  las componentes de flujo se hacen cero ya que la existencia de flujo tangencial es físicamente no razonable y además se introducen dificultades numéricas. Una vez determinada la dirección normal, se puede formular la ecuación para la transferencia de momentum tangencial, ya que la componente en dirección tangencial puede expresarse en función de las componentes en las direcciones (x,y) es decir (Este,Norte), haciendo uso de una matriz de transformación.

#### COMPORTAMIENTO DEL COEFICIENTE DE AGREGACION, colu.

El comportamiento de este coeficiente se estudió en un caso sencillo de un canal recto de 200 m de longitud y 4 m de profundidad, cerrado en tres lados y abierto en el cuarto en donde se excita con una onda sinusoidal de amplitud 0.1 m y período dc 600 segundos. Los

resultados se muestran en las figuras 2 a 5. En la Figura 4 se muestra el efecto del coeficiente "COLU" sobre las variaciones de la superficie libre con respecto al nivel medio. Es claro que dicho coeficiente no afecta esta variable, en cambio, es de gran importancia sobre la variable velocidad como se aprecia en las Figura 5. En la Figura 2 se muestra el efecto de la oscilación nodo a nodo a lo largo de una sección transversal. Se nota en esta figura como, en general, a medida que el coeficiente "COLU" aumenta, la oscilación nodo a nodo disminuye pero la solución se amortigua. La solución teórica presentada, aunque no corresponde a la solución de las ecuaciones que resuelve el modelo, sí se puede utilizar como un punto de referencia para las comparaciones. El efecto del coeficiente "COLU" sobre las velocidades a lo largo del tiempo para el nodo se muestra en la Figura 5, en donde se aprecia el hecho de que a mayor valor de "COLU" más tiempo se requiere para estabilizar el ruido introducido por las condiciones iniciales. En el largo plazo, este ruido se disipa para cualquier valor del parámetro.

#### ESTUDIO DE LOS COEFICIENTES DE DIFUSION

Estos parámetros se estudiaron con un ejemplo sencillo de un canal recto horizontal. El propósito es el de reproducir flujo permanente y estudiar la saturación salina en el tiempo. Se consideró el dominio dividido en tres capas, cada una con las siguientes características:

Capa	Nodos	Elementos	Espesor m	densidad kg/m <sup>3</sup>
1	60	88	1,163	1000
2	60	88	0,487	1000
3	60	88	0,350	1000
total	180	264	2,0	

Las condiciones de borde para este caso son:

Perfil de velocidades impuesto a la entrada del canal (extremo izquierdo) así: la velocidad de la primera capa es 0,3491 m/s, la velocidad de la segunda capa es 0.3063 m/s y la de la tercera capa es 0.2636 m/s. Profundidad constante a la salida del canal (extremo derecho) igual a 2.0 m. Velocidad normal igual a cero en las paredes laterales. Perfil vertical de salinidad impuesto a la entrada del canal así: salinidad primera capa 7.2%, salinidad segunda capa 16.8% y salinidad tercera capa 35.3%.

Otros parámetros no variados dentro de este caso son: coeficiente "COLU" = 0.9, Dt cálculo = 2.0 s, Dt cálculo salinidad = 10.0 s, coeficiente de Chezy =  $14.7 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ , coeficiente de turbulencia =  $0.5 \text{ m}^2/\text{s}$ , coeficiente de fricción entre capas =  $0.5 \text{ m}^2$ . Los resultados de la simulación del proceso de difusión salina muestran el avance del frente salino para coeficientes de difusión horizontales de 30, 50 y 80 para diversos tiempos y manteniendo el coeficiente de difusión vertical igual a cero. El efecto de un mayor coeficiente de difusión es el de llevar el frente salino más rápidamente que con un coeficiente menor. A medida que el medio se va saturando el efecto se hace menor.

#### APLICACION A LA BAHIA DE CARTAGENA

La Bahía de Cartagena se encuentra ubicada en territorio Colombiano, situada entre los  $75^{\circ} - 30'$  y  $75^{\circ} - 36'$  de longitud oeste y los  $10^{\circ} - 16'$  y  $10^{\circ} - 26'$  de latitud norte. En ella se encuentra el puerto más importante de la costa Atlántica Colombiana. Tiene una longitud aproximada de 15 km, en el sentido Sur-Norte y un ancho de 7 km, en el sentido Oeste-Este, tal como se ilustra en la figura 6. Posee dos bocas hacia mar abierto, Boca Chica y Boca Grande y una entrada de agua dulce por el Canal del Dique.

El dominio de cálculo se discretizó en cuatro capas (figura 7) cuyos datos aparecen en la siguiente tabla:

Se utilizaron coeficientes de Chezy y fricción entre capas de  $70 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$  y  $0.50 \text{ m}^2$ , respectivamente. No se consideró el efecto del viento ni la fuerza de Coriolis. El coeficiente de agregación colu y el intervalo de cálculo utilizados fueron de 0,85 y 12 segundos respectivamente. La excitación del modelo, se hizo por medio de una marea semidiurna, con una amplitud de 0.45 m, la cual se impuso como condición de borde en los nodos de sus dos entradas, Bocachica y Bocagrande. Para tener en cuenta la influencia del Canal del Dique, se impuso como condición de borde un perfil de velocidad normal, con base en un caudal de  $165 \text{ m}^3/\text{s}$  y asumiendo una profundidad en la desembocadura de 9.0 m. En todo el contorno costero se impuso velocidad normal nula. Se 'calentó' el modelo durante un período (un día) y se simuló para dos período de marea. Algunos de los resultados se presentan en las figuras 8 a 11.

#### Ejemplo de un canal recto

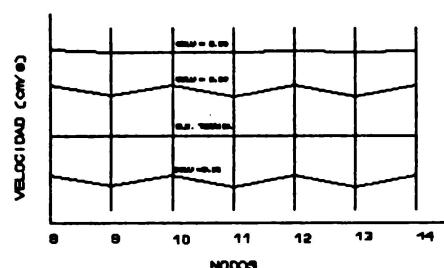


FIG. 2 OSCILACIONES NODO A NODO PARA UNA SECCION TRANSVERSAL DEL CANAL

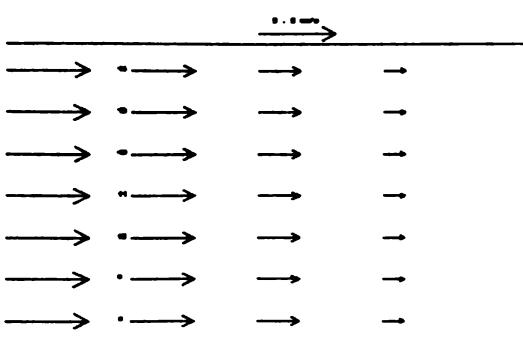


FIG. 3 CAMPO DE VELOCIDADES A LOS 3000 s.

Tabla I. Discretización del dominio de cálculo

C A P A	NODOS	ELEMENTO S	ESPESOR (m)	DENSIDAD (Kg/m <sup>3</sup> )
1	249	404	3.0	1020.
2	170	---	6.0	1020.
3	170	---	6.0	1020.
4	83	---	12.0	1020.
TOTAL	672	---	27.0	

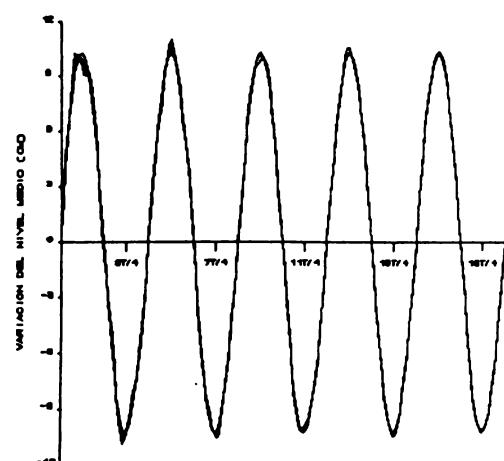


FIG. 4 VARIACION DEL NIVEL MEDIO EN EL TIEMPO - PUNTO 11

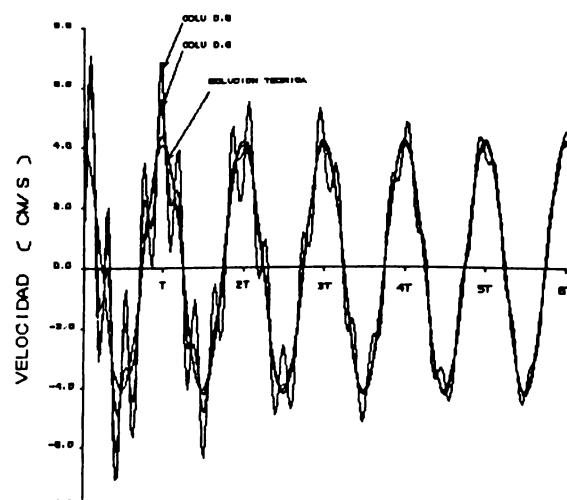


FIG. 5 VARIACION DE LA VELOCIDAD EN EL TIEMPO - PUNTO 11

Aplicación a la bahía de Cartagena

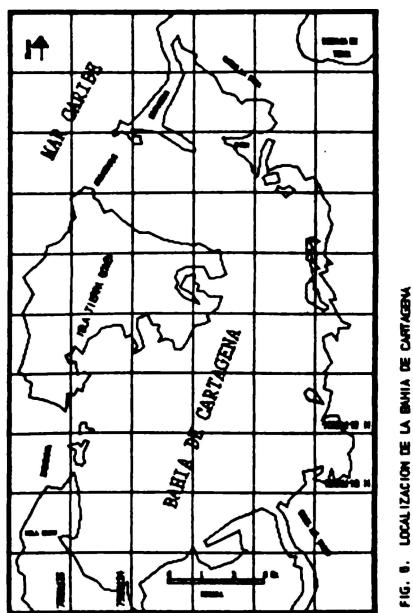


FIG. 6 LOCALIZACION DE LA BAHIA DE CARTAGENA

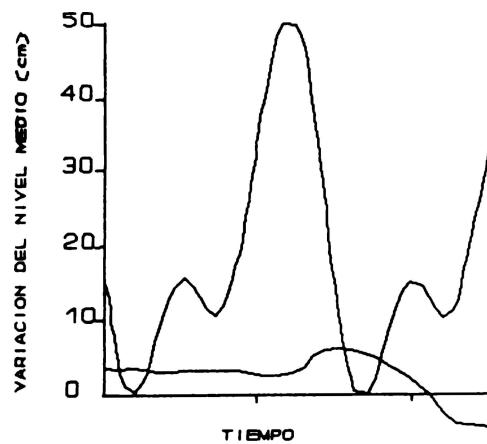


FIG. 8 VARIACION DEL NIVEL MEDIO EN EL TIEMPO

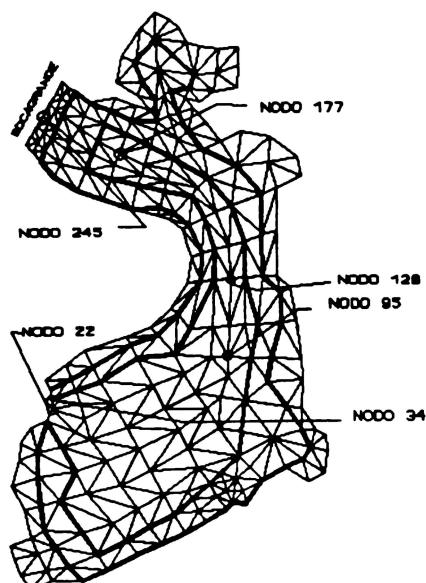


FIG. 7 MALLA DE CALCULO CON PUNTOS DE MONITOREO

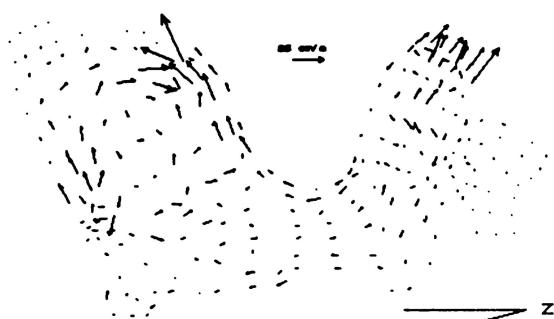


FIG. 9 CAMPO DE VELOCIDADES PRIMERA CAPA A LOS 160000 s.

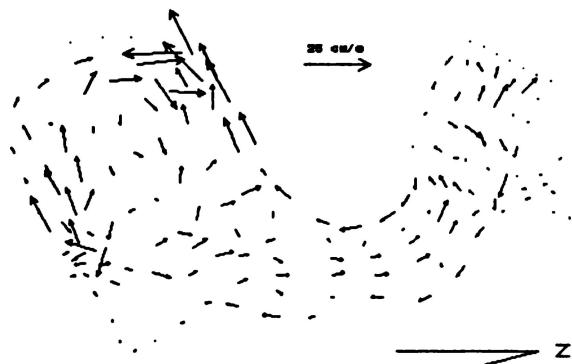


FIG. 10 CAMPO DE VELOCIDADES SEGUNDA CAPA A LOS 180000 s.



FIG. 11 CAMPO DE VELOCIDADES TERCERA CAPA A LOS 98000 s.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

El estudio hecho para el coeficiente de agregación (*colu*) muestra que su efecto sobre el cálculo de las sobreelevaciones no es importante (fig. 4), en cambio es de gran importancia sobre el campo de velocidades (fig. 5). A mayor valor de "*colu*" menor oscilación nodo a nodo pero la solución se amortigua (efecto no mostrado). En la fig. 5 se nota que la solución para "*colu*" cercano a la unidad la solución se demora más en estabilizarse.

Los resultados obtenidos con el modelo en problemas teóricos son bastante halagüeños, tal como se desprende

de los dos primeros ejemplos presentados. En el ejemplo uno, que corresponde al comportamiento de una onda estacionaria en un canal rectangular, se observa una correspondencia bastante aceptable con su respectiva solución analítica, tanto para la variación del nivel de la superficie del agua como para los valores de velocidad. El ejemplo dos, cuyo objetivo fue reproducir flujo permanente y estudiar la saturación de sal en el tiempo, se encuentra (no mostrado) como una vez que se ha borrado la "memoria" de las condiciones iniciales este flujo se obtiene, además se observa el avance del frente salino en el tiempo debido a los procesos difusivos cuando se tiene una fuente constante de la sustancia a difundir, para este caso la sal. Sin embargo, de estos dos ejemplos también se desprende la necesidad requerida de contar con mediciones de campo, cuando se trata de su aplicación a problemas reales, con el fin de obtener una buena calibración de sus parámetros, lo mismo que las condiciones de borde del problema específico y así, posteriormente, utilizar el modelo con "confianza" en la evaluación y planificación de los efectos de nuevos proyectos a realizarse en una determinada zona.

Los resultados de las aplicaciones del modelo a la bahía de Cartagena se muestran razonables, obteniendo campos de flujo acorde a las condiciones impuestas para simular esta región, sin embargo, las hipótesis realizadas a través de las condiciones de borde impuestas deben ser verificadas con datos de campo, y los resultados obtenidos deben ser confrontados con mediciones reales, siempre y cuando estas condiciones se satisfagan. La suposición de una misma marea actuando en las dos bocas y oscilando en fase, es digna de verificar, ya que esto implica marea alta y baja al mismo tiempo para ambas bocas, lo que produce un efecto directo sobre la circulación en la bahía, detectándose salidas y entradas de flujo en fase, dando como resultado dos zonas de circulación totalmente definidas y unas oscilaciones del nivel libre muy idénticas a lo largo del tiempo para todos los puntos.

Es muy importante tener presente que los resultados obtenidos para la Bahía de Cartagena en este artículo están condicionados a las suposiciones y valores de borde impuestos, los que deben ser verificados y modificados en caso de no coincidir con el fenómeno real.

## RECONOCIMIENTOS

Los autores agradecen a las siguientes instituciones por su apoyo para la realización de proyecto: COLCIENCIAS, patrocinador del proyecto; Centro de

Investigaciones Oceanográficas e Hidrográficas (CIOH) de Cartagena y el Instituto de Investigaciones Marinas Punta Betín (INVEMAR) de Santa Marta. También agradecen al Profesor Oscar Mesa sus aportes en la programación y a los estudiantes Walter Navarro y Francisco Hernández su colaboración en el procesamiento de la información.

## REFERENCIAS

- Kawhara, M. Kobayashi and K. Nakata., *A Three-Dimensional Multiple Level Finite Element Method Considering Variable Water Density*. Finite elements in fluids, Vlo. 4, Chapter 7, pp 129-155, 1982.
- Kawhara, M. Kobayashi and K. Nakata., *Multiple level finite element analysis and its applications to tidal current flow in Tokio Bay*. Appl. Math. Modelling, Vol. 7, June, 1983.
- Leendertse, J. J., Alexander R. C., and S. K. Liu. *A Three Dimensional Model for Estuaries and coastal Seas: Volume I, Principles of computation*, The Rand Corporation, R-1417-OWRR, 1973.
- Toro, F.M. y otros, *Simulación Hidrodinámica y de Transporte por Difusión (salinidad) para La Ciénaga de Santa Marta, Bahía de Cartagena y Bahía Tumaco*. Reporte del proyecto de investigación patrocinado por COLCIENCIAS, mayo de 1990, por publicar.
- Toro, F. M., *A Two-Dimensional Finite Element Model for Coastal Hydrodynamic Simulation*, Master Thesis. The University of Mississippi, 1985.
- Trujillo, J., *Mutilevel Finite Element Model for Sediment Transport Simulation*, Master Thesis, The University of Mississippi, 1986.
- Valencia, C. y Toro, F.M., *Modelo Hidrodinámico por Capas, en Elementos Finitos, y su Aplicación a la Bahía de Cartagena*, IX Seminario Nal de Hidráulica e Hidrología, Manizales, junio 1990.
- Wang, J. D., Connor J. J., *Mathematical Modeling of Near Costal Circulation*, MIT Ralph Parsons Laboratory for Water resources and Hydrodynamics, Report No. 200, 1975.
- Wang, H. P., *Multi-Level Finite Element Hydrodynamical Model of Block Island Sound*. Finite elements in water resources (eds. Pinder, G. et al.), Princeton University, Pentech Press, 1975, 1975, pp. 469-493.
- Zienkiewics, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Sciences*, McGraw-Hill, 1971.

