EVALUACION CRITICA DE LOS MODELOS DE DESAGREGACION EN HIDROLOGIA

Darío Valencia

Postgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos
Universidad Nacional de Colombia, Medellín

María Teresa Berdugo

Departamento de Sistemas y Administración
Universidad Nacional de Colombia, Medellín

Jorge Iván García

Civil Hidráulica y Sanitaria, CHS Ltda., Medellín

RESUMEN

Los modelos de desagregación fueron introducidos al comienzo de los años setenta como una técnica para dividir valores previamente generados, en intervalos mas pequeños en el tiempo o en el espacio. Este artículo evalúa las principales modificaciones propuestas al modelo original de Schaake et al (1971) y Valencia y Schaake (1972) y (1973). Particular atención se presta a las contribuciones de Mejia y Rousselle (1976), y Lane (1980). Se introduce un nuevo esquema de desagregación para corregir la inconsistencia teórica encontrada por Lane en el modelo de Mejía y Rousselle. Este artículo está basado en el trabajo de grado de Berdugo y García, y dirigido por Valencia (1983).

ABSTRACT

Disaggregation models were introduced in the early seventies as a technique to disaggregate or divide previously generated values into smaller intervals in time or space. This paper evaluates the main modifications proposed to the original model of Schaake et al (1971) and Valencia and Schaake (1972) y (1973). Particular attention is paid to the contributions of Mejia and Rousselle (1976), and Lane (1980). A new disaggregation scheme is introduced in order to correct the theorical shortcoming found by Lane in the Mejia and Rousselle's model.

1. INTRODUCCION

Los diversos modelos autorregresivos se han utilizado ampliamente en hidrología para la generación de eventos anuales, estacionales e inclusive mensuales. Sin embargo, la generación estacional con dichos modelos no siempre garantiza la preservación de estadísticos relevantes en un nivel superior de agregación.

La incorporación de los esquemas de desagregación dentro de las técnicas de modelación estocástica permitió subsanar las deficiencias de los modelos autorregresivos, y complementar los denominados procesos de memoria larga, desarrollados en particular para la preservación de propiedades extremas de las series.

La simulación mediante modelos matemáticos permite el análisis del comportamiento o respuestas de diferentes configuraciones posibles ante una variedad de situaciones hidrológicas o estímulos, pudiendo alcanzarse de esta forma soluciones tendientes al óptimo dentro de la planeación, diseño y operación de sistemas para el aprovechamiento de los recursos hidráulicos.

La aplicación de los modelos estocásticos consiste en la generación de series sintéticas que permiten preservar propiedades estadísticas presentes en las series históricas observadas, con lo cual se dispone de series hidrológicas adicionales, las cuales posibilitan una mejor inferencia acerca del comportamiento de un sistema de aprovechamiento hidráulico, al conocerse diferentes respuestas y su variabilidad.

Otras aplicaciones importantes las constituyen la extensión de registros en series de corta duración, la complementación de datos faltantes, la posibilidad de detectar datos inconsistentes en los registros históricos y aún la generación de series de caudales en cuencas que carecen de registros históricos, mediante la regionalización basada en cuencas de comportamiento similar.

Un modelo de desagregación permite generar series cronológicas a partir de otras correspondientes a intervalos de tiempo mas grandes. Estas últimas pueden generarse por cualquier modelo estocástico deseado, según las propiedades a corto o largo término a preservar, conservando propiedades estadísticas entre los elementos de las subseries, y entre los elementos de las subseries y la serie original.

Mediante los procesos de desagregación es posible obtener series correspondientes a intervalos mas pequeños en el tiempo o en el espacio.

El estudio de los procesos aquí considerados es puramente descriptivo, en el sentido estadístico. No se pretende explicar el carácter físico de los fenómenos hidrológicos que son objeto de modelación.
Todos los aspectos teóricos aquí comentados o desarrollados fueron sometidos a verificación práctica considerando el caso de dos estaciones de registro de caudales situados en el río Grande, cuya cuenca se encuentra localizada en el norte cercano a Medellín, en el departamento de Antioquia.

2. ALCANCE DEL ARTICULO

El presente trabajo constituye una síntesis del proyecto de grado "Evaluación Crítica de los Modelos de Desagregación en Hidrología" (1983) presentado como requisito parcial para optar al título de Ingeniero Civil de la Universidad Nacional de Colombia.

El objeto principal del proyecto fué la evaluación desde el punto de vista teórico de las relaciones estructurales de los principales modelos de desagregación propuestos; y su sentido, determinar si la estructuración dada a los modelos permitía en efecto preservar los estadísticos supuestamente preservados, conforme al análisis de sus relaciones matemáticas.

Se evaluaron las principales modificaciones propuestas al modelo original de Schaake et al (1971) y Valencia y Schaake (1972) y (1973), y particular atención fue puesta a las contribuciones hechas por Mejía y Rousselle (1976) y al extraordinario trabajo de análisis realizado por William Lane (1980).

Paralelamente a estos modelos se hace la descripción y análisis de otros modelos tales como el Modelo de Alarcón (1975), el Modelo de Tao y Delleur (1976), y el modelo de Hoshi y Burges (1978). Para todos se presentó la forma del modelo, las expresiones que permiten determinar los parámetros, sus ventajas y desventajas.

En los numerales siguientes se presenta una relación de los aspectos mas importantes encontrados en el desarrollo del proyecto y se describe brevemente un nuevo modelo de desagregación propuesto para corregir los inconvenientes teóricos encontrados por Lane en el Modelo de Mejía y Rousselle.

3. VISION GENERAL DEL DESARROLLO DE LOS MODELOS

El primer modelo de desagregación fue presentado en 1967 por Harms y Campbell. El procedimiento estaba basado en un modelo markoviano de rezago uno para la generación de flujos anuales normalmente distribuidos, y flujos mensuales lognormalmente distribuidos, y exigía un ajuste externo en los valores mensuales generados, con el objeto de obtener valores anuales iguales a la suma de los valores mensuales.

En 1970, Moreau y Pyatt propusieron un modelo para generar valores semanales dentro de un cierto mes, en varios sitios, conociendo los correspondientes valores semanales del mes previo al considerado. Los valores semanales obtenidos por este procedimiento son agregados para obtener valores mensuales. La secuencia de valores mensuales así obtenida puede preservar los estadísticos asociados con una estructura markoviana multivariada de rezago uno. Este modelo represento un avance con respecto a esquemas previamente presentados, no siendo en sentido estricto un modelo de desagregación al generar datos secuencialmente; de otro lado, la preservación de una estructura markoviana en el nivel mensual no implica la preservación de todas las propiedades de primeros y segundos momentos del nivel anual.

El primer modelo de desagregación, como tal aceptado, y presentado en una forma muy general y conceptual, fue introducido por Schaake et al en 1971.

Valencia y Schaake en 1972 desarrollaron el soporte teórico para las principales características del modelo, así como las condiciones suficientes para la existencia de parámetros estimados, con sus desarrollos matemáticos correspondientes, conformando un modelo de estructura muy general conocido como el Modelo Básico. Aunque este modelo está libre de iconsistencias estructrurales, no preserva la estructura de correlación para eventos estacionales (semestrales, mensuales, etc) correspondientes a años consecutivos.

Algunos de los modelos posteriormente presentados surgen con el fin de corregir la deficiencia anterior. El aporte mas significativo para mejorar el Modelo Básico fue presentado hacia 1976 por Mejía y Rousselle, al incluirle a este último una o varias estaciones del año anterior. La modificación efectuada por Mejía y Rousselle se conoce en la literatura como el Modelo Extendido.

En 1980, William Lane en un sistemático trabajo realizó una revisión del proceso de estimación de parámetros, logrando detectar fallas en los procedimientos corrientes, provenientes de inconsistencias en las relaciones estructurales de las variables en el proceso de modelación. Tal inconsistencia es encontrada en el modelo de Mejía y Rousselle, no pudiendo en última instancia la modificación introducida al Modelo Básico preservar el estadístico adicional (correlación estacional entre años sucesivos).

Además, la modificación introducida produce un desajuste en los demás estadísticos relacionados en el proceso. La inconsistencia se origina en la covarianza entre la serie de valores anuales y los valores estacionales previos, estadístico que aparece en el proceso de estimación de parámetros y que no puede preservarse explícitamente.

Identificada la inconsistencia, Lane propuso modificaciones al proceso de estimación de parámetros para cubrir las dificultades en el procedimiento de estimación original.

La solución desarrollada por Lane, para cubrir la inconsistencia, no satisface completamente los objetivos de un modelo de desagregación, pues los momentos de inconsistencia son preservados en una forma teórica y no conforme a los estimados históricos, como se expone mas adelante.

La metodología lo aleja del objetivo que orientó a Mejía y Rousselle a modificar el esquema propuesto por Valencia y Schaake, pues la corrección se hace para evitar el desajuste de los mismos momentos preservados ya por el Modelo Básico, sin conservar tampoco lo que Mejía y Rousselle pretendían.

El modelo propuesto en el desarrollo del proyecto de grado trata de cubrir la inconsistencia encontrada en el modelo de Mejía y Rousselle, y permite la preservación de todos los momentos históricos en el proceso de generación.

Es de resaltar un hecho importante: las ecuaciones que constituyen el nuevo modelo propuesto pueden en la esencia de su estructura matemática ser considerados como casos particulares del modelo general desarrollado por Valencia y Schaake. Por lo tanto, los principios teóricos del modelo de Valencia y Schaake pueden ser aplicados a este modelo propuesto.

4. EL MODELO BASICO

En el modelo de Valencia y Schaake, el proceso de desagregación es tal que, aunque los datos dentro de un año dado preservan los estadísticos para todos los niveles de agregación, ellos están ligados con el pasado únicamente a través de los estadísticos del nivel anual.

La estructura del modelo general está diseñada para la preservación de covarianzas entre los valores anuales y sus valores estacionales y para la preservación de varianzas y covarianzas entre los valores estacionales de un mismo año.

El problema encontrado por Mejía y Rousselle a la estructura del modelo de Valencia y Shaake radica en que el numero de covarianzas estacionales rezagadas que se preserva, no es consistente de estación a estación. De esta forma, la última estación de un año es generada preservando las covarianzas con todas las estaciones precedentes del año; no ocurre así con el primer valor estacional, el cual es generado independientemente de todas las estaciones previas. Se conservan entonces las covarianzas, y en última instancia los coeficientes de correlación estacionales dentro de un año, pero no la covarianza entre estaciones consecutivas de años diferentes. Así, en la desagregación mensual no existe la garantía de preservar el coeficiente de correlación entre diciembre de un año y enero del siguiente.

El Modelo Básico tiene la siguiente ecuación (si se considera que las variables aleatorias tienen medias nulas):

$$Y = A\,X + B\,V \qquad (1)$$

Donde Y es un vector columna de n variables aleatorias; X es un vector columna de m variables aleatorias; V es un vector columna de n variables aleatorias cada una con media cero y varianza unitaria, independientes entre sí e independientes de X; A es una matriz de parámetros de orden n x m, y B una matriz de parámetros, de orden n x n.

En una aplicación práctica X puede ser un vector cuyos elementos son las precipitaciones anuales en m sitios de una misma cuenca, para el año i :

$$X = X_i = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ .. \\ .. \\ X_{mi} \end{bmatrix}$$

El vector Y puede ser las precipitaciones mensuales en los mismos sitios, durante el año i. En este vector Y_{mji} denota la precipitación en el sitio m, durante el mes j, del año i.

$$Y = Y_1 = \begin{bmatrix} Y_1,1,i \\ Y_1,2,i \\ .. \\ .. \\ Y_1,12,i \\ Y_2,1,i \\ .. \\ .. \\ Y_2,12,i \\ .. \\ .. \\ Y_m,12,i \end{bmatrix}$$

Por lo anterior, la matriz A resulta ser de orden 12m x m, la matriz B de orden 12m x 12m, y el vector V de 12m elementos.

Entonces, el modelo:

$$Y_i = AX_i + BV_i \qquad (2)$$

permite obtener valores mensuales asociados con los valores anuales X_i. Estos últimos pueden generarse mediante un proceso autorregresivo.

Las matrices A y B pueden encontrarse mediante las siguientes ecuaciones (para lo cual puede utilizarse la técnica de los valores esperados):

$$A = S_{YX} S_{XX}^{-1} \qquad (3)$$

$$BB^T = S_{YY} - S_{YX} S_{XX}^{-1} S_{XY} \qquad (4)$$

en donde S_{XX}, S_{XY} y S_{YY} son las matrices de covarianza que pueden definirse para los vectores X y Y. Los parámetros A y B deben satisfacer estas ecuaciones si se desea que el modelo preserve todos los estadísticos incluidos en las matrices de covarianza S_{YX} ($=S_{XY}^T$) y S_{YY}.

En la práctica, primero se estiman las matrices de covarianza utilizando los registros históricos disponibles de los vectores X y Y; luego, mediante la ecuación (3) se obtiene un estimado de la matriz A; y resolviendo la ecuación (4) para B se obtiene un estimado para B. Las series que el modelo suministra para Y preservaran todas las propiedades estadísticas de primero y segundo orden, es decir, medias, varianzas y coeficientes de correlación.

5. EL MODELO EXTENDIDO Y LA INCONSISTENCIA

El modelo de Mejía y Rousselle fue formulado para cubrir la deficiencia de preservar la covarianza entre estaciones sucesivas de años diferentes, e introducido como una modificación al modelo de Valencia y Schaake. La modificación consistió en la adición de un término que permitiría la preservación de la correlación estacional, digna de mantenerse, entre las estaciones de un año en cuestión y las estaciones del año anterior, con tantos rezagos como valores estacionales del año previo sean incluidos en dicho término. La ecuación del modelo de Mejía y Rousselle tiene la forma:

$$Y = A'X + BV + A''Z \qquad (5)$$

donde Z es un vector columna correspondiente al término adicional, que contiene tantos valores estacionales del año previo (correlacionados con las estaciones del año en cuestión en los diversos sitios) como sean deseados y A" una matriz adicional de parámetros.

El valor adicional Z_i puede ser expresado como $Z_i = Y_{i-1}$, esto es, el vector Z_i contiene todas las estaciones del año previo al considerado. La ecuación toma la forma:

$$Y_i = A'X_i + A''Y_{i-1} + BV_i \qquad (6)$$

en la cual el subíndice i corresponde al tiempo.

La matriz de covarianza entre dos vectores de series de tiempo, U y T por ejemplo, será expresada como S_{UT}; la matriz de covarianza de rezago uno,entre los mismos vectores, será expresada como $S_{UT}(1)$.

Las ecuaciones de estimación de parámetros del modelo de Mejía y Rousselle son las siguientes:

$$A' = (S_{YX} - S_{YY}(1)S_{YY}^{-1}S_{XY}^{T}(1))(S_{XX} - S_{XY}(1)S_{XY}^{T}(1))^{-1} \qquad (7)$$

$$A'' = (S_{YY}(1) - A'S_{XY}(1))\, S_{YY}^{-1} \qquad (8)$$

$$BB^T = S_{YY} - A'S_{YY}^{T}(1) \qquad (9)$$

El momento $S_{YY}(1)$ es el momento adicional que se desea preservar con la modificación introducida.

La figura 1 permite la visualización de las estructuras del modelo de Mejía y Rousselle y la comparación entre éstas y las ecuaciones matemáticas, con el fin de hacer mas comprensible la revisión de las estructuras y los momentos incluidos en el procedimiento.

Los datos o series anuales que se desagregan deben estar pregenerados por cualquier modelo de generación anual estocástico, y es común que se empleen los modelos lineales autorregresivos de rezago uno; considérese para el caso, un modelo de estructura markoviana: el modelo de Matalas (1967).

En la figura 1 la estructura de generación anual (Matalas) es mostrada en líneas contínuas; en esta primera parte del proceso, los X_i son generados basados en valores previos (X_{i-1}) de la serie, en varios sitios, y en una componente aleatoria. En una segunda parte del proceso, los valores estacionales (desagregados) son generados de acuerdo con la estructura mostrada por las líneas en trazo interrumpido.

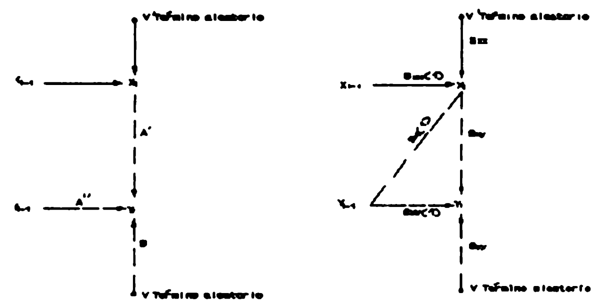

Figura 1. Estructura y momentos usados en el proceso de estimación de parámetros para el modelo de Mejía y Rousselle.

$$Y_i = \hat{A}' + \hat{A}'Y_{i-1} + \hat{B}\ V$$

$$\hat{A}'' = (S_{yx} - S_{yy}(1)S_{yy}^{-1}S_{xy}^{T}(1))(S_{xx} - S_{xy}(1)S_{yy}^{-1}S_{xy}^{T}(1))^{-1}$$

$$\hat{A}'' = (S_{yy}(1) - \hat{A}'S_{xy}^{-1}(1))\ S_{yy}^{-1}$$

$$\hat{B}\hat{B}^T = S_{yy} - \hat{A}'S_{xy} - \hat{A}''S_{yy}^{T}(1)$$

Las matrices de parámetros mostrados en la figura establecen las relaciones estructurales entre las componentes del modelo. La matriz A' establece la relación entre los valores estacionales Y_i y los valores anuales X_i, la matriz A" es la relación estructural entre los Y_i y los Y_{i-1} y la matriz B mantiene la correlación entre los Y_i internamente.

La estructura del modelo está orientada para que las matrices de parámetros A', A" y B permitan preservar las relaciones estadísticas de covarianza preservar las relaciones estadísticas de covarianza entre Y_i y X_i, entre Y_i y Y_{i-1} y Y_i consigo misma; sin embargo, esto no es posible en el esquema de estimación de parámetros originalmente propuesto por lo siguiente:

En el esquema de generación anual

$$X_i = CX_{I-i} + DV_i' \quad \text{(Matalas)} \quad (10)$$

los momentos $S_{XX}(1)$ y S_{XX} son preservados mediante la adecuada escogencia de las matrices C y D respectivamente.

$$C = S_{XX}(1)\, S_{XX}^{-1} \qquad (11)$$

$$DD^T = S_{XX} C S_{XX} C^T \qquad (12)$$

Los momentos $S_{XX}(1)$ y S_{XX} son la matriz de covarianza de rezago uno y la matriz de covarianza de la serie anual consigo misma.

Para el proceso de desagregación, la ecuación (6) que lo expresa, posee tres grados de libertad correspondientes a las matrices de parámetros A', A" y B, mediante las cuales se establece la preservación de los momentos expresados por las matrices de covarianza S_{YX}, $S_{YY}(1)$ y S_{YY} respectivamente (ver Figura No. 1).

El punto en cuestión es que existe un cuarto momento, $S_{XY}(1)$, el cual no tiene correspondencia con la estructura del modelo, y es usado en el procedimiento de estimación de parámetros. Este no puede ser acomodado ni en el esquema de generación anual ni en el correspondiente al proceso de desagregación. Este momento es la covarianza entre la serie de valores anuales y los valores estacionales previos.

El momento $S_{XY}(1)$ no puede ser preservado por el esquema de generación anual, ya que las series anuales son generadas previamente en forma independiente de las subseries correspondientes a la desagregación, y éstas subseries tampoco "miran" el futuro valor anual. En síntesis, el problema de estimación de parámetros radica en que el esquema de estimación de las matrices A', A" y B incluye el uso de este momento, el cual no puede ser preservado por la estructuración dada al modelo.

6. LA MODIFICACION DE LANE

Para resolver la discrepancia del momento $S_{XY}(1)$ entre la estructura del modelo y el proceso de estimación de parámetros , Lane consideró que para solucionar la inconsistencia era necesario establecer otra ecuación, la cual expresara un estimado para el momento $S_{XY}(1)$, origen del problema, como una función de los otros momentos; haciendo esto de una manera consistente con la estructura del modelo, y utilizando solamente aquellos momentos que pueden ser preservados por la estructura del modelo. El valor obtenido y expresado en forma de ecuación como una función de los otros momentos es usado en el proceso de estimación de parámetros de las ecuaciones (7), (8) y (9). El nuevo valor para $S_{XY}(1)$ será preservado en la generación.

Para la obtención de este estimado, Lane hizo uso del modelo autorregresivo lineal utilizado en la generación anual usando la ecuación 10, donde C y D son matrices de parámetros. El método de los momentos da para C el estimado representado por la ecuación (11). Posmultiplicando (10) por Y_{i-1}^T y tomando valores esperados se obtiene el valor teórico de $S_{XY}(1)$ para los datos generados.

$$S_{XY}^{*}(1) = CS_{XY} \qquad (13)$$

El asterisco es usado para denotar un nuevo estimado de $S_{XY}(1)$; el reemplazo del valor de C por la ecuación (11) conduce a:

$$S_{XY}^{*}(1) = S_{XX}(1)\, S_{XX}^{-1} S_{XY} \qquad (14)$$

Este nuevo estimado para $S_{XY}(1)$ proporciona la base para la corrección de la estimación de parámetros que preservan en esta forma todos los momentos considerados. No obstante, obsérvese que S^{*}_{XY} no se estima directamente de las muestras históricas.

El valor esperado de $S_{XY}(1)$ generado tiende a este nuevo estimado y no al estimado directamente calculado de los datos históricos; será, pues, un momento teórico, pudiendo diferir los estimados histórico y teórico.

El uso de $S^{*}_{XY}(1)$ causa un problema adicional, relacionado con la transformación lineal del Modelo Básico LY = X , por la cual la suma de los valores estacionales suma exactamente el valor anual desagregado; y mas importante aún, si se postmultiplica esta relación por $Y_{i-1}T$ y se toman valores esperados,

$S_{XY}(1)$ queda definido por $S_{YY}(1)$.

$$LS_{YY}(1) = S_{XY}(1) \tag{15}$$

El nuevo estimado para $S_{XY}(1)$ aunque es consistente con la estructura del modelo no preserva esta importante propiedad de la transformación lineal, o sea que la aditividad en los valores generados no es preservada. La intervención externa en los datos generados para preservar esta aditividad ocasiona la no preservación de los momentos.

Un nuevo ajuste fue propuesto por Lane en la matriz $S_{YY}(1)$, necesario para hacerla consistente con $S^{*}_{XY}(1)$, según la ecuación (15). El ajuste recomendado es usar un nuevo estimado para $S_{YY}(1)$ el cual puede ser escrito como:

$$S^{*}_{YY}(1) = S_{YY}(1) + S_{YX}S^{-1}_{XX}\left[S^{*}_{XY}(1) - S_{XY}(1)\right] \tag{16}$$

Este nuevo estimado permitirá la preservación de la aditividad y la no existencia de problemas en la estimación de las matrices de parámetros.

El modelo modificado por Lane queda entonces conformado por las ecuaciones (14) , (16) y las siguientes :

$$A' = \big[S_{YX} - S^{*}_{YY}(1)\,S^{*}_{YX}S^{*T}_{XY}(1)\big]\,\big[S_{XX} - S^{*}_{XY}(1) - S_{XY}(1 \tag{17}$$

$$A'' = \left[S^{*}_{YY}(1) - A'S^{*}_{XY}(1)\right]S^{-1}_{YY} \tag{18}$$

$$BB^{T} = S_{YY} - A'S_{XY} - A'S^{*T}_{YY}(1) \tag{19}$$

Con los procesos de corrección, los momentos generados corresponden a los momentos históricos, con excepción de $S_{XY}(1)$ y $S_{YY}(1)$, los cuales corresponden exactamente a los momentos teóricos $S^{*}_{XY}(1)$ y $S^{*}YY(1)$, y no a los observados históricamente.

Si bien el modelo original no fue diseñado para la preservación de $S_{XY}(1)$, el ajuste realizado en la matriz de covarianza $S_{YY}(1)$ para hacerla consistente con $S^{*}_{XY}(1)$ preserva así la aditividad, pero convierte este momento en un estimado teórico y no en el observado históricamente. El desarrollo de Lane y su tratamiento matemático lo alejó del objetivo que orientó a Mejía y Rousselle a modificar el esquema propuesto por Valencia y Shaake, y el cual era precisamente la preservación de $S_{YY}(1)$ conforme al estimado histórico.

Si se considera que bajo el procedimiento de estimación de parámetros originales, en el modelo de Mejía y Rousselle, ninguno de los momentos incluidos con las series desagregadas es preservado, el trabajo de Lane se constituye en un significativo aporte teórico. Sin embargo, la preservación de los momentos $S_{XY}(1)$ y en especial de $S_{YY}(1)$ como estimados teóricos, y no como los calculados históricos, no satisface completamente los objetivos de un modelo de desagregación, pues, desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas ningún sentido pose la preservación teórica de un momento que difiere del correspondiente teórico.

7. UN NUEVO MODELO DE DESAGREGACION

El modelo propuesto en el proyecto de grado trata de cubrir la inconsistencia encontrada por Lane en el modelo de Mejía y Rousselle, y permite la preservación de todos los momentos en el proceso de generación.

La forma matemática dada al modelo puede expresarse mediante las siguientes relaciones:

$$X_i = C'X_{i-1} + C''Y_{i-1} + B'V_i \tag{20}$$

$$Y_i = A'X_i + A''Y_{i-1} + BV_i \tag{21}$$

La ecuación (20) constituye el esquema de generación anual, y corresponde a una estructura igual a la del modelo de Matalas de rezago uno, con un término adicional $C''Y_{i-1}$.

La ecuación (21) es el esquema de desagregación correspondiente a Mejía y Rousselle. Y_{i-1} contiene el último valor estacional del año previo al considerado.

Las ecuaciones para el proceso de estimación de parámetros, derivados por el método de momentos, se presentan a continuación y sus relaciones con la estructura del modelo se muestran en la Figura No. 2.

estructura del modelo se muestran en la Figura No. 2.

$$C' = (S_{XX}(1) - S_{XY}(1) S_{YY}^{-1} S_{YX})(S_{XX} - S_{XY} S_{YY}^{-1} S_{YX})^{-1} \tag{22}$$

$$C'' = (S_{YY}(1) - C' S_{XY}) S_{YY}^{-1} \tag{23}$$

$$B' B^T = S_{XX} - C' S_{XX}(1) - C'' S_{YX}(1) \tag{24}$$

$$A' = (S_{YX} - S_{YY}(1) S_{YY}^{-1} S_{XY}^T)(S_{XX} - S_{XY}(1) S_{YY}^{-1} S_{XY}^T(1))^{-1} \tag{25}$$

$$A'' = (S_{YY} - A' S_{XY}(1)) S_{YY}^{-1} \tag{26}$$

$$B B^T = S_{YY} - A' S_{XY} - A'' S_{YY}^T(1) \tag{27}$$

La preservación de los momentos $S_{XX}(1)$, S_{XX} y en especial $S_{XY}(1)$, en la generación anual, es alcanzada mediante la modificación introducida y la adecuada escogencia de las matrices de parámetros C', B' y C" respectivamente.

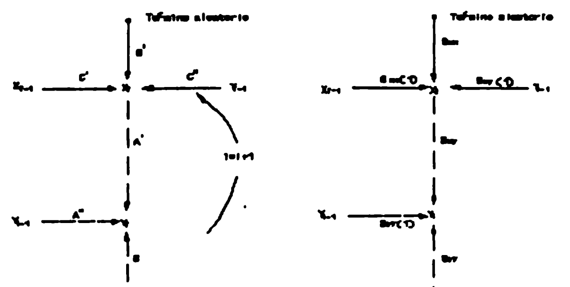

Fig 2. Estructura para el modelo propuesto.

En la desagregación las matrices A', A" y B preservaran las relaciones establecidas por las matrices de covarianza S_{YX}, $S_{YY}(1)$ y S_{YY}. Se mantienen con ello las características espaciales y temporales en las series históricas.

Bajo el esquema dado para la generación anual, conjuntamente con el correspondiente a la desagregación, es posible cubrir la inconsistencia existente en el modelo de Mejía y Rousselle.

La idea básica consiste en interrelacionar los dos procesos, el de generación anual y el de desagregación. La generación anual realizada en forma independiente de las subseries de la desagregación no permite la preservación del momento $S_{XY}(1)$ usado en la estimación de parámetros. Esta preservación se consigue mediante la adición del término $C''Y_{i-1}$ en la estructura de generación anual. Y_{i-1} contiene los valores estacionales del año previo al considerado y C" es una matriz de parámetros que establece la relación estructural entre los valores anuales (para los diferentes sitios) que se van a generar y los valores estacionales del año previamente desagregado. La generación anual y su respectiva desagregación se deben realizar en forma alterna. Se obtiene así la interrelación deseada.

8. LIMITACIONES

Teóricamente, con una estructura similar a la propuesta, la desagregación puede hacerse en niveles sucesivos, por ejemplo, anual - trimestral - mensual así:

$$X_i = [\, C' \,\vdots\, C'' \,\vdots\, C''' \,] = \begin{bmatrix} X_{i-1} \\ \cdots \\ Y_{i-1} \\ \cdots \\ Z_{i-1} \end{bmatrix} + B' V_i$$

para la generación anual, y

$$Y_i = [A' \,\vdots\, A'' \,\vdots\, A'''] \begin{bmatrix} X_i \\ \cdots \\ Y_{i-1} \\ \cdots \\ Z_{i-1} \end{bmatrix} + B\, V_i$$

para la desagregación trimestral; y

$$Z_i = [\, E' \,\vdots\, E'' \,\vdots\, E''' \,] \begin{bmatrix} X_i \\ \cdots \\ Y_i \\ Z_{i-1} \end{bmatrix} + B'' V_i''$$

para la desagregación mensual.

Se requiere, en primer lugar, incorporar dentro de los esquemas (tanto de generación anual como de desagregación) términos relacionados con los niveles por los que se va a pasar en el proceso de desagregación.

En segundo lugar, tales términos adicionales deberán contener no el último valor estacional del año considerado, o del año previo (según la ecuación) sino la totalidad de los valores estacionales. Esto con el propósito de hacer consistente la estructura del modelo y permitir la existencia y preservación de todos los momentos para los niveles sucesivos.

Estas exigencias hacen que los tamaños de las matrices que establecen las relaciones estructurales adquieran dimensiones que ocasionarían problemas en el almacenamiento y manipulación de datos para las aplicaciones prácticas en computador. Por esta razón el empleo del modelo para desagregaciones en niveles sucesivos se hace prohibitivo.

Con la estructura propuesta la desagregación se hace considerando un nivel específico de interés. El proceso se efectúa del nivel anual al nivel de interés.

El esquema propuesto preserva las propiedades de primeros y segundos momentos, la propiedad de la transformación lineal (aditividad) existente entre X y Y, propiedades mantenidas por el modelo de Valencia y Shaake; y una relación adicional, a través de la matriz de covarianza $S_{YY}(1)$.

Sin embargo, la estructuración del modelo con base en uno de los modelos autorregresivos de mas común uso, el esquema de Matalas, limita los alcances del modelo. La estructura no permite la preservación de propiedades especiales presentes en las series generadas con modelos anuales de memoria compleja o no markoviana, propiedades que sí preserva el modelo de Valencia y Schaake al ser usado en combinación con este tipo de modelos.

9. DESARROLLOS ULTERIORES

Con posterioridad al proyecto de grado que sirvió de base al presente artículo, han aparecido nuevos modelos de desagregación , encaminados a enfrentar el carácter no parsimonioso de los mismos.

En efecto, en forma aproximada puede decirse que el número de parámetros del modelo aquí desarrollado crece proporcionalmente con el cuadrado del número de sitios. Así por ejemplo, el nuevo modelo de desagregación aquí propuesto tiene 1602 parámetros si se consideran 4 sitios, 2495 en el caso de 5 sitios, y 9915 cuando existen 10 sitios. Estos datos incluyen los parámetros de la generación anual y los de la desagregación a meses.

A continuación, se describen dos trabajos al respecto.Santos y Salas (1983) hicieron un significativo aporte por medio de una metodología de desagregación por pasos, pero no en la forma simétrica planteada por Valencia y Schaake. Si se trata de desagregar, por ejemplo, años en meses, los autores proceden de la siguiente manera: en el primer paso, los años se desagregan en los meses de enero y las sumas de los restantes 11 meses; en el segundo paso, estas sumas se desagregan en los meses de febrero y las sumas de los restantes 10 meses; y así sucesivamente. Obsérvese que lo anterior es aplicable a cualquier número de sitios.

En cada paso, se utiliza el modelo extendido de Mejía y Rousselle para incluir los valores del mes obtenidos en el paso anterior. Así, en el primer paso, se incluirá un término correspondiente a los meses de diciembre; en el segundo, el término correspondiente a los meses de enero; etc.

Para el primer paso, la inconsistencia teórica del modelo de Mejía y Rousselle es enfrentada con la corrección de Lane, que, como bien se ha destacado, no es satisfactoria. Puede verse que en los pasos siguientes al primero la aplicación del modelo de Mejía y Rousselle no presenta inconsistencias.

Este modelo muestra una reducción significativa del número de parámetros. En efecto, para 4 sitios aparecen 1126 parámetros, para 5 sitios 1745, y para 10 6865.

Con posterioridad, Pachón y Valencia (1987) proponen otro modelo que sigue la línea señalada por Santos y Salas, pero sin tener que recurrir a la corrección de Lane, pues, para la generación anual se emplea un modelo como el propuesto en el presente artículo.

Si se desea desagregar años en meses, Pachón y Valencia proponen que en un primer paso se desagregue los años en los meses de enero, los meses de febrero y las sumas de los restantes 10 meses; en un segundo paso, estas sumas se desagregan en los meses de marzo, los meses de abril y las sumas de los restantes 8 meses; y así sucesivamente. Conviene señalar que en cada paso se incluye siempre a la derecha de la ecuación los valores del último mes obtenidos en el paso anterior y los valores anuales, de manera que lo segundo garantiza una preservación de la estructura de correlación entre los dos niveles de agregación. Esto último no se logra tan explícitamente en el modelo de Santos y Salas, como puede observarse (la dependencia estadística entre los dos niveles de agregación se atenúa en la medida que se avanza en los pasos).

La reducción en el número de parámetros lograda por Pachón y Valencia es parecida, aunque un poco menor, a la obtenida por Santos y Salas. Así, para el caso de 4 sitios aparecen 1236 parámetros, para 5 1920 y para 10 7590.

La siguiente tabla resume la comparación de los diferentes modelos en lo tocante al número de parámetros (ver Pachón y Valencia (1987), página 73).

Para terminar, conviene señalar que los dos modelos comentados en este numeral preservan la aditividad, o sea, la suma (o promedio) de los doce meses en cada sitio es igual al valor anual correspondiente.

10. APLICACION, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se aplicó el Modelo Básico , el Modelo Extendido y el Modelo Propuesto a un caso práctico. La aplicación confirmó los desarrollos teóricos y permitió establecer las siguientes conclusiones:

- El Modelo Básico no presenta inconsistencias en su estructura y preserva todos los estadísticos para los cuales fue diseñado.

- El Modelo Extendido presenta una inconsistencia en su estructura, lo cual hace que no preserve la estructura de correlación que se esperaba.

TABLA No. 1. Comparación del número de parámetros entre los diferentes modelos. La generación anual utiliza el modelo de Matalas modificado para incluir los meses de diciembre del año anterior. La desagregación de años en meses sigue las pautas de cada modelo.

Número de Sitios	Valencia y Schaake	Mejía y Rousselle	Berdugo, García y Valencia	Santos y Salas	Nuevo Modelo propuesto (Pachón y Valencia)
1	92	104	105	79	84
2	355	403	407	293	318
3	789	897	906	642	702
4	1394	1586	1602	1126	1236
5	2170	2470	2495	1745	1920
10	8615	9815	9915	6865	7590

- El trabajo de Lane (1980) puso de presente una inconsistencia teórica del modelo de Mejía y Rousselle, la cual había escapado a la comunidad hidrológica durante varios años. Sin embargo, la corrección propuesta por dicho autor no es satisfactoria.

- El Modelo Propuesto no presenta ninguna inconsistencia y preserva, además de los estadísticos preservados por el Modelo Básico, la estructura de correlación entre eventos estacionales de años sucesivos.

- Los modelos estudiados no son parsimoniosos, es decir, contienen un alto número de parámetros que crece rápidamente con el aumento de sitios que se contemple. Por ello, se presentaron algunos trabajos mas recientes que reducen en forma significativa el número de parámetros y sin perder las bondades principales de los modelos anteriores.

Entre las recomendaciones que se señalan se mencionan las siguientes:

- Verificar si en otras aplicaciones las diferencias entre los valores históricos y generados son tan marcadas como las encontradas para el modelo de Mejía y Rousselle.

- La no preservación de los momentos $S_{XY}(1)$ y $S_{YY}(1)$ en el modelo de Mejía y Rousselle teóricamente podría impedir la preservación de otros estadísticos; es necesario mayor investigación y experimentación que permita sacar resultados concluyentes sobre esto último.

- Investigar la posibilidad de incorporar la corrección propuesta a los denominados modelos de memoria larga, de modo que pueda hacerse su uso conjunto con la desagregación garantizando preservar la covarianza entre estaciones consecutivas de años diferentes.

REFERENCIAS

ALARCON, M.L.F. *Generación secuencial de hidrología multivariada preservando estadísticos a dos niveles de agregación*. Proyecto de Grado, Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia,1975.

BERDUGO M.T., J. I. GARCIA, y D. VALENCIA,*Evaluación crítica de los modelos de desagregación en hidrología*, Trabajo dirigido de grado, Facultad de Minas, Medellín, 1983.

HARMS, A.A. and T.H. CAMPBELL, An extension to Thomas-Fiering model for the sequencial generation of streamflow. *Water Resources Research*, Vol. 3, No 3: pp 653-661,1967.

HOSHI, K., and S. J. BURGES, Disagregation of streamflow volumes. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 105, No.1: pp 27-41,1978.

LANE, W. L. *Corrected parameter estimates for disagregation schemes*. Division of Planning Technical Services, Water andPower Resources Service. Denver, Colorado.1980.

MEJIA, J. M., and J. ROUSSELLE, Disaggregation models in hydrology revisited. *Water Resources Research*, Vol. 12, No 2: pp 185-186,1976

MOREAU, D. H., and E. E. PYATT, Weekly and monthly flows in synthetic hydrology. *Water Resources Research*, Vol. 6, No. 1:pp 53-61, 1970

PACHON, L. O. y D. VALENCIA , *Un nuevo modelo de desagregación en hidrología,* Tesis de Magister, Programa de Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos, Facultad de Minas, Medellín, 1987

SANTOS, E. G., y J. D. SALAS, *Disaggregation modeling ofhydrologic time series,* Tesis de Doctorado, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, 1983

SHAAKE, J. C., M. J. GANSLOW, J. W. FOTHERGILL, and HARBAUGH, T. E.,Multivariate rainfall generator for annual, seasonal, monthly anddaily events, in *Proceding of the International Symposium on Mathematical Modelling Tecniques in Water Resources Systems, Vol. 2*, pp 437- 460, Otawa, Canada, 1971

TAO, P. C., and DELLEUR, J. W. Multistation, multiyear synthesis of hydrologic time series by disaggregation. *Water Resources Research*, Vol. 12, No. 6: pp 1303- 1312,1976

VALENCIA, R. D., and J. C. SCHAAKE, *A disaggregation model for time series analysis and synthesis*. Rep. 149, Ralph m. ParsonsLab. for Water Resour. and Hydrodyn. Mass. Inst. of Technol., Cambridge, 1972

VALENCIA, R. D., and J .C. SCHAAKE Jr., J. C., Disaggregation processes in stochastic hydrology, *Water Resources Research*, Vol. 9, # 3, 1973