

MODELO HIDRODINÁMICO PROMEDIADO A LO LARGO DE LA PROFUNDIDAD PARA LA SIMULACION DE FRENTE SALINOS

Francisco Mauricio Toro Botero, M. Sc, Ph.D.
Profesor Asistente Postgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos
Facultad de Minas - Universidad Nacional de Colombia - Medellín

RESUMEN

En el presente artículo se presenta el desarrollo y la solución numérica de las ecuaciones de un modelo hidrodinámico promediado a lo largo de la profundidad que permite la simulación del avance de un frente salino en aguas claras. Para obtener esta versión del modelo, las ecuaciones de conservación de masa, de momentum y de convección-difusión se promedian a lo largo de la profundidad con la ayuda de la regla de Leibniz. El efecto de la densidad variable (frente salino) se tiene en cuenta modificando los términos de presión en las ecuaciones de momentum. La ecuación de convección-difusión se resuelve para la concentración salina y se utiliza una ecuación empírica que relaciona esta concentración y la temperatura (asumida constante) con la densidad del fluido. Para mejor claridad, se incluyen algunos detalles en la derivación de las ecuaciones.

1. ECUACIONES DEL MODELO

Las ecuaciones del modelo hidrodinámico promediado a lo largo de la profundidad del flujo se obtienen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes y de la ecuación de conservación de masa para fluidos incompresibles. El proceso de integración se realiza mediante la aplicación de la regla de Leibniz. A continuación se ilustra el proceso para la ecuación de conservación de masa. Detalles acerca de este proceso se encuentran en Pinder y Gray, 1977.

La regla de Leibniz, que permite intercambiar el orden de diferenciación e integración, se escribe de la siguiente manera:

$$\int_{\xi}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\xi}^{\eta} u dx - \left[u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{\eta} + \left[u \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]_{\xi} \quad (1)$$

Integrando la ecuación de conservación de masa a lo largo de la profundidad del flujo, se tiene para un fluido incompresible:

$$\int_{\xi}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{\xi}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{\xi}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (2)$$

donde u , v y w son las velocidades en las direcciones X, Y y Z respectivamente. Aplicando la regla de Leibniz a cada término, se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\xi}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\xi}^{\eta} v dz + \left(w - u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{\eta} - \left(w + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_{\xi} = 0 \quad (3)$$

Teniendo presente la condición cinemática en la superficie libre:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(w - u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{\eta} \quad (4)$$

y la condición de fondo impermeable:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \left(w + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_{\xi} \quad (5)$$

se obtiene finalmente:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hU) + \frac{\partial}{\partial y} (hV) = 0 \quad (6)$$

donde

$$U = \frac{1}{h} \int_{\xi}^{\eta} u dz \quad ; \quad V = \frac{1}{h} \int_{\xi}^{\eta} v dz \quad ; \quad h = \eta - \xi \quad (7)$$

Ahora, para un sistema cartesiano las ecuaciones de momentum en direcciones X y Y (plano horizontal) tienen la forma:

Momentum X

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (8)$$

Momentum Y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = f_u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \quad (9)$$

Procediendo de una manera similar que para la ecuación de conservación de masa, las ecuaciones de momentum en direcciones X y Y integran a lo largo de la profundidad del flujo como (ver detalles en Pinder y Gray, 1977):

Momentum X:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(hU) + \frac{\partial}{\partial x}(hUU) + \frac{\partial}{\partial y}(hUV) - fhV + \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\tau_{xz}}{\rho} \right)_{z=\eta} + \left(\frac{\tau_{xz}}{\rho} \right)_{z=\xi} \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\xi}^{\eta} \tau_{xx} dz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\xi}^{\eta} \tau_{xy} dz = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Momentum Y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(hV) + \frac{\partial}{\partial x}(hVU) + \frac{\partial}{\partial y}(hVV) - fhU + \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \left(\frac{\tau_{yx}}{\rho} \right)_{z=\eta} + \left(\frac{\tau_{yx}}{\rho} \right)_{z=\xi} \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\xi}^{\eta} \tau_{xy} dz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\xi}^{\eta} \tau_{yy} dz = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

donde f es el coeficiente de Coriolis que depende de la latitud y de la velocidad de rotación de la tierra.

Asumiendo distribución hidrostática de presiones, el efecto de la densidad variable ($\rho(x,y,t)$) se considera en las ecuaciones de momentum al integrar los términos de presión. A continuación se muestra en detalle el desarrollo para el término de presión en la ecuación de momentum en dirección X.

La condición de presiones hidrostáticas se escribe como:

$$P(z) = g \int_z^{\eta} \rho dz + P_{atm} \quad (12)$$

el gradiente de presiones se escribe, entonces, como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(g \int_0^{\eta} \rho dz + P_{atm} \right) \quad (13)$$

Asumiendo P_{atm} constante y utilizando la regla de Leibniz, ecuación (1), se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{g}{\rho} \left(\int_0^{\eta} \frac{\partial \rho}{\partial x} dz - \rho_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho_{\eta} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad (14)$$

pero $\rho(x,y,t)$, luego

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \int_0^{\eta} dz - \rho_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (15)$$

donde el término $\frac{\partial z}{\partial x}$ se ha despreciado (dominios horizontales). Así evaluando la integral se obtiene finalmente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} (\eta - z) - \rho_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (14)$$

Ahora, se integra este término a lo largo de la profundidad:

$$\int_0^{\eta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dz = \int_0^{\eta} \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} (\eta - z) dz - \frac{g}{\rho} \rho_{\eta} \int_0^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} dz \quad (15)$$

ó

$$\int_0^{\eta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dz = \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \int_0^{\eta} (\eta - z) dz - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \int_0^{\eta} dz \quad (16)$$

y finalmente:

$$\int_0^{\eta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\rho} \right) \left(h^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + g h \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (17)$$

De manera análoga, el gradiente de presiones en la ecuación de momentum Y se integra a lo largo de la profundidad como:

$$\int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\rho} \right) \left(h^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (18)$$

Reemplazando los términos de presión (ecuaciones (17) y (18)), aplicando la ecuación de conservación de masa a los términos convectivos y dividiendo por la profundidad del flujo, las ecuaciones de momentum, ecuaciones (10) y (11), se reducen a:

Momentum X:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + \frac{h}{2} \left(\frac{g}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left(\frac{\tau_{xz}}{h\rho} \right)_{z=\eta} + \left(\frac{\tau_{xz}}{h\rho} \right)_{z=\xi} - \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\xi}^{\eta} \tau_{xx} dz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\xi}^{\eta} \tau_{xy} dz = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Momentum Y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} - fU + \frac{h}{2} \left(\frac{g}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \left(\frac{\tau_{yz}}{h\rho} \right)_{z=\eta} + \left(\frac{\tau_{yz}}{h\rho} \right)_{z=\xi} - \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\xi}^{\eta} \tau_{xy} dz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\xi}^{\eta} \tau_{yy} dz = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Ahora, los términos de fricción en la superficie libre (acción del viento) se simulan mediante una ecuación empírica de la forma (Pinder y Gray, 1977):

$$\left(\frac{\tau_{xz}}{\rho} \right)_{z=\eta} = C_0 W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (21)$$

y

$$\left(\frac{\tau_{yz}}{\rho} \right)_{z=\eta} = C_0 W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (22)$$

donde C_0 es una constante de calibración, y W_x y W_y son las velocidades del viento 10 m. por encima de la superficie libre. Los términos de fricción en el fondo se simulan mediante una forma cuadrática:

$$\left(\frac{\tau_{xz}}{\rho} \right)_{z=\xi} = \frac{gU}{C^2} \sqrt{U^2 + V^2} \quad (23)$$

y

$$\left(\frac{\tau_{yz}}{\rho} \right)_{z=\xi} = \frac{gV^2}{C^2} \sqrt{U^2 + V^2} \quad (24)$$

donde C es el coeficiente de fricción de Chezy, coeficiente que se expresa en función de la rugosidad equivalente a arenas de Nikuradse, como:

$$C = 18 \log_{10} \left(\frac{12h}{K_s} \right) \quad (25)$$

donde K_s es la rugosidad equivalente a arenas de Nikuradse.

Las tensiones de Reynolds integradas a lo largo de la profundidad se expresan en función del coeficiente de turbulencia como:

$$\int_{\xi}^{\eta} \tau_{xz} dz = h \overline{\tau_{xz}} \quad ; \quad \overline{\tau_{xz}} = 2E_t \frac{\partial U}{\partial x} \quad (26)$$

$$\int_{\xi}^{\eta} \tau_{xy} dz = h \overline{\tau_{xy}} \quad ; \quad \overline{\tau_{xy}} = E_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (27)$$

$$\int_{\xi}^{\eta} \tau_{yy} dz = h \overline{\tau_{yy}} \quad ; \quad \overline{\tau_{yy}} = 2E_t \frac{\partial V}{\partial y} \quad (28)$$

donde E_t es el coeficiente de turbulencia, el cual se obtiene mediante la fórmula:

$$E_t = c_1 \rho u^* h \quad ; \quad u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (29)$$

donde c_1 es un coeficiente de calibración, u^* es la velocidad de cizalladura y τ_0 es la fricción en el fondo calculada de las ecuaciones (23) y (24).

Para el cálculo de la concentración salina, C , se utiliza la ecuación de convección-difusión promediada a lo largo de la profundidad. Su forma final después de simplificaciones es (ver

Pinder y Gray, 1977):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(CU) + \frac{\partial}{\partial y}(CV) - \frac{\partial}{\partial x}\left(R_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(R_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) = 0 \quad (30)$$

donde R_x y R_y son los coeficientes de difusión. Los coeficientes de difusión R_x y R_y se expresan en función del coeficiente de turbulencia, E_t , mediante una función del número de Richardson, R , propuesta por Bloss et al, 1988 para modelos tridimensionales y adaptada para el caso bidimensional. La relación entre los coeficientes de dispersión y el de turbulencia se expresa, entonces, como:

$$R_x = E_t (1 + 3R_x)^{-3} \quad ; \quad R_y = E_t (1 + 3R_y)^{-3} \quad (31)$$

Los números de Richardson se estiman de la siguiente manera:

$$R_x = - \frac{\left(\frac{g}{\rho}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2} \quad ; \quad R_y = - \frac{\left(\frac{g}{\rho}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} \quad (32)$$

Finalmente, la densidad del fluido se obtiene mediante una función empírica que la relaciona con la concentración salina C , en partes por mil, y la temperatura (asumida constante en este modelo) del fluido, de la forma (ver Bloss et al, 1988):

$$\rho = \rho_0 \left(1 - [7(T - T_0) - 750C]10^{-6}\right) \quad (33)$$

donde $\rho_0 = 999.972 \text{ Kg m}^{-3}$ es la densidad del agua clara a la temperatura $T_0 = 4^\circ$

2. SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES

La solución numérica de las ecuaciones arriba descritas se obtiene mediante la aplicación de la técnica del elemento eficiente, desarrollada en la Universidad de Mississippi.

Mediante esta técnica, el dominio de cálculo se discretiza en cuadriláteros de 9 nodos. Las variables (independientes y dependientes) se aproximan en cada cuadrilátero mediante unas funciones de interpolación (funciones híbridas). Una vez interpoladas las variables, el error de aproximación se minimiza localmente (método de la colocación) y el conjunto original de ecuaciones diferenciales parciales se transforma en un conjunto de ecuaciones diferenciales

ordinarias cuya única variable independiente es la coordenada temporal. La integración en el tiempo se realiza mediante el esquema de Lax-Wendroff modificado. Una descripción detallada de esta técnica se presenta en Toro, 1994.

Finalmente, la solución del campo de concentraciones (ecuación de convección-difusión se realiza aplicando la misma técnica. Las ecuaciones del flujo y de salinidad se resuelven acopladamente, pero aprovechando el hecho de que el proceso difusivo es más lento que el hidrodinámico, se utilizan escalas de tiempo diferentes para cada uno de ellos.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MODELO 2D

A manera de ilustración se presentan los resultados de aplicar el modelo a la simulación del avance de una cuña salina en una bahía rectangular. Debido a la falta de datos experimentales, los resultados del modelo se deben entender desde el punto de vista cualitativo. Los datos experimentales se utilizarían para la calibración, especialmente en lo referente a los parámetros de turbulencia y a los coeficientes de difusión.

Caso 1: Laguna Rectangular sin Viento.

En este caso se corrió el modelo 2-D en una laguna rectangular (4 km en di-rección Oeste - Este y 3 km en dirección Sur - Norte). Esta laguna se discretizó en elementos rectangulares tal como se muestra en la Figura 1. El flujo a simular consiste en tres canales que aportan agua salada a la laguna y ésta desagua por un canal en el extremo Este del dominio. Los canales de aporte se encuentran localizados en los extremos Oeste, Sur y Norte de la laguna (el ancho de los canales es de 120 m), y cada uno de ellos aporta un caudal constante de 120 m³/s.

Para correr este ejemplo, se utilizaron los siguientes parámetros:

CTUR=	0.1	Coficiente c_1 en ecuación (29).
TSCALE=	3.0	Relación entre intervalo de cálculo en la ecuación de convección-difusión y el hidrodinámico.
CWIND =	0.0	Coficiente C_0 en la ecuación (22).
WINDX =	0.0	Velocidad del viento en dirección X (Oeste-Este).
WINDY =	0.0	Velocidad del viento en dirección Y (Sur-Norte).
C_0 =	10	Concentración salina (en partes por mil) aportada por los canales. Se asume un perfil de concentraciones constante en la vertical.
DT=	2.0	Intervalo de cálculo (s.) para modelo hidrodinámico,

El modelo se "calentó" partiendo de un campo arbitrario de velocidades hasta que se logró obtener el estado permanente. En las Figuras 2 y 3 se muestran el campo de velocidades y las líneas de contorno de la superficie libre, respectivamente, para el estado permanente. Los chorros de los canales descargando en la bahía se aprecian claramente, preservando la simetría

de problema.

Este estado permanente de velocidades se utilizó para correr el caso del avance del frente salino producido por los aportes de los tres canales mencionados anteriormente. En la Figura 4 se muestran las isolíneas de concentración salina después de 60 horas de simulación; en la Figura 5 se muestran las isolíneas de concentración salina después de 120 horas de simulación; en la Figura 6 se muestra el campo de velocidades después de 192 horas de simulación y en la Figura 7 se muestran las isolíneas de concentración salina después de 192 horas de simulación. Obsérvese el perfecto mezclado en las cercanías del canal de salida y las zonas de bajo mezclado en los extremos Norte-Oeste y Sur-Oeste.

Caso 2: Laguna Rectangular con Viento.

En este ejemplo, se corrió el modelo con las mismas características del caso anterior, excepto que se consideró la presencia de viento actuando en la superficie libre. Los parámetros de la acción del viento para este caso son:

CWIND=	1.0E-05
WINDX=	1.0 m/s
WINDY=	1.0 m/s

Este ejemplo utilizó el mismo campo inicial utilizado en el ejemplo anterior (ver Figuras 2 y 3). A partir de ese instante, se incluyó el efecto de viento y se impusieron los perfiles de concentraciones en los canales de entrada a la bahía. En las Figuras 8 y 9 se muestran las isolíneas de concentración salina después de 60 y 120 horas de simulación, respectivamente. En las figuras 10, 11 y 12 se muestran el campo de velocidades, las isolíneas de concentración salina, y las isolíneas de la superficie libre después de 192 horas de simulación, respectivamente. Obsérvese la asimetría producida por la acción del viento (viento con dirección 45° con respecto al eje Oeste-Este).

4. CONCLUSIONES

Se han mostrado las capacidades del modelo para la simulación del avance de cuñas salinas en una bahía. La falta de información experimental no permitió la verificación del modelo. Desde el punto de vista cualitativo, se observa que el modelo produce resultados consistentes. La etapa de verificación quedará pendiente.

La solución numérica de las ecuaciones hidrodinámicas y de transporte, se realiza de forma acoplada, especificando intervalos de cálculo diferentes para las ecuaciones hidrodinámicas y la de transporte. Esta metodología se justifica asumiendo que el proceso de mezclado es más lento que el proceso hidrodinámico.

Las fórmulas empíricas utilizadas para los coeficientes de difusión, ecuaciones (31) y (32);

para los esfuerzos inducidos por el viento, ecuaciones (21) y (22), y para el coeficiente de turbulencia, ecuación (29), se tomaron de la literatura especializada. Su validez para casos particulares es cuestionable. Su aplicación a casos particulares requiere de un estudio y análisis de sensibilidad. Esto se realiza durante la etapa de verificación del modelo.

Observando detalladamente las gráficas presentadas, se observa que el modelo presenta problemas de difusión numérica (campo de concentraciones). Este problema se encuentra en la actualidad en estudio a través de un proyecto de investigación que se presentó a COLCIENCIAS.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Toro, F.M., "Verification of the CCHE-3D Hydrodynamic Model for Open Channel Flow", Ph.D. Dissertation, The University of Mississippi, May 1994.

Bloss, S., et al., "Modeling Turbulent Transport in Stratified Estuary", Journal of Hydraulic Engineering, Vol 114, No. 9, September 1988, pp 1115-1133.

Lehfeldt, R., and Bloss, S., "Algebraic Turbulence Model for Stratified Tidal Flows", Physical Processes in Estuaries, Dronkers and Leussen Editors, Springer, Verlag Publishers.

Koutitas, C.G., "Mathematical Models in Coastal Engineering", Pentch Press, London, 1988.

Fisher, H.B., et al., "Mixing in Inland and Coastal Waters", Academic Press, 1979.

ASCE Task Comitee on Turbulence Models in Hydraulic Computations, "Turbulence Modeling of Surface Water Flow and Transport, parts I to V", Journal of Hydraulic Engineering, Vol 114, No. 9, 1988, pp 1970-1073.

Pinder, G.F., y Gray, W.G., "Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology", Academic Press, 1977.

Marín, S. de J., "Modelo Hidrodinámico Bidimensional Multicapas y de Transporte por Difusión". Tesis de Magister. Universidad Nacional de Colombia, Postgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos, Facultad de Minas, Medellín, 1990.

Holly, F.M., "Dispersion in Rivers and Coastal Waters, Physical Principles and Dispersion Equations", P. Nuvak Editor, Developments in Hydraulic Engineering-3, Elsevier Applied Science Publications, 1985.

Langendoen, E.J., "Flow Patterns and Transport of Dissolved Matter in Tidal Harbours", Ph.

D. Dissertation, Delft University of Technology, Delft, the Netherlands, 1992.

Rodi, W., "Turbulence Models and Their Applications in Hydraulics", Monograph, IAHR, Delft, the Netherlands, 1990.

Zienkiewicz, O., "The Finite Element Method", Mc Graw Hill Book Company, 4th edition, 1991.

Postgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos, "Modelo Hidrodinámico para Simular Patrones de Circulación en Lagunas", Informe Final, Contrato CORPAMAG -UNIVERSIDAD NACIONAL, Enero, 1995

6. AGRADECIMIENTOS.

El autor agradece al Doctor Hernando Sanchez M. y al Ingeniero Roberto Montiel de CORPAMAG por su colaboración durante la ejecución del proyecto "Modelo Hidrodinámico para simular patrones de Circulación en Lagunas Costeras", Proyecto ejecutado por el Postgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos de la Facultad de Minas para CORPAMAG. También, el autor agradece la colaboración de los estudiantes Ana Cecilia Arbeláez, Hernán Darío Bolaños, Carlos Alberto Estrada y Carlos Ariel Pérez por su colaboración en el procesamiento de la información generada por el modelo en el proyecto con CORPAMAG.

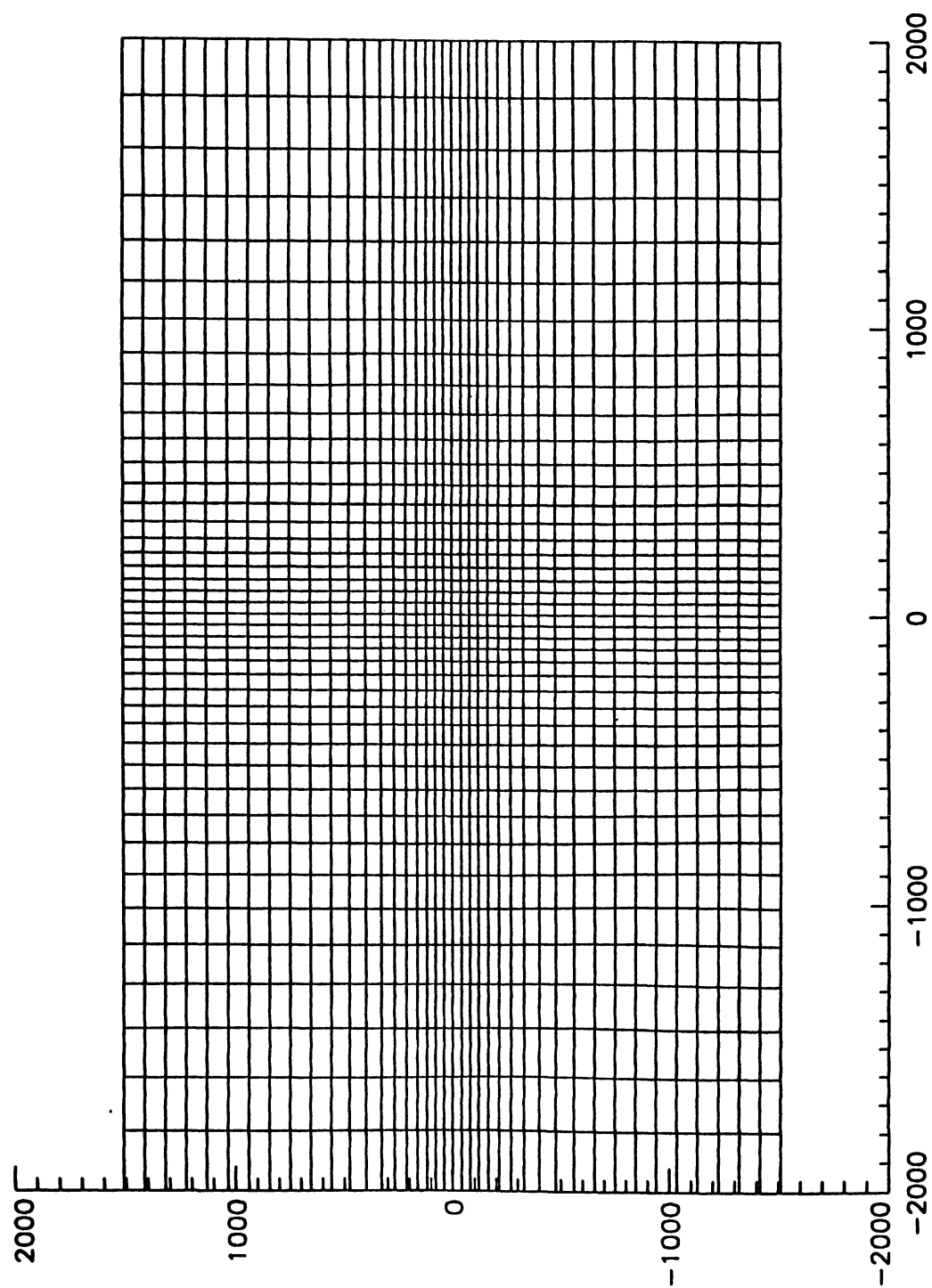


Figura 1 **Malla de Cálculo.**

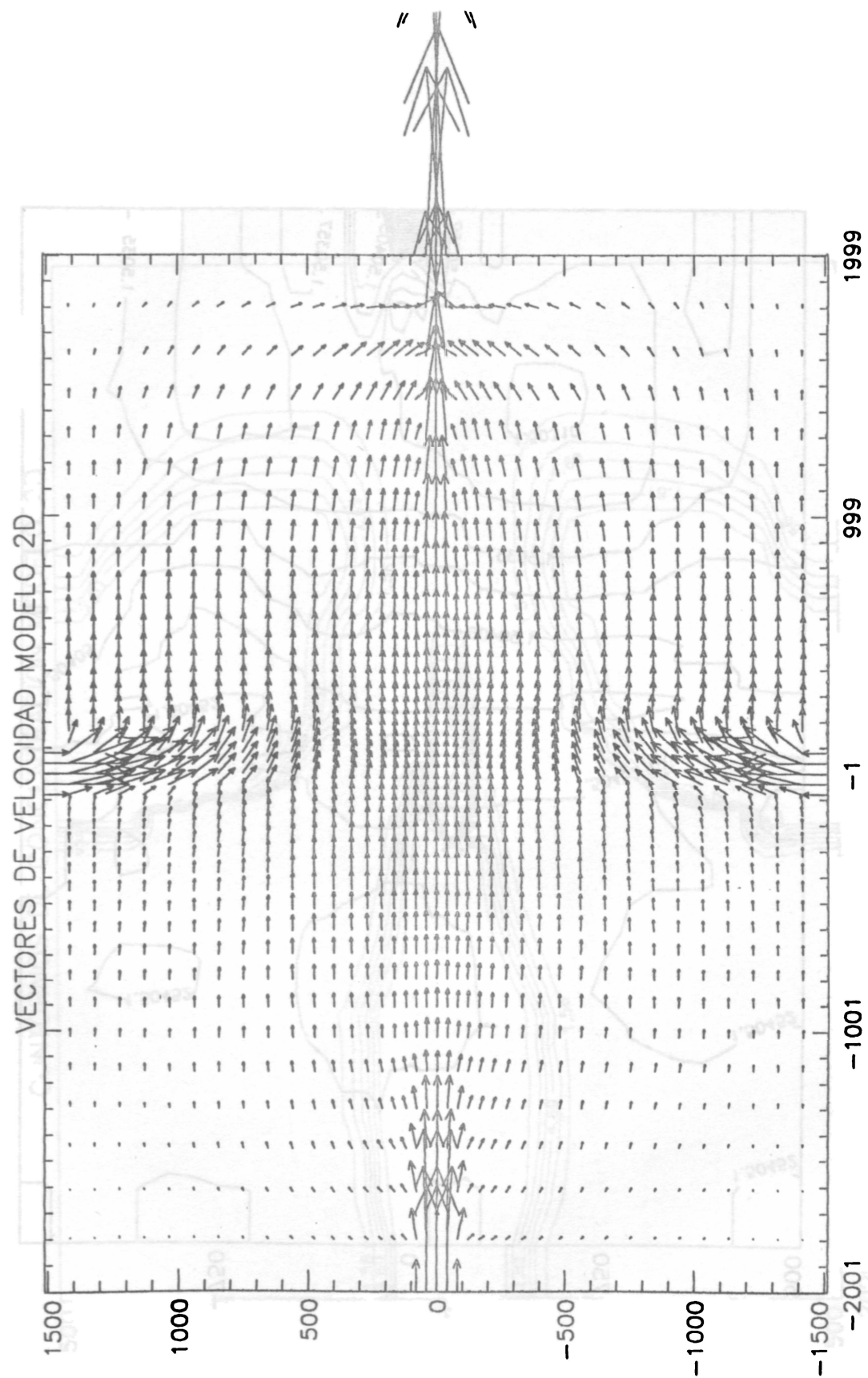


Figura 2 Campo de Velocidades para el Estado Permanente sin Salinidad.

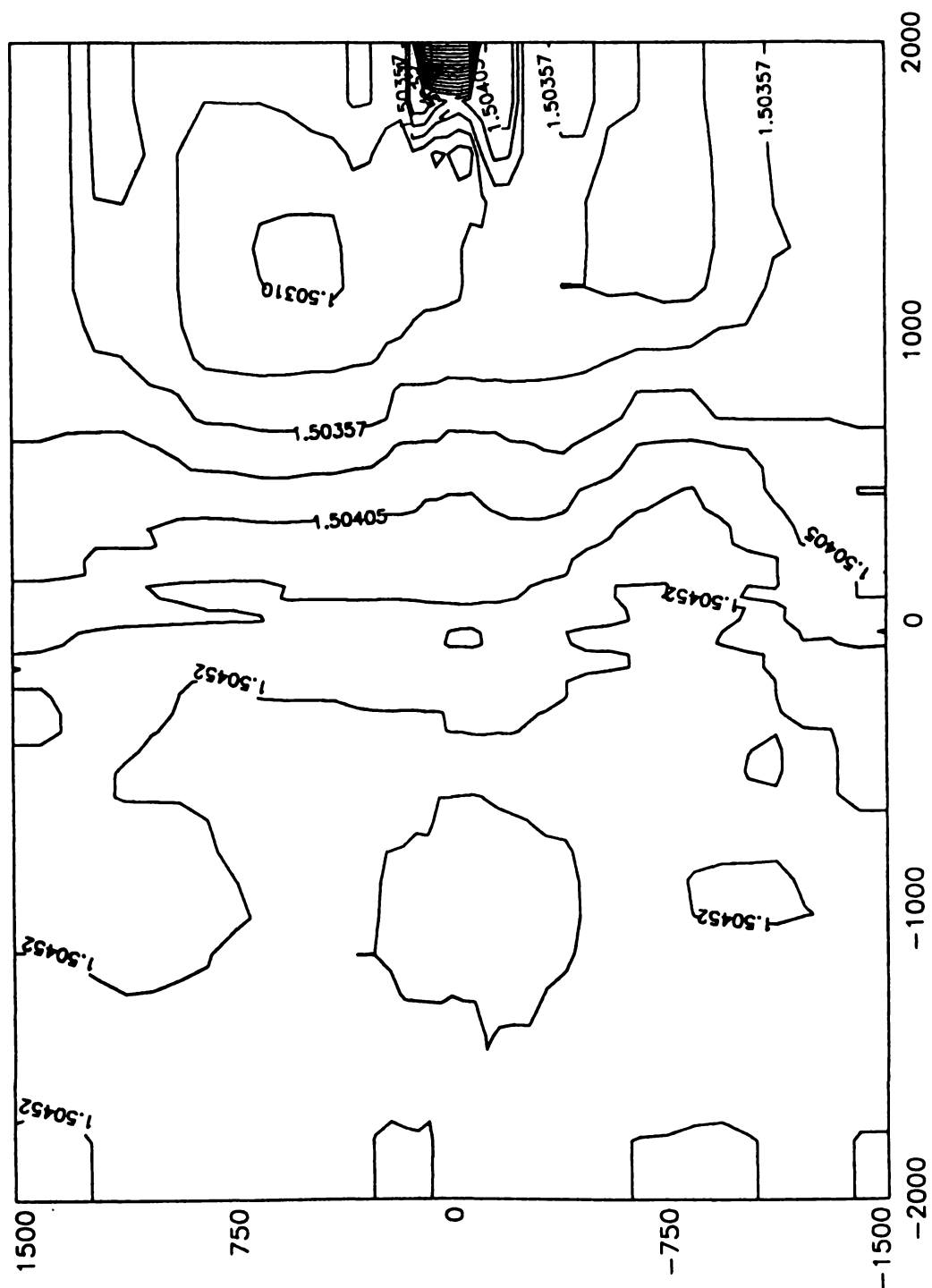


Figura 3 Isolneas de la Superficie Libre para el Estado Permanente sin Salinidad

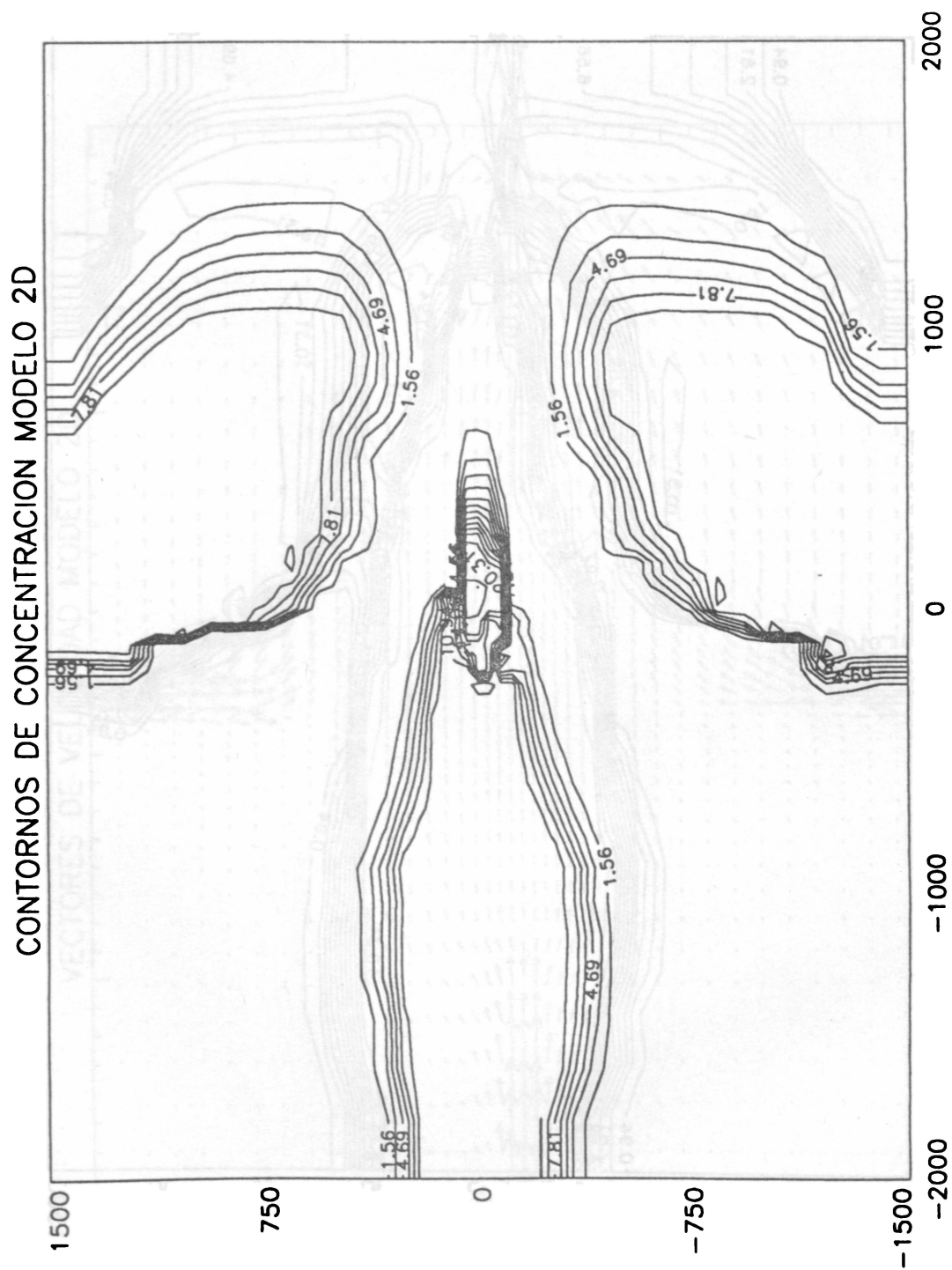


Figura 4 Isolíneas de Concentración Salina para T = 60 Horas. Caso sin Viento

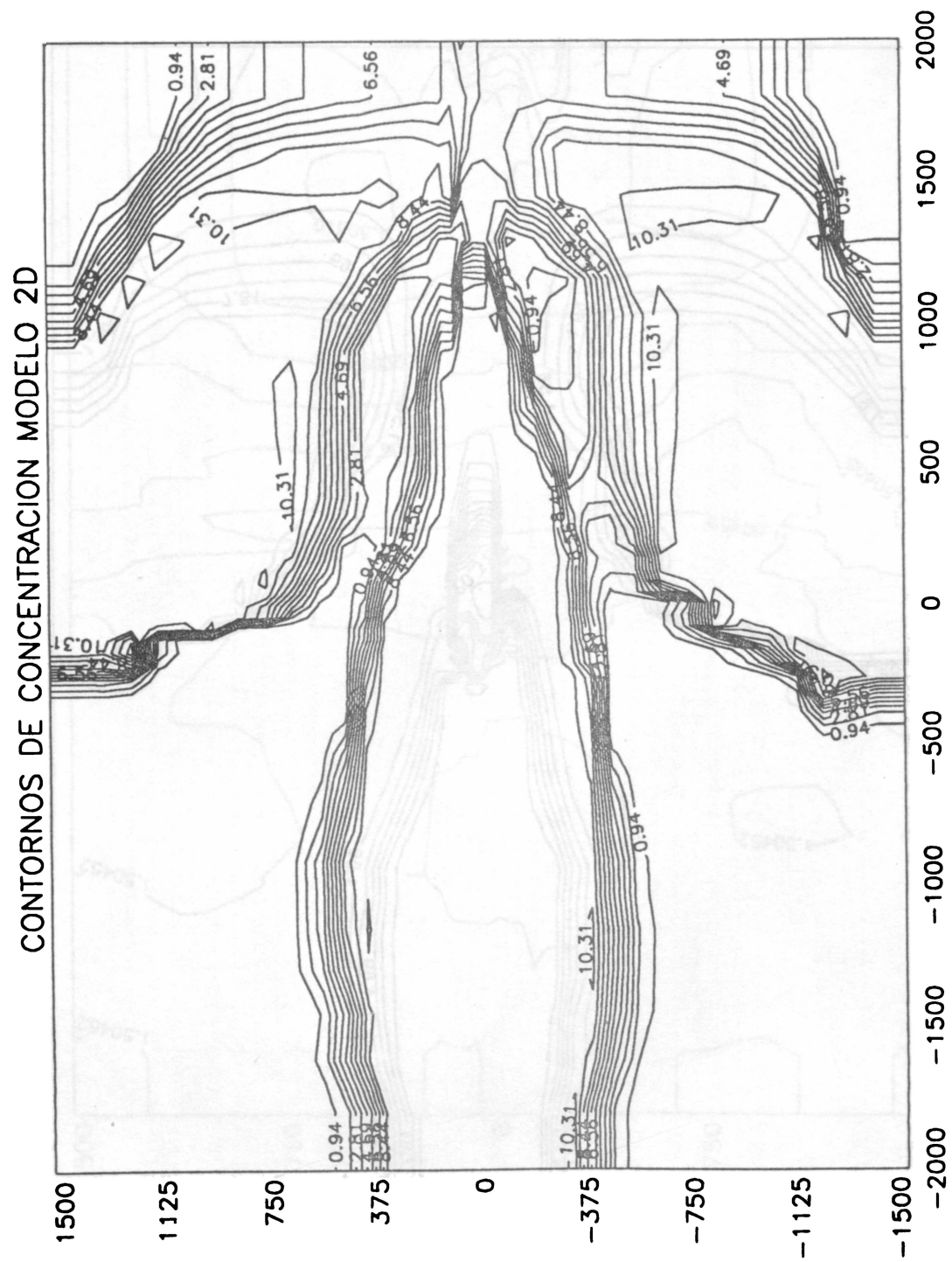


Figura 5 Isolíneas de Concentración Salina para $T = 120$ Horas. Caso sin Viento

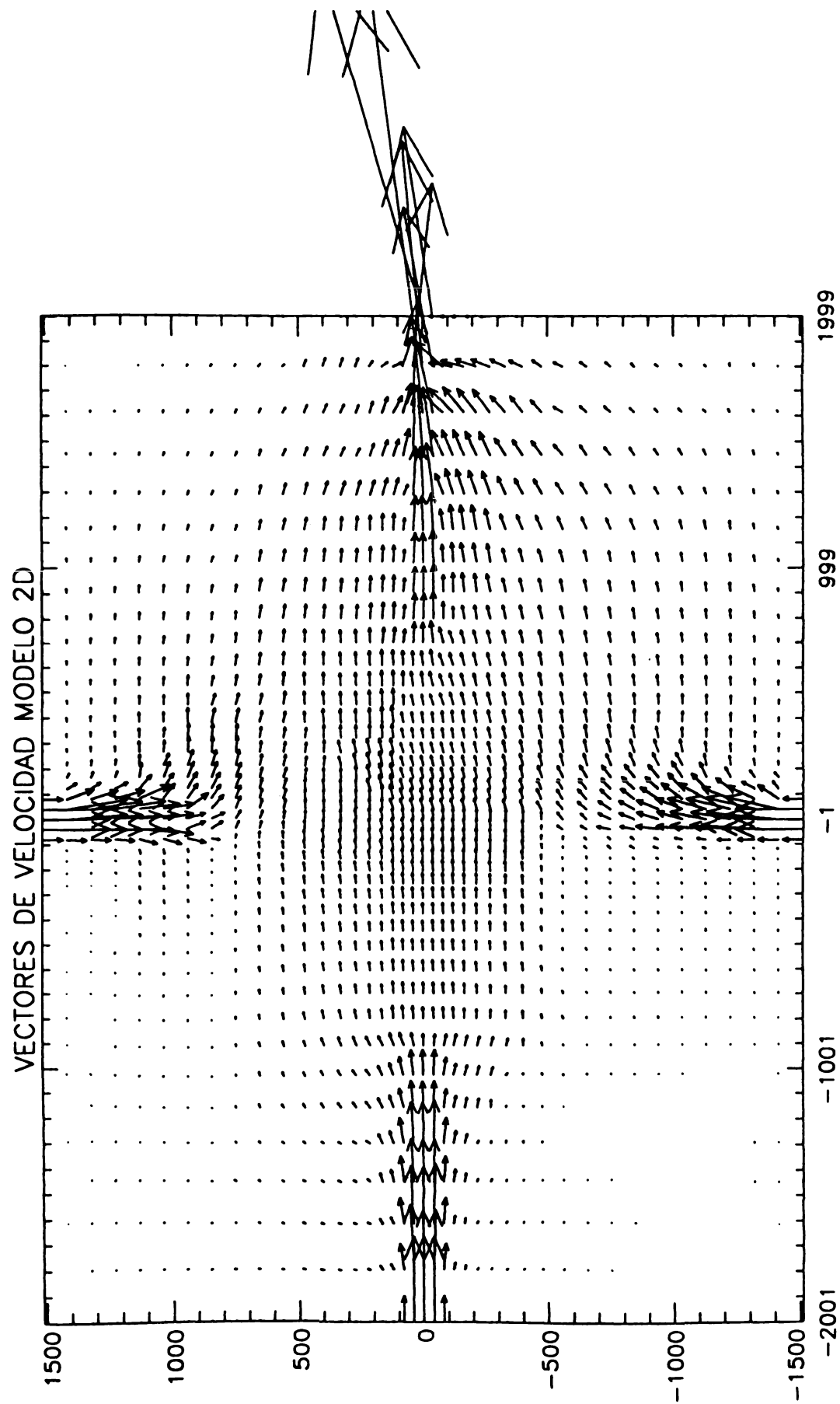


Figura 6 Campo de Velocidades para $T = 192$ horas. Caso sin Viento.

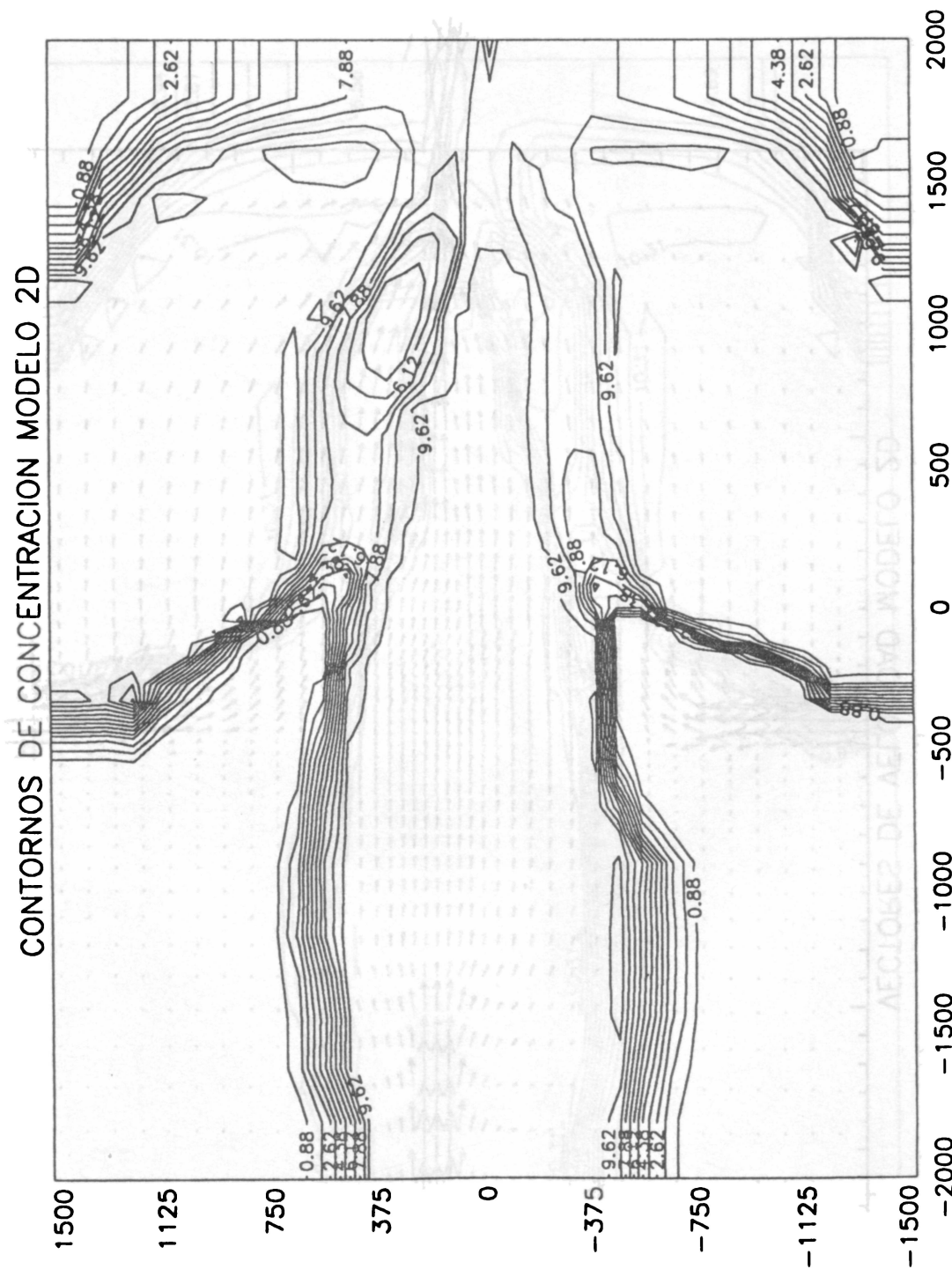


Figura 7 Isolíneas de Concentración Salina para T = 192 Horas. Caso sin Viento.

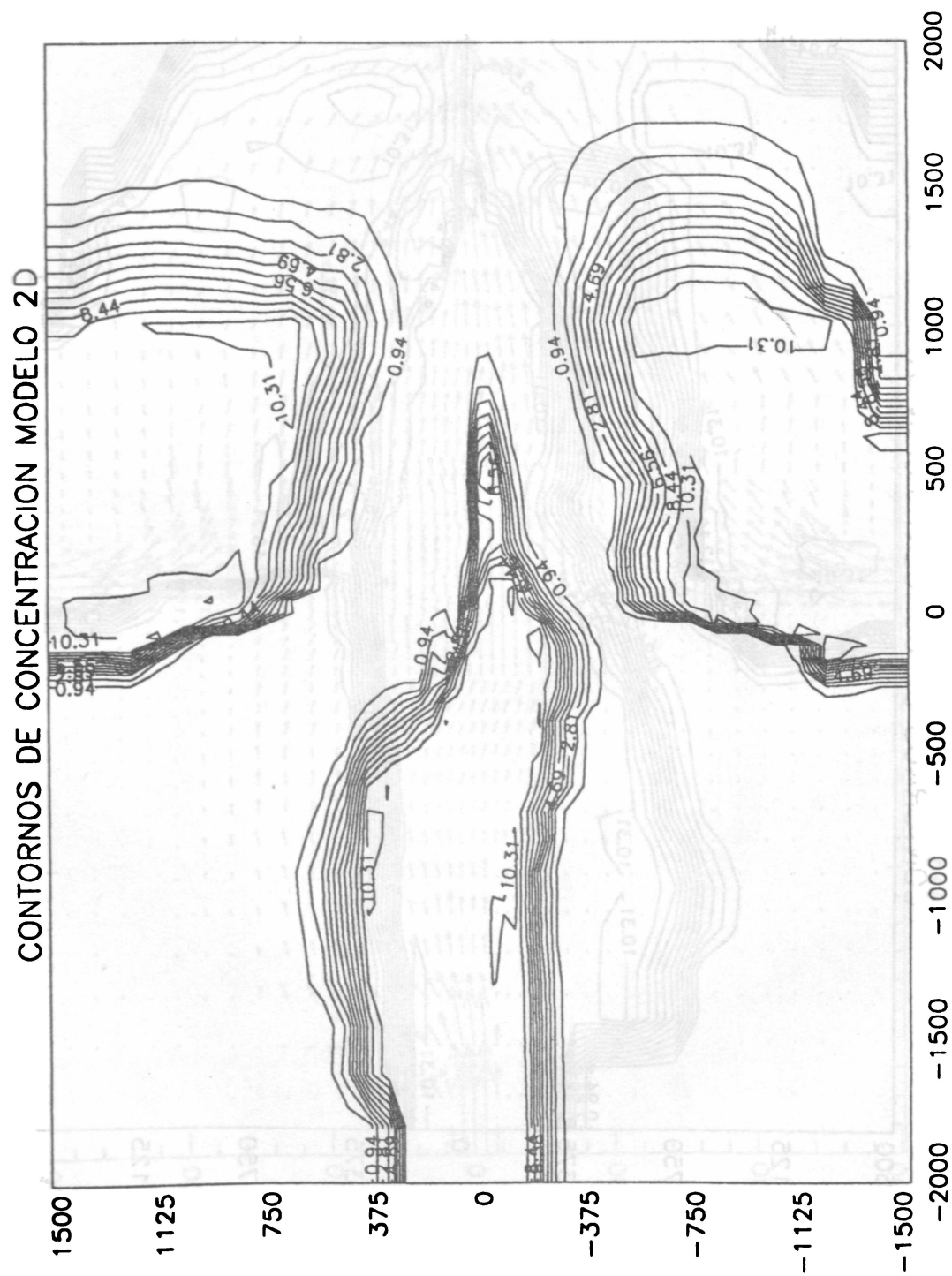


Figura 8 **Isolíneas de Concentración Salina para T = 60 Horas. Caso con Viento.**

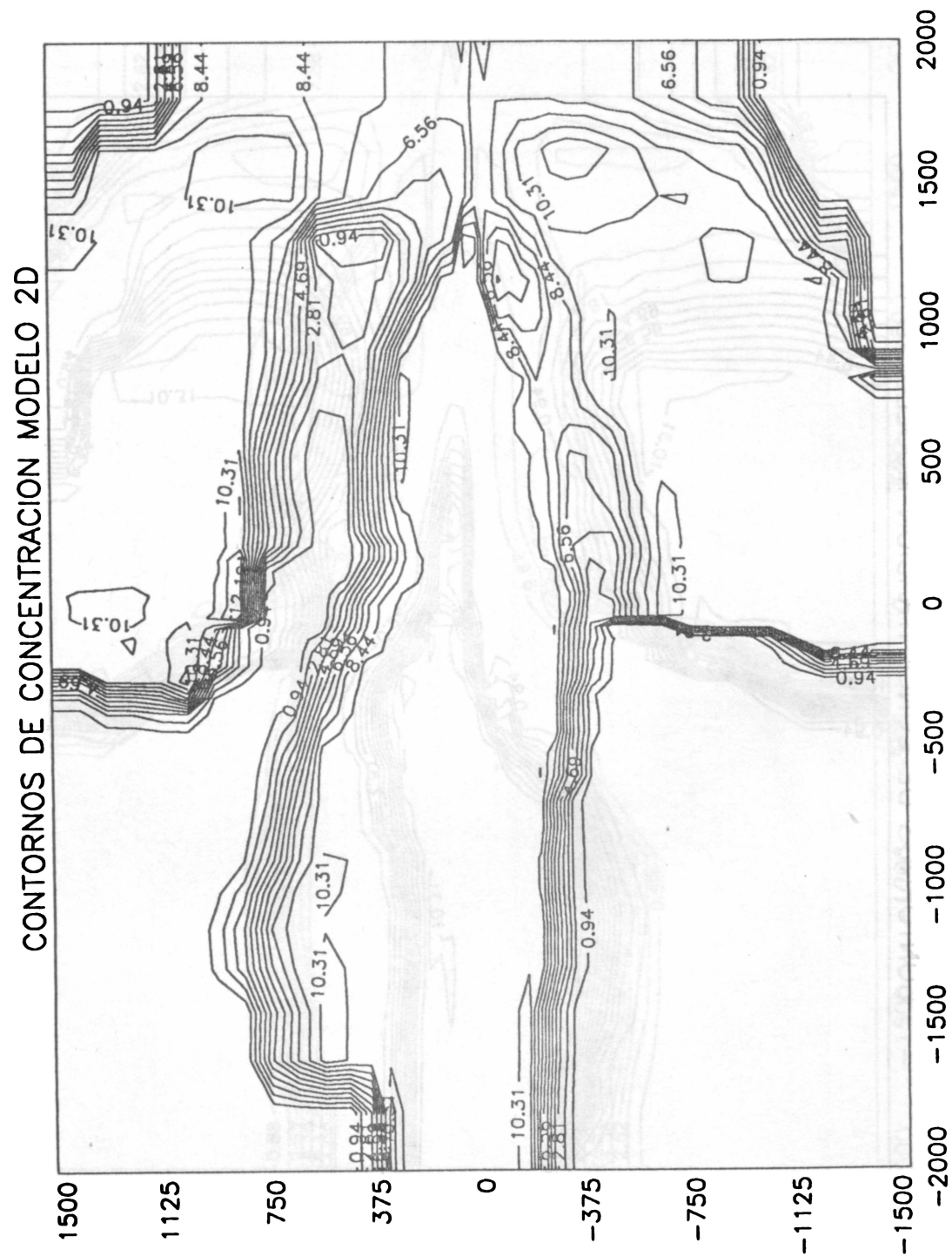


Figura 9 **Isolíneas de Concentración Salina para $T = 120$ Horas. Caso con Viento.**

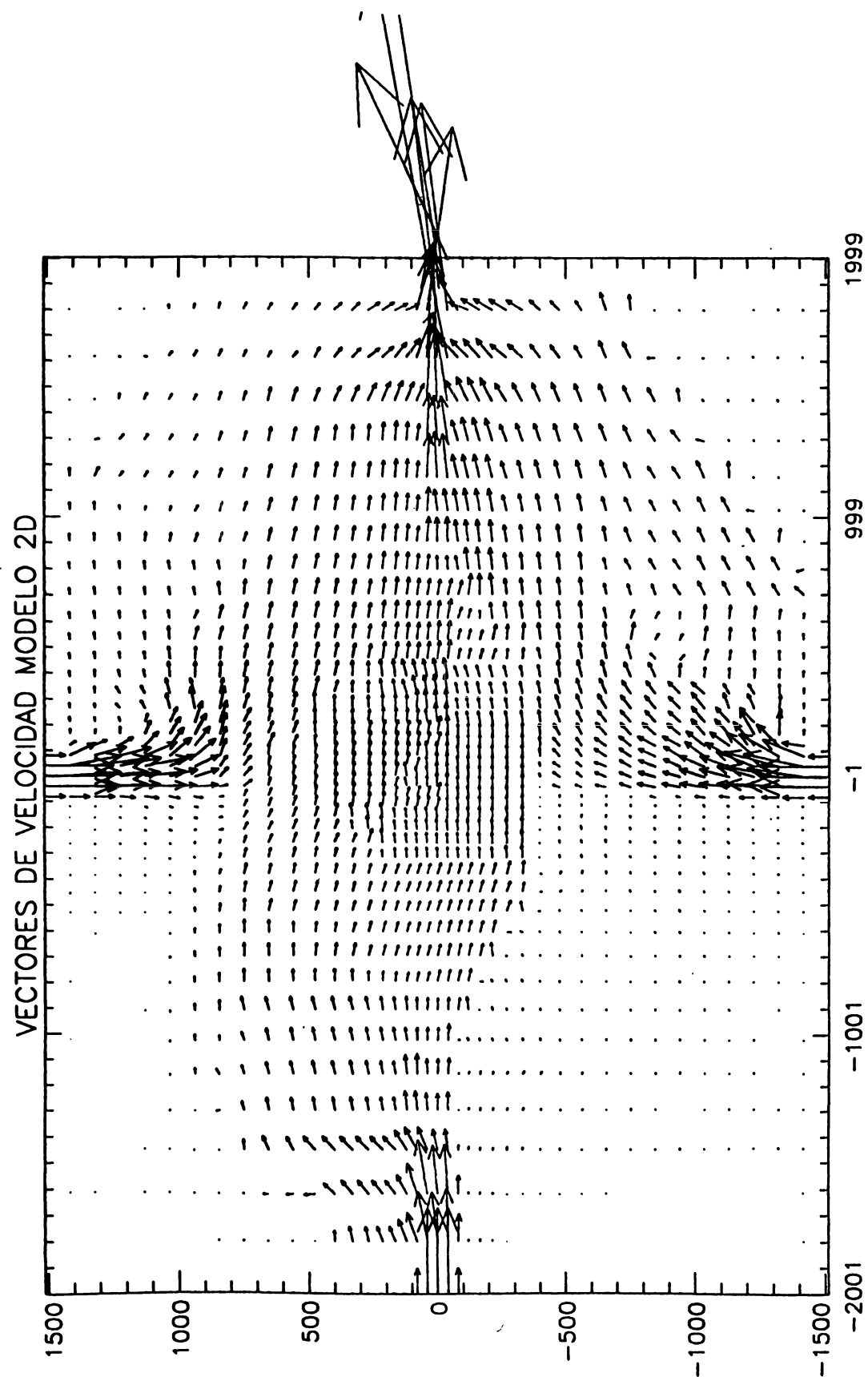


Figura 10 Campo de Velocidades para $T = 192$ horas. Caso con Viento.

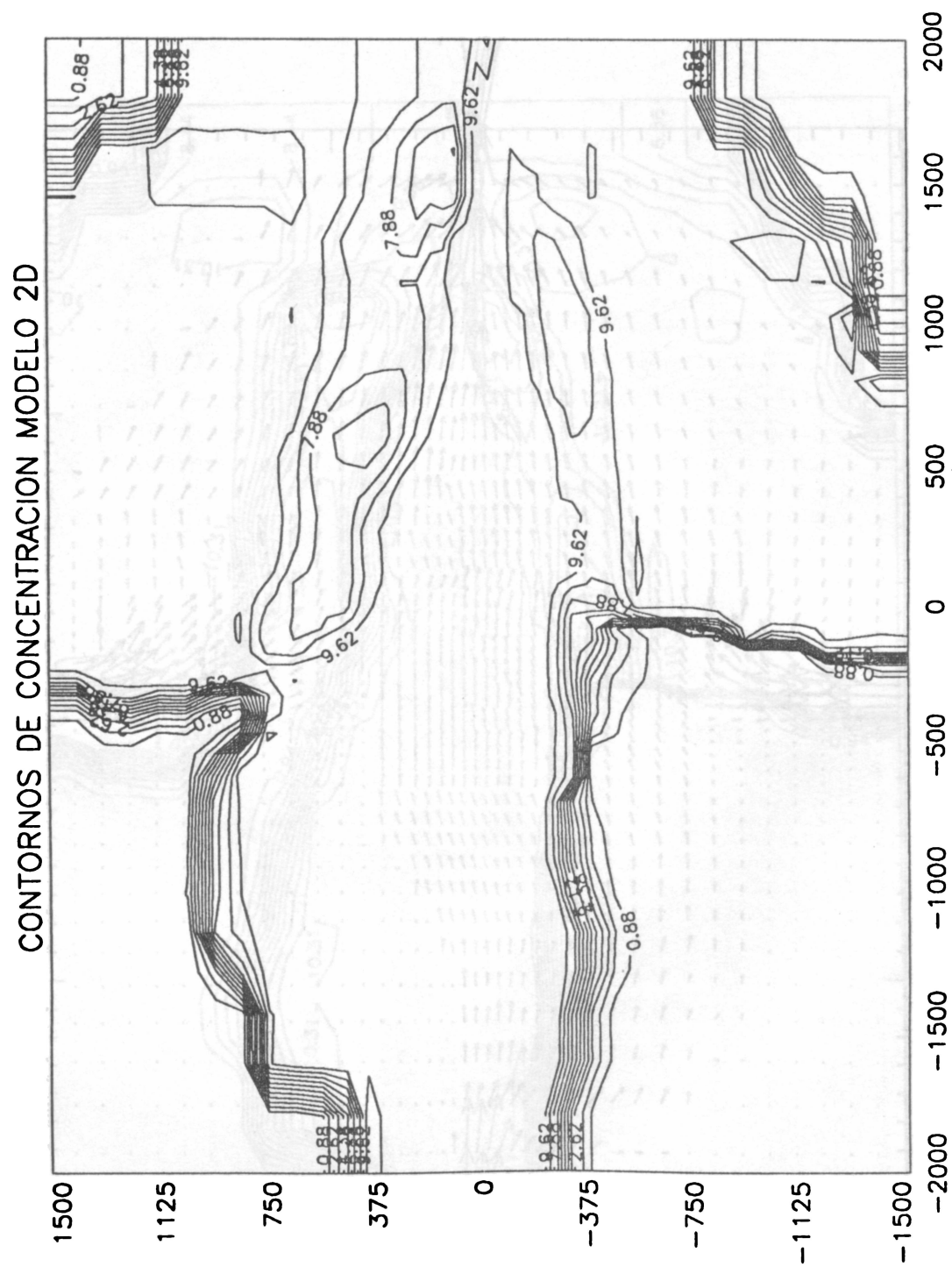


Figura 11 Isolíneas de Concentración Salina para $T = 192$ Horas. Caso con Viento.

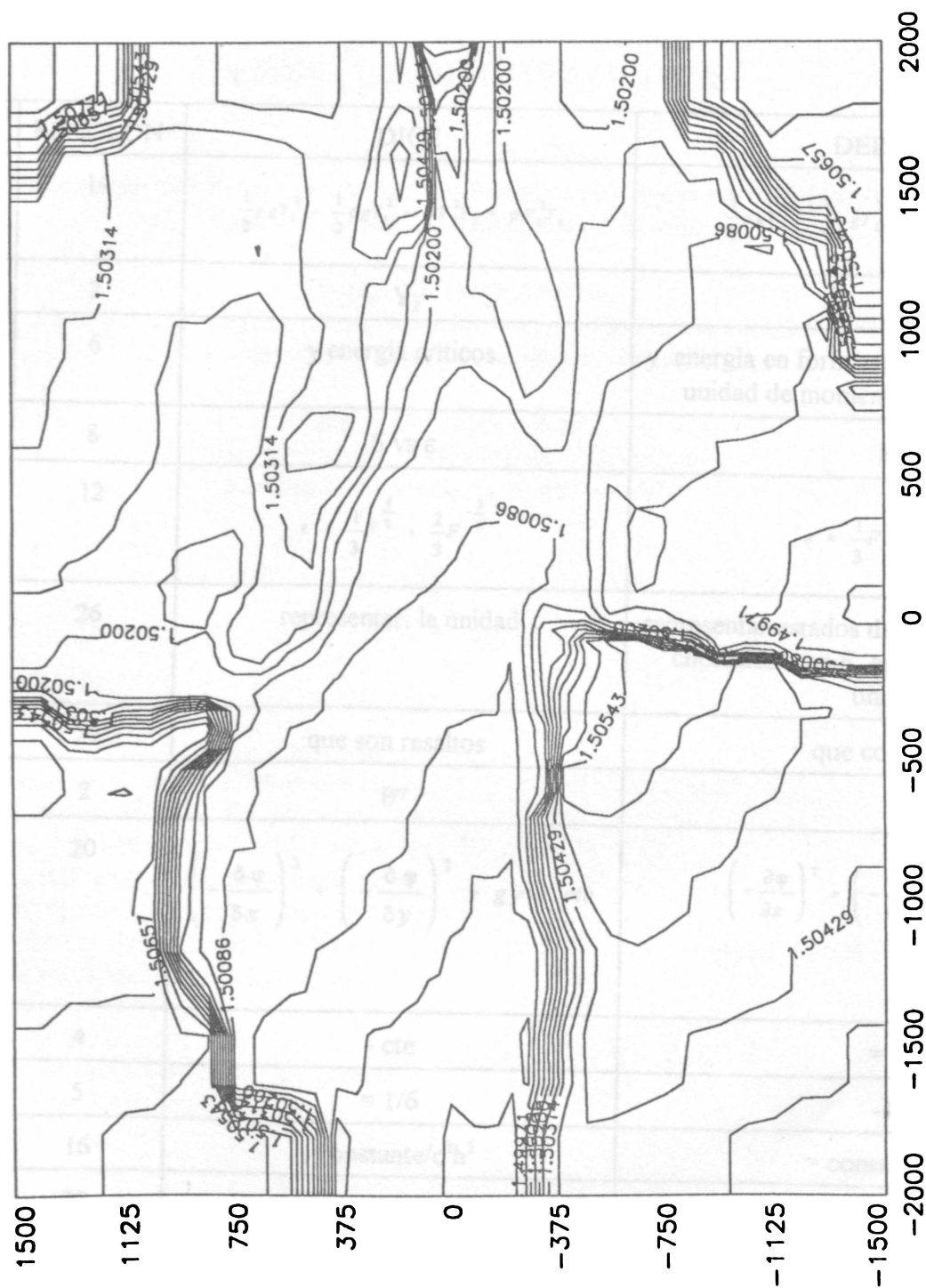


Figura 12 **Isolíneas de la Superficie Libre para T = 192 Horas. Caso con Viento.**

FE DE ERRATAS

PAG	COL	REGLON	DICE	DEBE DECIR
119	1	14	$\frac{1}{2}\rho g Y_1^2 = \frac{1}{2}\rho g Y_2^2 = \rho V_2^2 Y_2 = \rho V_1^2 Y_1$	$\frac{1}{2}\rho g Y_1^2 - \frac{1}{2}\rho g Y_2^2 = \rho V_2^2 Y_2 - \rho V_1^2 Y_1$
120	2	2	Y_2	Y_2^*
121	1	6	y energía críticos.	y energía en forma adimensional , digamos por unidad de momentum y energía críticos.
121	2	8	S vs ϵ	s vs e
121	2	12	$\epsilon = \frac{1}{3}F^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}F^{-\frac{2}{3}}$	$e = \frac{1}{3}F^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}F^{-\frac{2}{3}}$
122	1	26	representar: la unidad	representar estados de flujo: resaltos ondulares cnoiales, con F_1 apenas por encima de la unidad....
122	1	29	que son resaltos	que con resaltos
126	1	2	θ^y	e^y
126	1	20	$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + gy - cte$	$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + gy = cte$
126	2	4	- cte	= cte
126	2	5	= 1/6	-1/6
126	2	16	- constante/ $c^2 h^2$	= constante/ $c^2 h^2$
126	2	23	- 1 +	= 1 +
127	1	3	1	l
127	1	12	$(h_{\max}-1)$	$(h_{\max}-l)$
128	1	7	...[1F ₁ (k) = $(h_{\max}-1)$[1F ₁ (k) = $(h_{\max}-l)$...
128	1	8	$(h-1)F_1(k) = (h_{\max}-1)$...	$(h-l)F_1(k) = (h_{\max}-l)$...
133	2	10	diedro, b)	diedro, θ)

