EL RESALTO ONDULAR Y LAS ONDAS CNOIDALES

José Javier Jaramillo
Estudiante del Posgrado de Aprovechamiento en Recursos Hidráulicos.
Facultad de Minas. U.N.

Jorge Alberto Naranjo
Profesor del Posgrado de Aprovechamiento en Recursos Hidráulicos.
Facultad de Minas. U.N.

Carlos Alberto Palacio T.
Estudiante del Posgrado de Hidráulica.
Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes.

RESUMEN

En este artículo se presenta, en forma concisa, el desarrollo teórico del modelo planteado por Korteweg y De Vries para ondas cnoidales, y la aplicación de dicha teoría para la obtención del perfil de resaltos ondulares. Las deducciones se basan en un modelo de Lamb de 1932.

INTRODUCCION

En la teoría clásica, a pesar del alto número de experimentos y de la precisión de las ecuaciones obtenidas para los resaltos hidráulicos cuyos números de Froude son altos, existe una brecha de incertidumbre para aquellos resaltos en los cuales el número de Froude es muy bajo, denominados resaltos ondulares. Este artículo propone obtener el perfil del resalto ondular mediante la teoría de ondas no lineales cnoidales.

LAS ONDAS CNOIDALES

Lamb, buscando facilitar el modelo de ondas no lineales de Korteweg y De Vries, utiliza el esquema planteado por Rayleigh, en donde las funciones de corriente (ψ) y potencial (φ), siguen la relación: (Naranjo, 1989).

$$\varphi + i\,\psi - \theta^{iy\frac{d}{dx}}\, F(x)\,,\;\; F\,(x)\; real \qquad (1)$$

con

$$\theta^{iy\frac{d}{dx}} = \cos\left(y\frac{d}{dx}\right) + i\left(sen\left(y\frac{d}{dx}\right)\right)$$

y expresando el coseno y el seno en sus respectivas series

$$\left[1 - y^2\frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^2}{2!} + y^4\frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^4}{4!} \ldots\right] +$$

$$i\left[y\frac{d}{dx} - y^3\frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^3}{3!} \ldots\right]$$

ahora como

$$\left[\frac{d}{dx}\right]^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

resulta para las funciones de potencial y de corriente

$$\varphi = F - \frac{Y^2}{2!}\ddot{F} + \frac{Y^4}{4!}\ddot{\ddot{F}} + - \ldots\ldots \tag{2}$$

$$\psi = Y\dot{F} - \frac{Y^3}{3!}\dddot{F} + - \ldots\ldots \tag{3}$$

El análisis se desarrolla en un sistema que viaja con velocidad c. La línea del fondo del canal es la línea $\psi = 0$ la de la superficie, con h la profundidad de aguas quietas,

$$\psi = -ch \tag{4}$$

(El signo menos por la convención de flujos de Rankine) y con la ecuación de la energía

$$\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{\delta\varphi}{\delta x}\right)^2 + \left(-\frac{\delta\varphi}{\delta y}\right)^2\right] + gy - constante \tag{5}$$

reemplazando (2) y (3) en (5) y en (4), y despreciando los términos de orden mayor que 3, se obtiene:

$$\dot{F}^2 - Y^2\left[\dot{F}\,\dddot{F} - F''^2\right] - cte - 2gy \tag{6}$$

$$y\,\dot{F} = \frac{1}{6}y^3\dddot{F} = -c\,h \tag{7}$$

Asumiendo que F'(x) y los coeficientes diferenciales en las ecuaciones anteriores varían muy poco con cambios en x de orden h, los términos en las ecuaciones anteriores pueden considerarse de amplitud decreciente, y por aproximaciones sucesivas puede eliminarse F de (7). Se tiene:

$$\dot{F} = c - h\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{6}y^2\left(\frac{1}{y}\right) + \ldots\ldots\right]$$

y esto llevado a (6) produce, hasta el orden antes dicho,

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{3}\frac{\dot{y}^2}{y} - \frac{constante}{c^2 h^2} - \frac{gy^2}{c^2 h^2} + c'$$

Para c' otra constante de integración. Para puntos de la onda donde la tangente es cero, o sea, en los máximos y en los mínimos, y'= 0 y llamando h_{max}, h_{min} a los límites superior e inferior de la onda, al eliminar las constantes se obtiene:

$$\frac{1}{3}\dot{y}^2 - 1 + \frac{y}{h_{max}\,h_{min}}\cdot$$
$$\cdot\left[y - (h_{max} + h_{min}) + \frac{gy}{c^2 h^2}\left[(h_{max} + h_{min})\,y - h_{max}\,h_{min} - y^2\right]\right]$$

y al llamar

$$l = \frac{c^2 h^2}{g\,h_{máx}\,h_{min}} \tag{8}$$

resulta

$$\frac{1}{3}\dot{y}^2 = \frac{g}{c^2 h^2}(y-l)\ (h_{máx}-y)\ (y-h_{mín}) \qquad (9)$$

Se puede notar que para que (9) tenga sentido físico, l debe ser menor o como máximo igual que h_{min}, ya que de otra manera la parte derecha de (9) daría un valor negativo, y como se ve en la parte izquierda de (9), debe ser siempre positiva.

Ahora Lamb asume como solución de (9)

$$Y = h_{máx}\cos^2 X + h_{mín}\,\mathrm{sen}^2 X \qquad (10)$$

con X una función desconocida de x.

Llevando (10) a (9) se obtiene

$$\frac{dX}{dx} = \sqrt{\frac{3g\,(h_{máx}-l)}{4\,c^2 h^2}}\ \sqrt{1-\frac{h_{máx}-h_{mín}}{h_{máx}-l}\,sen^2 X}$$

Utilizando (8) y reorganizando se obtiene:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{h_{máx}-l}{h_{máx}\,h_{mín}\,l}}\,dx =$$

$$\frac{dX}{\sqrt{1-\frac{h_{máx}-h_{mín}}{h_{máx}-l}\,sen^2 X}} \qquad (11)$$

con

$$k = \frac{(h_{máx}-h_{mín})}{(h_{máx}-l)} \qquad (12)$$

el lado derecho de (11) es un integrando elíptico canónico y se tendrá en una cresta con x = 0 (y'(0) = 0 y y (0) = h_{max}) de (10) que X(0) = 0, y por tanto

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{l\,h_{máx}\,h_{mín}}{(h_{máx}-l)}}\int_o^{X(x)}\frac{dX}{\sqrt{1-k^2\,sen^2 X}}$$

Haciendo

$$b = \sqrt{\frac{h_{máx}\,h_{mín}\,l}{3(h_{máx}-l)}} \qquad (13)$$

Resulta

$$\frac{x}{2b} = \int_o^x \frac{dX}{\sqrt{1-k^2\,sen^2 X}} = F(X, k) \qquad (14)$$

Con F(X, k) según la notación para integrales elípticas de primer orden. Esta función es conocida, su inversa la función am(x/2b), devuelve la coordenada X en función de x. Llevando X=am(x/2b) a (10) y con cos (am(x/2b) = cn (x/2b) la "función cnoidal"(Sokolnikoff, Higher Mathematics for Engineers and Physicists, 1941), se deduce como perfil de la onda Korteweg y De Vries.

$$y = h_{mín} + (h_{máx}-h_{mín})\,\mathrm{cn}^2\left(\frac{x}{2b}\right) \text{ módulo } k \qquad (15)$$

Observe que en la ecuación (10) y = h_{max} en X = 0 y cada que X se incrementa π y como la distancia en x entre dos máximos está definida como la longitud de onda λ, entonces de (14) se obtiene que:

$$\frac{\lambda}{2b} = 2\int_o^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dX}{\sqrt{1-k^2\,sen^2 X}} = 2F_1(k) \qquad (16)$$

$$\lambda = 4bF_1(k)$$

Con $F_1(k)$ integral elíptica completa de primer orden. Y por conservación de la masa se tiene que

$$\frac{h\lambda}{2b} = \int_o^{\lambda}\frac{ydx}{2b}$$

Con h nivel del agua en un punto muy lejano de la perturbación de la onda, o nivel de agua quieta, y con y de (10), y

$$\frac{dx}{2b} = \frac{dX}{\sqrt{1 - k^2 \, sen^2 X}}$$

de (14), se tiene

$$\frac{h\,\lambda}{2b} = 2 \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{(h_{máx} \cos^2 X + h_{mín} \, sen^2 X)}{\sqrt{1 - k^2 \, sen^2 X}} \, dX$$

$$h\lambda = 4b \, [\, l \, F_l \, (K) \, + \, (h_{máx} - l) \, E_l \, (K) \,]$$

ó

$$(h-l) \, F_l \, (K) \, = \, (h_{máx} - l) \, E_l \, (K) \qquad (17)$$

Con $E_1(k)$; integral elíptica completa de segundo orden.

Con las ecuaciones (12), (13), (16) y (17) se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con siete incógnitas, h_{max}, h_{min}, λ , k, b, l y h. Para resolver este sistema se deben conocer los valores de tres de las siete incógnitas anteriores.

2. CALCULO DEL PERFIL DEL RESALTO ONDULAR MEDIANTE LA TEORIA CNOIDAL

La teoría arriba desarrollada es aplicable a un tren de ondas viajando a una celeridad c, o haciendo un cambio en el punto de vista del observador, a un tren de ondas de un resalto ondular con el observador viajando con la onda a una velocidad c; pero se debe tener mucho cuidado en la interpretación de las variables, ya que la variable h que arriba tenía un significado físico claro, ahora pasa a ser un valor netamente matemático.

Conociendo los valores de las crestas (h_{max}), de las depresiones (h_{min}) y las longitudes de onda (λ), de cada solitón de tren de ondas del resalto ondular, se obtienen los valores de los parámetros de la onda resolviendo el sistema de ecuaciones antes mostrado de la siguiente manera:

- Se asume un valor de k entre cero y uno (como se ve claro en (12)).
- Con k se obtienen los valores de $E_1(k)$ y $F_1(k)$.
- De (16) se tiene que $b = \lambda \, / 4 \, F_1(K)$
- De (13) se tiene

$$l = \frac{3b^2 \, h_{máx}}{h_{máx} \, h_{mín} + 3b^2}$$

- De (17) se tiene que

$$h = \frac{(h_{máx} - l) \, E_1 \, (K) + l \, F_1 \, (K)}{F_1 \, (K)}$$

- Por último, se comprueba con (12) si el valor asumido para k era el correcto. Si así es, los valores obtenidos en b, l, h y k son los correctos. Si no, se realiza una nueva iteración para el nuevo valor de k.

Ahora, con los parámetros de Korteweg y De Vries conocidos para cada solitón, se procede a elaborar el perfil del resalto ondular utilizando la ecuación (15) así:

Para un valor x_i dado y con los correspondientes valores de los parámetros de Korteweg y De Vries se halla $x_i/2b_i$. De (14) se tiene que

$$\frac{x_i}{2b_i} = \int_o^x \frac{dX}{\sqrt{1 - k_i^2 \, sen^2 X}}$$

donde K_i es el valor de K corresponde al solitón i.

Se dan valores de X hasta que la integral sea igual al valor $x_i/2b_i$, cuando esto se logre, se halla con este valor de X,$\cos^2(X)$, que es igual a $\cos^2(am(x_i/2b_i)) = cn^2\,(x_i/2b_i)$, por lo tanto ya se puede hallar la ordenada y, correspondiente al valor de x_i. El perfil del solitón i del resalto ondular se obtuvo de la siguiente manera:

Para x_i entre cero y $\lambda_i/2$

$$y = h_{min}\,(i-1) + (h_{máx}\,(i-1) - h_{min}\,(i))\; cn^2\left(\frac{x_i}{2b_i}\right),$$

módulo k_i

Para x_i entre $\lambda_i/2$ y λ_i

$$y = h_{min}\,(i) + (h_{máx}\,(i) - h_{min}\,(i))\; cn\left(\frac{x_i}{2b_i}\right),$$

módulo k_i

Debido al gran número de cálculos e iteraciones necesarias para obtener el perfil de un resalto ondular completo se hace indispensable la elaboración de un programa de computador.[1]

Conocido el perfil del resalto ondular, sólo resta conocer la celeridad de cada solitón, la cual es obtenida fácilmente a partir de (8)

$$c = \sqrt{\frac{g\, h_{máx}\, h_{mín}\, l}{h^2}} \qquad (18)$$

CONCLUSIONES

La teoría de ondas cnoidales es realmente una buena teoría para comprender el tren de ondas de un resalto ondular. Jaramillo y Palacio (1994), con un buen número de resaltos ondulares medidos, muestran gráficamente como el perfil del resalto ondular obtenido por la teoría cnoidal es muy parecido al perfil real del resalto ondular, sin embargo concluyen que hay un mayor parecido entre el perfil real y el obtenido por la teoría de ondas lineales en el cual las crestas se "empinan"y se vuelven "picudas"y las depresiones se hacen "anchas". Pero en este mismo trabajo comparan la celeridad de las ondas obtenidas por (18) y por la teoría lineal con la velocidad de la corriente medida aguas arriba, y ven que aunque ambos ajustes son muy buenos (discrepancias entre celeridades de las ondas y velocidades de la corriente aguas arriba generalmente menores del 10%), el ajuste mediante la teoría cenoidal es mucho mejor, lo cual coincide con lo dicho por varios autores, Favre (1935), Keulegan y Patterson (1940), Benjamín y Lighthill (1954), Monsalve y Palacio (1991). Las discrepancias parece que sólo se explican con teoría de "ondas hipercnoidales".

BIBLIOGRAFIA

Benjamín, T. y M. Lighthill On Cnoidal Waves and Bores. Proc. Royal Soc. London, vol 224, pag. 448-459, 1954.

Favre, H. Etude Théorique et Experimentale des Ondes de Traslation Dans les Canals Decouvertes. Dunod. París, 1935.

1 Quien esté interesado en el programa para cálculo y graficación del perfil del resalto ondular por la teoría de Korteweg y De Vries, puede comunicarse con los autores.

Jaramillo, J. y C. Palacio. Resaltos ondulares y Ondas Solitarias. Trabajo dirigido de grado. Universidad Nacional. Medellín, 1994.

Keulegan G.H. y G. W. Patterson. J. Res. Nat. Bur. Stand. Vol. 24 pag. 47, 1940.

Lamb, H. Hydrodunamics. 6a. de. Dover, 1932.

Monsalve F. y C. Palacio. Solitones y Resaltos Hidráulicos. Trabajo dirigido de grado. Universidad Nacional. Medellín, 1991.

Naranjo, J. Ondas en superficies líquidas. Sin Publicar. Medellín, 1989. Seminario en el Posgrado de Recursos Hidráulicos. Universidad Nacional, Medellín, 1987.

Sokolnikoff y Sokolnikoff. Higher Mathematics for Engineers and Physicists. Mc. Graw Hill. N.Y., 1941.