

# RESALTOS HIDRÁULICOS Y DISIPACIÓN DE ENERGÍA

**Luis Javier Montoya J., Lydia Patricia Botero B. y Jorge Alberto Naranjo M.**  
**Posgrado en Aprovechamiento de los Recursos Hidráulicos**  
**Facultad de Minas**  
**Universidad Nacional de Colombia, Sede de Medellín**

## RESUMEN

En este trabajo se hace un análisis del resalto hidráulico y de la influencia de la fricción en la disipación de energía. Para ello se hacen mediciones de la geometría de diferentes tipos de resaltos (con números de Froude entre 2.0 y 13.5) y se comparan los resultados teóricos con los valores medidos. En dicha comparación encuentra que la teoría sobre estima el valor de la altura secuente y subestima la energía disipada en un resalto hidráulico debido a las pérdidas por fricción. Finalmente se encuentran nuevas expresiones para el resalto hidráulico que consideran la fuerza de fricción.

## ABSTRACT

An analysis of the hydraulic jump and the influence of friction forces on energy dissipation through the hydraulic jump is presented. The geometry of different types of hydraulic jumps (with Froude numbers ranging from 2.0 to 13.5) is measured and compared to the classical theoretical values. Theoretical values are found to overestimate the sequent depth and to underestimate the energy dissipated through the hydraulic jump, due to the fact that theory ignores friction losses. Finally, new expressions considering friction forces are introduced for predicting sequent depths and energy dissipation of the hydraulic jump.

## 1. INTRODUCCIÓN

El resalto hidráulico es uno de los casos más conocidos de flujo gradualmente variado y es frecuentemente estudiado por todos aquellos que han tenido algún contacto con la hidráulica o con la mecánica de fluidos. El tema es considerado en la mayoría de los textos básicos donde se enuncian las principales hipótesis con las que se trata dicho fenómeno.

Generalmente se ha considerado el fenómeno en forma bidimensional sin tener en cuenta el problema local de turbulencia, garantizando la conservación del momentum lineal en un volumen de control lo suficientemente grande, despreciando la fuerza de fricción con las paredes y el fondo del canal o la resistencia ocasionada por obstáculos con los que se localiza el resalto. Bajo las anteriores simplificaciones e hipótesis se han obtenido las expresiones clásicas para la profundidad secunete y las pérdidas de energía. Para determinar otras características del resalto como la longitud, eficiencia de mezclado, parámetros de forma, etc., es común el uso de expresiones empíricas que, por lo general, intentan relacionar tales características con el número de Froude aguas arriba  $F_1$ .

Como una primera aproximación hacia una descripción más real del fenómeno, se ha involucrado y cuantificado la fuerza de

fricción para mirar su importancia en la explicación del fenómeno. Algunos autores, como Rajaratnam [16] han hecho mediciones de la fricción usando un tubo Preston y han encontrado relaciones con el número de Froude aguas arriba. Otros autores como Jaramillo y Palacio [9] en sus estudios sobre resaltos ondulares, han notado que la teoría clásica no es adecuada, por lo menos, en ese tipo de resaltos.

## 2. ANALISIS TEÓRICO

El resalto hidráulico es un fenómeno que se produce en la transición entre un flujo supercrítico y uno subcrítico. En dicha transición se produce alta turbulencia y disipación de energía, por lo que en la práctica tiene gran cantidad de aplicaciones y se constituye en un tema de interés diverso en la hidráulica de canales.

Utilizando el teorema de la conservación del momentum con las fuerzas y el volumen de control indicados en la Figura 1 y despreciando la componente horizontal del peso y la fuerza de fricción, se obtienen las expresiones clásicamente utilizadas en el estudio del resalto:

$$\frac{Y_2^*}{Y_1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8F_1^2} - 1 \right) \quad (1)$$

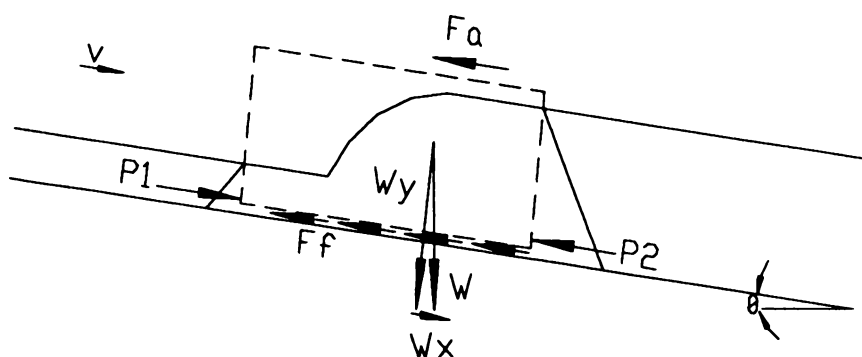


FIGURA 1. Fuerzas sobre el Volumen de Control.

Haciendo un balance energético entre la sección aguas arriba y aguas abajo - usando para esto la altura secuente obtenida mediante (1) - se obtiene una expresión para las pérdidas de energía (2), la cual se cumple bajo los supuestos antes enunciados.

$$\Delta E_0 = \frac{(Y_2^* - Y_1)^3}{4Y_1Y_2^*} \quad (2)$$

La teoría clásica del resalto hidráulico iguala el momentum entre dos secciones y de allí se desprenden las ecuaciones antes expuestas. Sin embargo, por las diferencias observadas entre las alturas teóricas y las experimentales y por las discrepancias entre la teoría y la práctica sobre la disipación de energía obtenidas en su estudio de resaltos ondulares, Benjamin & Lighthill [3] hablan de una cierta disipación por fricción en el resalto y por lo tanto, de una disipación en el momentum lineal, por lo menos en ese tipo de resaltos.

Si no se desprecia la fuerza de fricción, se obtienen las siguientes expresiones para esta fuerza en función de las alturas medidas aguas arriba y aguas abajo y de la altura secuente calculada en (1):

$$F_f = \frac{\rho g (Y_2 - Y_1)}{2Y_2} (Y_2^* - Y_2) (Y_1 + Y_2 + Y_2^*) \quad (3)$$

$$\Delta E = \frac{(Y_2 - Y_1)^3}{4Y_1Y_2} + \left( \frac{Y_1 + Y_2}{2Y_1Y_2} \right) F_f \quad (4)$$

Las expresiones (3) y (4) se convierten en (1) y (2) si  $F_f = 0$ . En (4) se observa claramente que existe una componente de la disipación de energía que representa las pérdidas internas o por coros y otra componente adicional debida a la fuerza de fricción con las paredes y el fondo.

Las hipótesis asumidas para el anterior análisis son las siguientes:

- El faltante de energía y momentum disipados se debe a la Fuerza de Fricción.
- No se considera disipación de energía por ruido, tensión superficial y formación de espumas y fricción con el aire.
- No se incluye disipación de momentum por fluctuaciones turbulentas de la velocidad.
- Se ha reducido el problema a un caso bidimensional.
- Las alturas son tomadas en secciones en las cuales se cumple una distribución uniforme de velocidades e hidrostática de presiones.
- Se considera coeficientes de Coriolis  $\alpha=1.0$  y de Boussinesq,  $\beta = 1.0$ .
- Se considera canal rectangular y de baja pendiente.

Las expresiones (3) y (4) suministran nuevas formas de estimar la fuerza de fricción y la energía disipada entre las secciones, pero se hace necesario la medición de la altura aguas abajo. Para solucionar este problema se utilizaron dos modelos para calcular la fuerza de fricción, uno hace uso de expresiones de capa límite para una placa plana y el otro de la expresión de Chézy. A continuación se presentan estos modelos.

El primero es el de capa límite para una placa plana. Se supone que se forman dos capas límite; una aguas arriba del resalto y otra aguas abajo de éste. Se supuso, y parece razonable, que en el lugar donde se forma el resalto hidráulico, fruto de la turbulencia y el gradiente de presiones inducidos por la transición, se destruye la capa límite formada aguas arriba y se empieza a formar una nueva capa límite. Es bueno notar que es difícil definir el inicio y el final de la capa límite, siendo ésta una limitante fuerte en el estudio.

La fuerza de fricción puede ser encontrada de la siguiente manera:

$$F_f = \frac{1}{2} C_d \rho V^2 L$$

Donde  $C_d$  es un coeficiente de dragado que depende del tipo de problema. En este caso se usará el coeficiente hallado por Blassius para la capa límite sobre una placa plana laminar o turbulenta.

Sumando las contribuciones de fricción aguas arriba y aguas abajo se obtiene:

$$F_f = \frac{1}{2} C_{d1} \rho L_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_{d2} \rho L_2 V_2^2 \quad (5)$$

En donde:  $C_d = \frac{1.328}{\sqrt{\frac{VL}{v}}}$  si la capa límite es laminar ( $R < 320000$ ).

Si la capa límite es turbulenta ( $R > 320000$ ),

$$C_d = \frac{0.072}{\sqrt[5]{\frac{VL}{v}}}$$

El segundo modelo para aplicar es el de la ecuación de Chézy la cual considera que el flujo es uniforme (hipótesis bastante fuerte).

$$F_f = \rho g R_H L S_0 = \rho K V^2 L$$

donde  $K = \frac{g}{C^2}$

Se tienen diferentes formas de encontrar el coeficiente  $C$  de Chézy. Una bastante simple se desprende de la fórmula de Manning:

$$C = \frac{\phi}{n} R_H^{1/6}$$

Donde  $\phi = 1$  para el sistema métrico.

Sumando las contribuciones de la fuerza de fricción aguas arriba y aguas abajo se obtiene:

$$F_f = \rho K_1 V_1^2 L_1 + \rho K_2 V_2^2 L_2 \quad (6)$$

Donde  $K_1 = \frac{g}{C_1^2}$  y usando la fórmula de

Manning se tiene que  $C_1 = \frac{\phi}{n} R_{H1}^{1/6}$ ,

$$K_2 = \frac{g}{C_2^2}, \quad C_2 = \frac{\phi}{n} R_{H2}^{1/6}$$

### 3. METODOLOGÍA

La metodología seguida fue la siguiente: se tomaron datos de 38 resaltes en un rango de números de Froude entre 2.0 y 13.5 y caudales entre 18.57 l/s hasta 81.62 l/s. Se midió con limnómetros la profundidad aguas arriba y aguas abajo del resalto y las correspondientes abscisas, de manera que se pudiera estimar la disipación por fricción entre dos secciones. Se comparó la pérdida de energía medida con la que suministra la fórmula clásica del resalto:

$$\Delta E = \frac{(Y_2 - Y_1)^3}{4Y_1 Y_2}$$

Se comparó también la altura medida aguas abajo,  $Y_2$ , con la que suministra la fórmula clásica del resalto:

$$Y_2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8F_1^2} - 1 \right) Y_1$$

De estas comparaciones se analizó que tan significativa es la disipación por fricción y si es o no adecuado despreocuparla. Al encontrar que la disipación por fricción si es significativa, se modificaron las ecuaciones de resalto considerando la fuerza de fricción.

El paso siguiente fue encontrar cual de las expresiones (5) ó (6) era mas adecuada para estimar la fuerza de fricción. Por último, se modificaron los coeficientes de dragado para que se adecuaran mejor a la situación física estudiada y se introdujo una corrección por perímetro mojado. Finalmente, para cerrar el problema, se encontraron relaciones entre las longitudes de desarrollo de la capa límite y el número de Froude aguas arriba.

#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Conforme a lo enunciado anteriormente, lo primero que se tiene que demostrar es que la fuerza de fricción es una fuerza importante en el estudio del resalto hidráulico y que despreciarla, como lo hace la teoría clásica, es inadecuado.

Para hacer esta demostración se comparó la energía disipada, calculada por la teoría clásica del resalto con la energía disipada medida. La expresión (7) permite encontrar la energía disipada medida, calculando la energía aguas arriba y aguas abajo y restándolas.

$$E_1 = Y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1$$

$$E_2 = Y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

Considerando el caso de un canal horizontal se tiene que

$$\Delta E = Y_1 - Y_2 + \frac{1}{2g} (V_1^2 - V_2^2) \quad (7)$$

En la Figura 2 se muestra la comparación entre la energía calculada con la expresión (2) y la medida, expresión (7). Se puede observar que la energía disipada medida en el resalto hidráulico es mayor que la que calculada con la fórmula clásica del resalto. Se observa que las diferencias entre la energía disipada teórica y la medida

aumentan para valores altos de la energía disipada. También se puede observar que existe una tendencia muy bien definida y que los datos se encuentran poco dispersos.

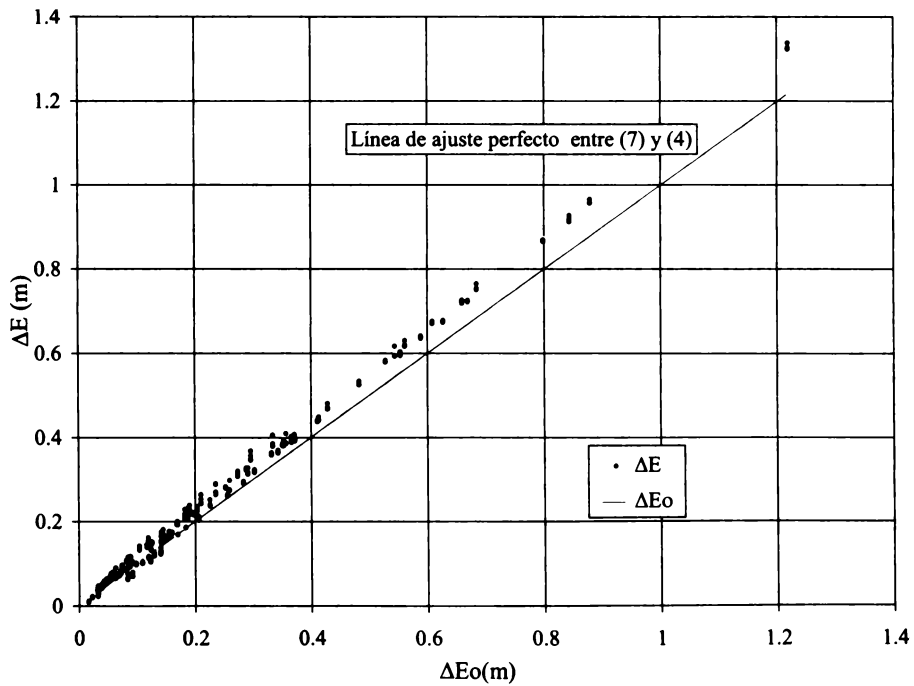
En la Figura 3 se hace una comparación entre el  $Y_2$  medido y el  $Y_2^*$  calculado mediante la teoría clásica del resalto. Y se encuentra que en general el  $Y_2$  medido es menor que el  $Y_2^*$ . También se encuentra que dicha diferencia es mayor en la medida en que aumenta la profundidad secuente; tal diferencia solo puede explicarse si existe algún factor que provoque una pérdida de energía adicional, por lo tanto puede ser explicada con un buen grado de aproximación por la pérdida inducida por la fuerza de fricción, la cual, como sabemos, fue despreciada para el cálculo de  $Y_2^*$ .

Las Figuras 4 y 5 presentan los porcentajes de error en la energía disipada (8) y en la altura secuente (9). Se encuentran porcentajes de error hasta del 36.7% en la energía disipada y hasta del 70.5% en la altura secuente.

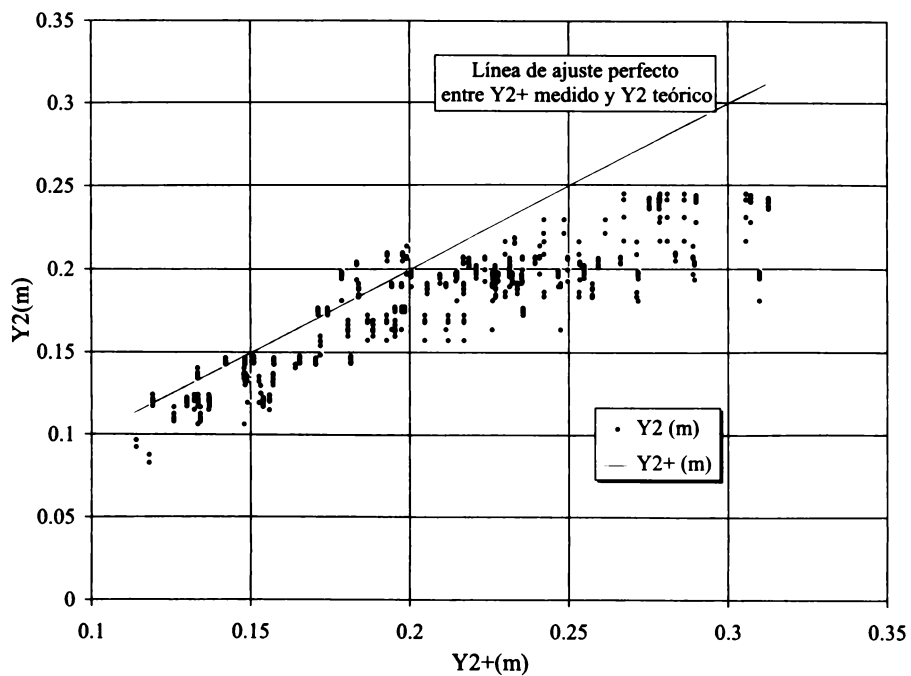
$$\% \text{ Error en } \Delta E = \frac{\Delta E - \Delta E_0}{\Delta E} \times 100 \quad (8)$$

$$\% \text{ Error en } Y_2 = \frac{Y_2 - Y_2^*}{Y_2} \times 100 \quad (9)$$

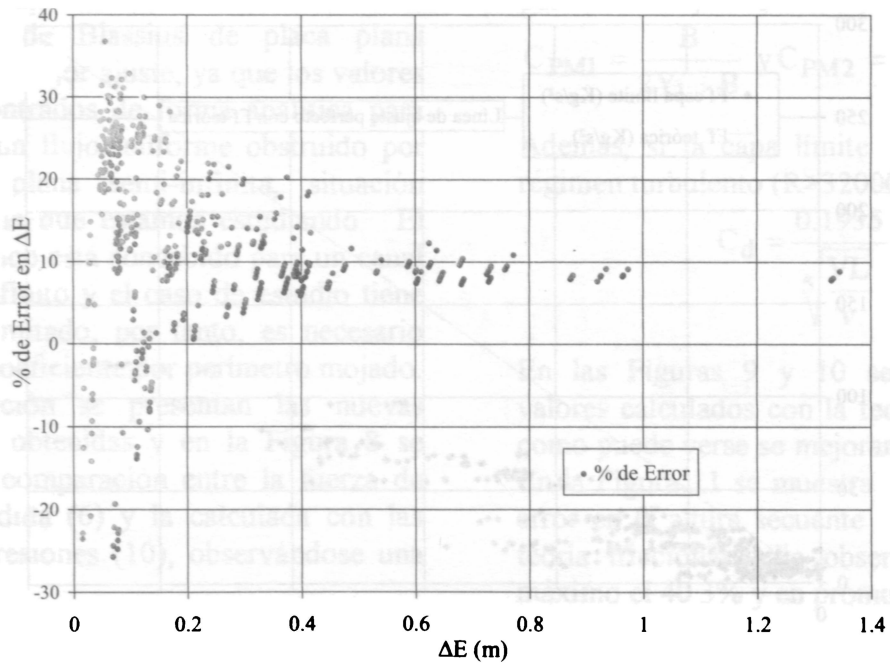
En las Figuras 6 y 7 se compara la fuerza de fricción obtenida mediante la expresión (3) con las dadas por los modelos (5) y (6). Para el caso de la fricción calculada con la expresión de Chézy, evaluando la constante mediante el uso de un  $n$  de Manning de 0.01. En ambas figuras se observa que los datos tienen una misma tendencia, aunque usando el modelo de Blassius para capa límite en una placa plana se subestiman los valores de la fricción sobre todo para valores altos de la fuerza de fricción. La expresión de Chézy arroja buenos resultados, a pesar de lo poco refinado de los cálculos, lo cual es un buen indicativo.



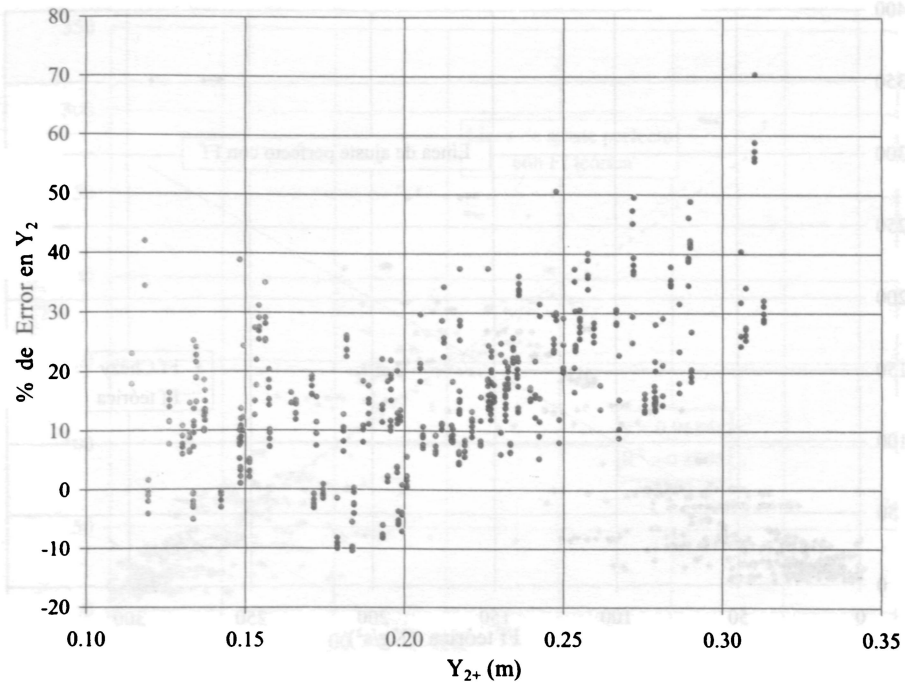
**FIGURA 2.** Comparación de la energía medida  $\Delta E$  con la de la teoría clásica  $\Delta E_o$ .



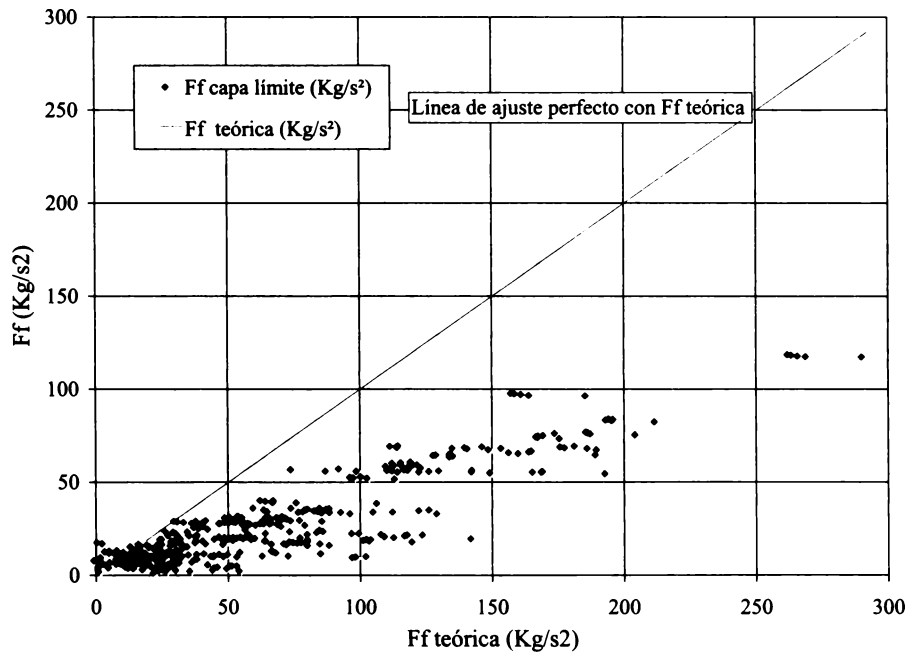
**FIGURA 3.** Comparación entre  $Y_{2+}$  medido y  $Y_2$  teórico.



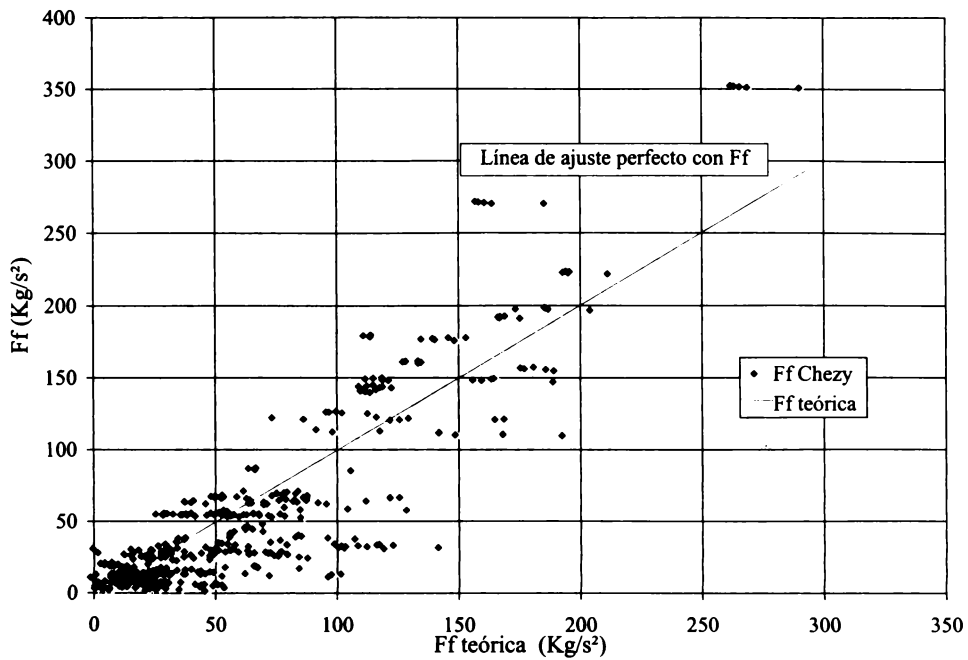
**FIGURA 4.** Porcentaje de Error entre  $\Delta E$  y  $\Delta E_0$ .



**FIGURA 5.** Porcentaje de error entre  $Y_2$  y  $Y_{2+}$ .



**FIGURA 6.** Comparación de la fuerza de fricción teórica con la obtenida mediante modelos de capa límite.



**FIGURA 7.** Comparación de la fuerza de fricción teórica con la obtenida mediante la expresión de Chézy.



Intentando mejorar los resultados del modelo de capa límite, se modificaron los coeficientes de Blassius de placa plana buscando un mejor ajuste, ya que los valores fueron encontrados de forma analítica para el caso de un flujo uniforme obstruido por una placa plana semi-infinita, situación diferente a la que estamos estudiando. El modelo teórico está concebido para un canal de ancho infinito y el caso de estudio tiene un ancho limitado, por tanto, es necesario corregir el coeficiente por perímetro mojado. A continuación se presentan las nuevas expresiones obtenidas y en la Figura 8 se presenta la comparación entre la fuerza de fricción medida (6) y la calculada con las nuevas expresiones (10), observándose una mejoría.

$$F_f = \frac{1}{2} C_{PM1} C_{d1} \rho L_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_{PM2} C_{d2} \rho L_2 V_2^2 \quad (10)$$

Donde los factores de corrección por perímetro mojado son:

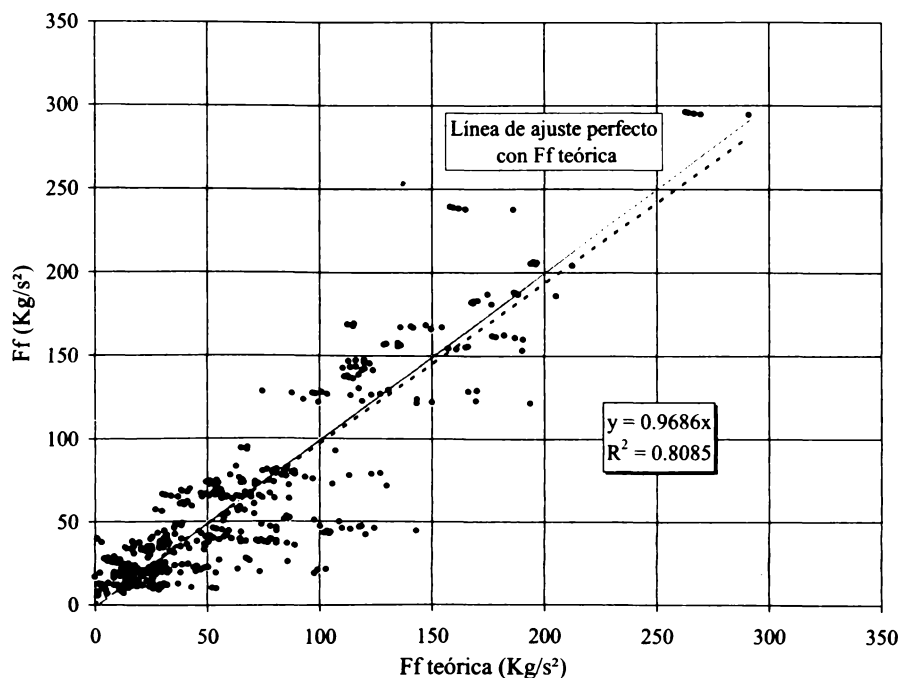
$$C_{PM1} = \frac{B}{2Y_1 + B} \text{ y } C_{PM2} = \frac{B}{2Y_2 + B}$$

Además, si la capa límite se encuentra en régimen turbulento ( $R > 320000$ ),

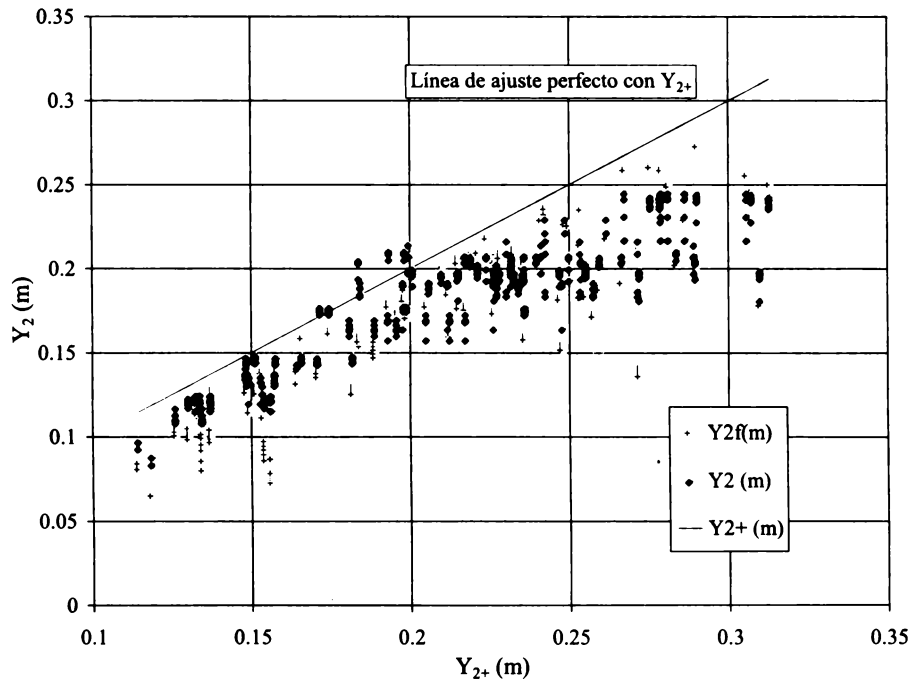
$$C_d = \frac{0.1935}{\sqrt[5]{\frac{VL}{\nu}}}$$

En las Figuras 9 y 10 se presentan los valores calculados con la teoría friccional y como puede verse se mejoran los resultados. En la Figura 11 se muestra el porcentaje de error en la altura secante calculada con la teoría friccional. Se observan errores de máximo el 40.3% y en promedio de 2.4%.

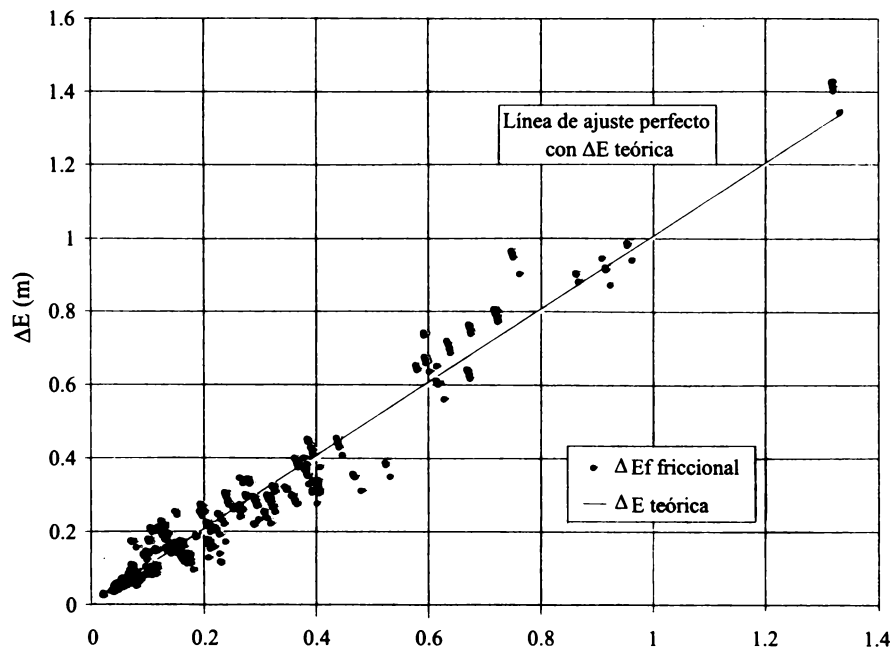
Para redondear el problema y poder presentar una metodología de diseño solo falta encontrar una relación entre las longitudes de las capas límites desarrolladas.



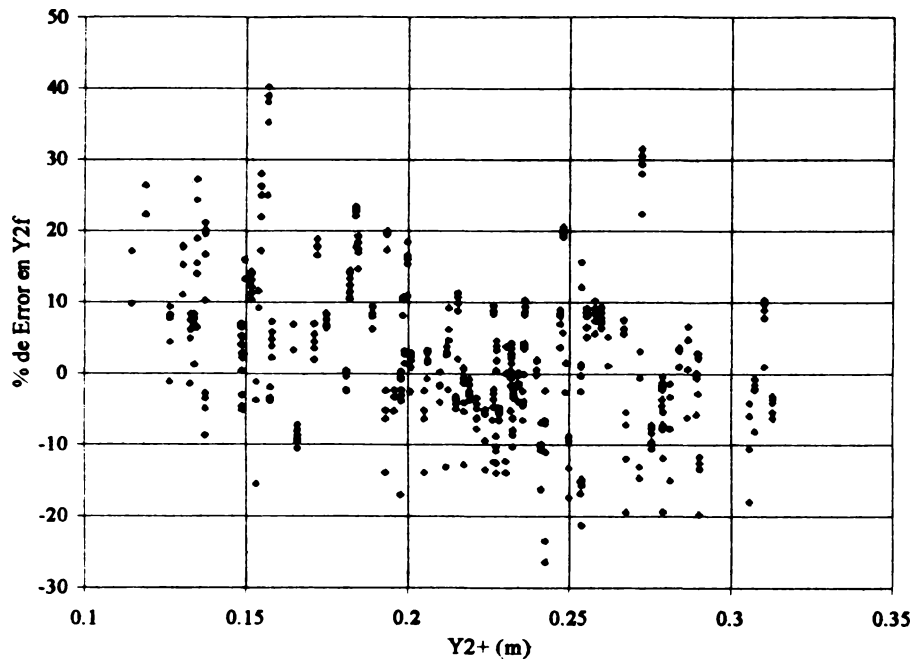
**FIGURA 8.** Comparación de la fuerza de fricción teórica con la obtenida por capa límite con la corrección por perímetro mojado.



**FIGURA 9.** Comparación entre el  $Y_{2+}$  medido, el  $Y_2$  calculado mediante la teoría clásica y el  $Y_{2f}$  de la teoría friccional.



**FIGURA 10.** Comparación de  $\Delta E$  medido con  $\Delta E_f$  obtenido incluyendo disipación por fricción.



**FIGURA 11.** Porcentaje de error entre  $Y_2$  vs.  $Y_{2f}$ .

Si de las expresiones para fuerza de fricción se despeja la longitud de la capa límite se encuentra que

$$L_1 = \left( \frac{32F_{f1}^5}{K_t^5 \rho^5 V_1^9 v} \right)^{1/4} \quad L_2 = \left( \frac{32F_{f2}^5}{K_t^5 \rho^5 V_2^9 v} \right)^{1/4}$$

Dividiendo estas longitudes y reemplazando  $F_{f1} = \phi_1 F_f$   $F_{f2} = \phi_2 F_f$ , se obtiene

$$\frac{L_2}{L_1} = \left( \frac{\phi_2^5 V_1^9}{\phi_1^5 V_2^9} \right)^{1/4}$$

Y entonces

$$\frac{L_2}{L_1} = \left( \frac{\phi_2^5 V_1^9}{\phi_1^5 V_2^9} \right)^{1/4} \quad (11)$$

Mediante regresión se encuentra la relación entre los coeficientes  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , con un coeficiente de correlación  $r^2 = 0.6872$ :

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{0.6566}{(F_1 - 1)^2}$$

## DISEÑO

Igualando (10) y (3) y haciendo uso de (11) se obtiene

$$\begin{aligned} & K_1(2Y_2 + B) + K_2 \\ & - K_3 Y_2^{4/5} (Y_2 - Y_1)(Y_2^* - Y_2)^* \\ & * (Y_2 + Y_2^* + Y_1)(2Y_2 + B) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Donde:

$$K_1 = \frac{1}{2} \frac{K_t \rho}{(2Y_1 + B)} \left( \frac{L_2^4 Q^9 v}{(\phi_2 / \phi_1)^5 B^4} \right)^{1/5}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} K_t \rho \left( \frac{L_2^4 Q^9 v}{B^4} \right)^{1/5} ; \quad K_3 = \frac{\rho g}{2}$$

De (12) es fácil encontrar las raíces usando métodos numéricos y con ello la "altura secante friccional".

## 6. CONCLUSIONES

El estudio del resalto hidráulico se basa principalmente en las ecuaciones de conservación del momentum y la ecuación de continuidad. Clásicamente se ha estudiado suponiendo que la fuerza de fricción tanto con las paredes y el fondo del canal como con el aire es despreciable. Si esta suposición fuera verdadera debería cumplirse que se conserve el momentum lineal o fuerza específica, además las magnitudes como la energía y la altura secuente se calculan de acuerdo con las fórmulas que se desprenden de la teoría clásica (la cual asume la suposición de que la fuerza de fricción y la disipación inducida por esta es despreciable) serían iguales a las magnitudes que medimos. Sin embargo, se descubre que esto no es cierto, por ello se tienen las siguientes conclusiones al respecto.

- Las nuevas expresiones para la fuerza de fricción y para la energía disipada se obtuvieron al incluir la fuerza de fricción en la ecuación de momentum.

$$F_f = -\frac{\rho g(Y_2 - Y_1)}{2Y_2}(Y_2^* - Y_2)(Y_1 + Y_2 + Y_2^*)$$

$$\Delta E = \frac{(Y_2 - Y_1)^3}{4Y_1Y_2} + \left(\frac{Y_1 + Y_2}{2Y_1Y_2}\right) \frac{F_f}{\rho g}$$

- Se encontró que la teoría clásica sobre estima el valor de la altura secuente, hasta en un 70%.
- Se encontró también que existe una relación entre la distancia y las alturas, es decir, el agua no conserva el mismo nivel en las diferentes abscisas. Esto no es explicado por la teoría clásica.
- Si se compara la energía disipada medida (7) con la calculada de acuerdo a la teoría

no friccional:  $\Delta E_0 = \frac{(Y_2^* - Y_1)^3}{4Y_1Y_2^*}$ , se

puede concluir que la energía disipada medida es mayor que la que suministra la expresión de la teoría clásica.

La teoría clásica subestima la energía disipada en un resalto hidráulico. Deben existir entonces otros factores de disipación que no han sido tenidos en cuenta en la teoría clásica de manera que produzcan una mayor disipación.

- La fuerza específica  $S = \frac{Q^2}{gA} + \frac{Y^2B}{2}$

cambia de una sección aguas arriba a una sección aguas abajo del resalto. Comparando la fuerza  $S_1$ , con la de una sección aguas abajo del resalto hidráulico,  $S_2$ , se encuentra son diferentes y por lo tanto existe un  $\Delta S$  que no es despreciable.

- Se encuentra que en el resalto hidráulico se producen pérdidas en el momentum lineal o fuerza específica. Se encuentra que existe una disipación del momentum lineal en los resaltos hidráulicos. Debe existir, entonces fuerzas adicionales a las ya consideradas que produzcan dicha disipación.
- Se encontró que la diferencia entre los valores de la teoría clásica y los medidos aumenta con  $F_1$ . La diferencia entre la energía disipada de acuerdo a la teoría clásica y la energía disipada medida aumenta para  $F_1$  mayores. El cambio en el momentum lineal  $\Delta S$  se hace mayor para  $F_1$  mayores. Sin embargo, el error que se comete en los datos con número de Froude aguas arriba  $F_1$  menores es más significativo que el que se comete para Froude altos.

- Del análisis de una placa plana de acuerdo a la teoría de capa límite se encuentran las siguientes expresiones para la fuerza de fricción  $F_f = \frac{1}{2} C_d \rho V^2 L$  y si se toman los coeficientes deducidos por Blassius y se suman las contribuciones de fricción aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico se tiene:

$$F_f = \frac{1}{2} C_{d1} \rho L_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_{d2} \rho L_2 V_2^2$$

Para la capa límite laminar ( $R < 320000$ ),

$$C_d = \frac{1.328}{\sqrt{\frac{VL}{v}}}$$

para capa límite turbulenta ( $R > 320000$ )

$$C_d = \frac{0.072}{\sqrt[5]{\frac{VL}{v}}}$$

Comparando la fuerza de fricción obtenida vía este procedimiento y la que se obtiene de acuerdo con la expresión de la teoría del resalto friccional se nota que conservan una misma tendencia, pero se observan discrepancias significativas sobre todo para valores altos de  $F_f$ . La expresión para el cálculo de la fuerza de fricción deducida de acuerdo a la teoría de capa límite con los coeficientes deducidos por Blassius subestima los valores de fuerza de fricción que se obtendrían teóricamente.

- Comparando la fuerza de fricción obtenida por el procedimiento de Chézy con la que se obtiene usando la teoría del resalto friccional, se nota una misma tendencia y diferencias entre ellas poco significativas. Por lo tanto, esta fórmula se presenta como un buen procedimiento para calcular la fuerza de fricción en un resalto hidráulico.

- Si se modifican los coeficientes deducidos por Blassius para el caso capa límite en una placa plana por unos coeficientes que se acomoden más a la fuerza de fricción teórica, se halla un nuevo coeficiente para el caso de capa límite en régimen turbulento ( $R > 320000$ ):

$$C_d = \frac{K_t}{\sqrt[5]{\frac{VL}{v}}}, \text{ con } K_t = 0.1935.$$

Se plantea una corrección adicional por perímetro mojado ya que las ecuaciones para el cálculo de fricción deducidas de acuerdo a la teoría de capa límite consideran fricción en el fondo del canal y no en las paredes. Dicha corrección se hace de la siguiente manera:

$$F_f = \frac{1}{2} C_{PM1} C_{d1} \rho L_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_{PM2} C_{d2} \rho L_2 V_2^2$$

Donde  $C_{PM1} = \frac{B}{2Y_1 + B}$  es el factor de

corrección por perímetro mojado para la zona aguas arriba del resalto y

$C_{PM2} = \frac{B}{2Y_2 + B}$ , factor de corrección

para la zona aguas abajo del resalto.

Comparando la fuerza de fricción obtenida vía este procedimiento (con coeficientes modificados y corrección por perímetro mojado) con la que se obtiene mediante la expresión de la teoría del resalto friccional, se nota que se conserva una misma tendencia y diferencias poco significativas. Por lo tanto, la expresión para capa límite con coeficientes modificados y corrección por perímetro mojado suministra un buen estimativo para la fuerza de fricción en un resalto hidráulico.

- Un procedimiento para calcular la altura seciente  $Y_2$  a la distancia  $L_2$ , consiste en igualar la fuerza de fricción teórica (3) con la obtenida por cualquiera de los dos modelos presentados para el cálculo de la fricción (capa límite con coeficientes modificados y corregidos por perímetro mojado, (10) y Chézy, (6)) y resolver numéricamente la ecuación de tal forma que se encuentre  $Y_2$ .

Para encontrar  $Y_2$  se debe resolver la siguiente ecuación, la cual considera la fuerza de fricción a partir de la teoría de capa límite con coeficientes modificados y corregidos por perímetro mojado

$$\frac{K_1 \rho L_1 Q^2}{2(2Y_1 + B)Y_1^2 B \sqrt{\frac{QL_1}{BY_1 v}}} + \frac{K_1 \rho L_2 Q^2}{2(2Y_2 + B)Y_2^2 B \sqrt{\frac{QL_2}{BY_2 v}}} - \frac{\rho g (Y_2 - Y_1)}{2Y_2} (Y_2^* + Y_2)(Y_1 + Y_2 + Y_2^*) = 0$$

Las alturas secientes calculadas con el anterior método  $Y_{2f}$  presentan menores diferencias con las medidas  $Y_{2+}$  que las calculadas por la teoría clásica (que las sobrestiman).

- La energía disipada, calculada de acuerdo a la teoría friccional  $\Delta E_f$ , presenta menores diferencias con la medida  $\Delta E$  que la obtenida de acuerdo a la teoría clásica  $\Delta E_0$  (que la subestima).

La ecuación de energía disipada del resalto friccional tiene dos componentes, una por "coros" o interna y otra por fricción en las paredes; se puede decir que ninguna de las dos es despreciable y,

por lo general, para números de Froude pequeños la disipación por "coros" es más significativa y para números de Froude grandes la situación es contraria.

- Cuando se asumen  $F_{f1} = \phi_1 F_f$  y  $F_{f2} = \phi_2 F_f$ , se encuentra que  $L_1$  y  $L_2$  cumplen con la siguiente relación

$$\frac{L_2}{L_1} = \left( \frac{\phi_2^5 V_1^9}{\phi_1^5 V_2^9} \right)^{1/4}$$

Encontramos una relación inversa entre la razón  $\phi_2/\phi_1$  y el término  $(F_1 - 1)^2$ .

## 7. RECOMENDACIONES

- Incluir en las prácticas de laboratorio de resaltos consideraciones de disipación de momentum y energía debidos a la fuerza de fricción.
- Extender este estudio a canales con diferentes anchos y pendientes.
- Medir el esfuerzo cortante  $\tau_0$  de manera que se pueda justificar la utilización de un determinado modelo para el cálculo de la fuerza de fricción.
- Estudiar los perfiles aguas arriba y aguas abajo del resalto, con el fin de encontrar una adecuada definición para los sitios de medición de  $Y_1$  y  $Y_2$  (especialmente vena contracta o la sección crítica).
- Analizar con detalle el desarrollo de la cantidad de movimiento al interior del resalto.
- Estudiar la conservación del momentum angular en el resalto hidráulico.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALHAMID, A. A., NEGM, ABDEL-AZIM "Depth Ratio of Hydraulic Jump in Rectangular Stilling Basins". Journal of Hydraulic Research, Vol. 34, No. 5, 1997.
- [2] ALLEN Jr, T., DITSWORTH, R. "Fluid Mechanics". McGraw Hill, 1992.
- [3] BENJAMIN, T. B., LIGHTHILL, M. J., "On Cnoidal Waves and Bores". Proc. Royal Soc. London. Vol. 224, 1954.
- [4] CHOW, V. T. "Hidráulica de Canales Abiertos" McGraw Hill, Colombia, 1985.
- [5] EISA, S. A., NEGM, ABEL-AZIM, WAHEED, USAMA. "The Most Efficient Roughness pattern for Dissipating the Energy Downstream Hydraulic Structures". Advances in Hydro-Science and Engineering, Vol. I. Sam S. Y. Wang (ed.).
- [6] FRENCH, R. H. "Hidráulica de Canales Abiertos". McGraw Hill. Colombia, 1985.
- [7] GRANADOS M., E. "Capa Límite Laminar - Arrastre sobre una Placa Plana". TDG. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, 1987.
- [8] HENDERSON, F. "Open Chanel Flow". McMillan, 1996.
- [9] JARAMILLO M., J. J., PALACIO T., C. A. "Resaltos Ondulares y Ondas Solitarias". TDG. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, 1994.
- [10] LI, W. H., LAM, S. H. "Principles of Fluid Mechanics". Estados Unidos de America. Addison-Wesley, 1964.
- [11] NARANJO M, J. A. "Resaltos hidráulicos y fricción". Notas de Clase, 1985.
- [12] NARANJO M, J. A. "Cuaderno de Capas límites". Notas de Clase, 1985.
- [13] NARANJO M., J. A., JARAMILLO M. J., PALACIO T., C. A. "Clasificación y Geometría del Resalto Ondular". Avances en Recursos Hidráulicos. Universidad Nacional de Colombia. Medellín. No. 3, Agosto, 1995.
- [14] NARANJO M., J. A., JARAMILLO M. J., PALACIO T., C.A. "Disipación de Momentum Lineal en Resaltos Hidráulicos". Avances en Recursos Hidráulicos. Universidad Nacional de Colombia. Medellín. No. 3, Agosto, 1995.
- [15] NARANJO M., J. A., JARAMILLO M. J., PALACIO T., C. A. "El Resalto Ondular y las Ondas Cnoidales". Avances en Recursos Hidráulicos. Universidad Nacional de Colombia. Medellín. No. 3, Agosto, 1995.
- [16] RANGA, RAJU, "Flow through Open Channels". New Delhi: Mc Graw-Hill, 1981, 330 p.
- [17] ROUSE, H. "Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers". USA, 1961.
- [18] VALIANI, A. "Linear and Angular Momentum Conservation in Hydraulic Jump". Journal of Hydraulic Research. Vol 35, No 3, 1997.
- [19] WHITE, F. M. "Mecánica de fluidos". Mexico: McGraw Hill, 1985.

