

ANÁLISIS DE LA LEY DE HACK EN LAS CUENCAS HIDROGRÁFICAS DE COLOMBIA

Ricardo Mantilla, Oscar Mesa y Germán Poveda

Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín

RESUMEN La compresión de los mecanismos físicos que dan forma a las cuencas hidrográficas es una de las tareas fundamentales de la hidrología actualmente. En las últimas décadas se han reportado una gran cantidad de regularidades en la geometría de las cuencas hidrográficas y su red de drenaje que ponen en evidencia la necesidad de encontrar un modelo teórico que pueda explicarlas. Una de dichas regularidades es la conocida Ley de Hack, que es una relación potencial empírica entre la longitud del canal principal de la cuenca y su área de drenaje. Varios estudios sobre esta relación se han realizado desde que se formuló por primera vez en 1957, y se ha encontrado, consistentemente, que el exponente del área es superior a 0.5 - que es el valor esperado por un análisis dimensional simple - y generalmente oscila entre 0.55 y 0.60. Este resultado ha motivado a la comunidad hidrológica y geomorfológica a proponer diversas explicaciones para este comportamiento anómalo del exponente. En este artículo se hará un resumen de las diferentes propuestas teóricas tendientes a explicar la anomalía del exponente encontrado en la ley de Hack, las cuales van desde explicaciones puramente geométricas, hasta explicaciones basadas en la forma de ramificación de la estructura topológica de la red de drenaje. Esta revisión de las explicaciones teóricas está acompañada por un estudio de muestreo y medición de las características morfométricas en más de 1000 cuencas en el modelo digital de terreno de Colombia, que pretende validar las explicaciones que se han propuesto hasta el momento.

ABSTRACT Understanding the physical mechanisms underlying the formation of hydrological basins and their river networks is a fundamental topic in hydrology. In the last decades a large amount of regularities in the river basins geometry and its river network topology has been reported. Those regularities must be explained through theoretical models in order to find their physical meaning and implications. One of such regularities is the well known Hack's Law, which is the empirical potential relation between main river length and the basin area. Several studies about this relation has been carried out since his formulation in the late 50's, reporting an exponent superior to 0.5 (the expected value from a simple dimensional analysis) for the basin area, and between 0.55 and 0.6. This result has motivated the hydrological community to propose diverse justification for this anomalous exponent. In this paper we present some of the theoretical justification given to this problem, together with a broad study measuring the main morphometrical features of river basin. This measurements, made in about 1000 basins in Colombia, will determine whether or not those theories are valid in this context.

1 INTRODUCCIÓN

Las cuencas hidrográficas son sistemas altamente complejos, pues, su proceso de formación está ligado a factores tan variables en el tiempo y el espacio como el clima, la geología, la vegetación e incluso el tectonismo. Sin embargo, y contrario a lo que se podría pen-

sar sobre el tema, los estudios cuantitativos que han sido realizados desde mediados de la década de los 40, han revelado las profundas simetrías embebidas en tales sistemas.

El estudio clásico realizado por Horton (1945) sobre la organización de la red de drenaje, puso en evidencia la regularidad de esta estructura al presentar los resultados de

las que hoy son conocidas como las leyes de Horton, que resultan de un esquema de ordenamiento propuesto por él mismo. Mas adelante Hack (1947) presentó los resultados acerca de la relación potencial existente entre la longitud del canal principal y el área de drenaje en varios órdenes de magnitud, la cual puso en manifiesto, una vez más, que este sistema de aparente complejidad estaba organizado de una manera bastante simple. Estos trabajos motivaron a otros investigadores a determinar y cuantificar los parámetros que caracterizan la dinámica al interior de este sistema, tales como la geometría de los canales, la pendiente y el caudal (Leopold y Maddock, 1953 y Richards, 1988). En todos estos estudios el área de la cuenca aparece como el parámetro natural de escala de los procesos físicos.

Mas allá del interés práctico de las funciones potenciales, que relacionan algunos parámetros morfométricos de la cuenca con el área, está la pregunta acerca de los procesos físicos que dan origen a ellas y sobre las pistas que encierran acerca de la evolución del sistema. En este trabajo se tratarán específicamente dos de las relaciones potenciales que la hidrología, aun hoy, continua investigando. Estas son la ley de Hack y la relación entre los diferentes cuantiles de la función de distribución de probabilidades de los caudales máximos y el área de drenaje.

La ley de Hack es de especial interés, pues el exponente de la relación longitud - área que se encuentra usualmente entre 0.56 y 0.60, es significativamente mayor que el valor esperado por un análisis dimensional simple entre estas dos variables, que sería 0.5. Esta desviación anormal del exponente es mucho más que una curiosidad teórica, pues está relacionada según la física estadística con importantes características de invarianza de propiedades ante cambios de escala. Los estudios sobre grupos de renormalización y sistemas auto-organizados en estados críticos (Bak, 1992), han revelado que la presencia de exponentes de escala como el encontrado por Hack, están asociados de manera directa con características físicas de la distribución de la energía en diferentes escalas en el interior del sistema dinámico.

El reciente desarrollo de los computadores de gran capacidad de procesamiento y almacenamiento de información permite realizar mediciones detalladas de las variables geomorfológicas en cuencas de gran tamaño, lo que hasta hace algunos años podía parecer imposible. En este trabajo se desarrolla una caracterización y un análisis geomorfométrico de las cuencas hidrográficas de Colombia (Mantilla, 1999), en busca de pistas sobre las razones físicas que conducen al valor anómalo del exponente de Hack.

2 DATOS UTILIZADOS

Los análisis están basados en modelos digitales de terreno (MDT), que son arreglos matriciales rectangulares, en los que cada posición corresponde a la elevación media de un área cuyo tamaño depende de la resolución del mapa. Estos modelos existen en una gran variedad de resoluciones y ofrecen un alto grado de confianza sobre los datos proporcionados. En 1996 se terminó un proyecto de escala mundial dirigido por el Servicio Geológico de los Estados Unidos (USGS), cuyo objetivo era generar mapas digitales para todo el planeta con resolución de 30 segundos de arco. Estos mapas están disponibles vía FTP en <ftp://edcftp.cr.usgs.gov/pub/data/gtopo30/> (para mayor información, consulte la página del USGS <http://edcwww.cr.usgs.gov/doc/edchome/ndcndb/ndcndb.html>) y se distribuyen como arreglos rectangulares, en código binario, en archivos que cubren diferentes partes del mundo. El mapa de interés para Colombia es el W100n40.tar. De allí se extrae una región que cubre completamente a Colombia: entre 5°S- 15°N de latitud y 65°W-80°W de longitud.

El modelo fue desarrollado a lo largo de un período de tres años con el esfuerzo del personal del USGS y la colaboración de instituciones como la NASA, el Instituto Nacional de Estadística Geográfica e Información de México, el Servicio de Información Geográfica del Japón, la Agencia para el Desarrollo Internacional de los EUA, el programa para el Desa-

rrollo de Bases de Datos Ambientales de las Naciones Unidas, entre otros, que contribuyeron encontrando y/o permitiendo el uso de datos. Los datos básicos para la construcción fueron: datos digitales de elevación de terreno proporcionados por la agencia de defensa de los Estados Unidos (50% de la información), la Carta Digital del Mundo y la carta construida para navegación con una escala de 1:1'000.000. Para interpolar la topografía faltante se usó como parámetro de control las corrientes importantes de agua en el mundo, las cuales son fácilmente identificables desde satélites, y datos de elevación media tomados desde estos. Para lograr que la topología de la red de drenaje fuera similar a la que se conoce por fotografías aéreas del territorio Colombiano, fueron necesarias algunas correcciones manuales sobre el MDT, utilizando los módulos y controles para corregir MDT del programa CUENCAS desarrollado por el autor.

3 PROGRAMAS DESARROLLADOS PARA EL ANÁLISIS DE LOS DATOS

Como es evidente, el gran volumen de información que debía ser manejado para realizar este trabajo, hizo evidente la necesidad de diseñar programas de computador para la visualización, análisis y presentación de los resultados. Este tipo de programas se conocen como Sistemas de Información Geográfica (SIG) y aunque existe una gran variedad de ellos en el mercado se optó por el desarrollo de un programa propio, ya que las necesidades específicas de este trabajo pusieron en evidencia la falta de flexibilidad de los SIG comerciales, además se presenta como un paso hacia el desarrollo de futuros trabajos de este tipo. El programa desarrollado se ha llamado "CUENCAS" (Figura 1). El programa CUENCAS ha sido desarrollado en el Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos como parte del proyecto Balances Hidrológicos de Colombia (Unidad de Planeación Minero Energética -UPME-, Colciencias y Posgrado de Recursos Hidráulicos, 1999), patrocinado por la UPME y por Col-

ciencias. Está diseñado para el análisis de cuencas hidrográficas obtenidas a partir de modelos digitales de terreno y para la extracción de los parámetros geomorfológicos de mayor interés. El programa está basado en el análisis de la matriz de direcciones, la cual se crea usando la información contenida en el modelo digital de terreno usando el algoritmo de flujo en la dirección de la máxima pendiente. Este algoritmo asigna a cada pixel del mapa digital una dirección de drenaje. La dirección en la que "fluye" el agua desde cualquier pixel se marca con un identificador 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 partiendo de la dirección noreste y continuando en el sentido de las manecillas del reloj hasta completar el ciclo de direcciones (Mesa et al., 1999).

Con la información de la matriz de direcciones es posible determinar la cuenca hidrográfica de cualquier pixel del mapa, la estructura de su red de drenaje y los parámetros geomorfológicos básicos derivados de esta. En particular es posible determinar el área de drenaje de todos los pixeles de la red de drenaje y la longitud del canal principal que drena hasta dicho punto, los cuales se despliegan de manera interactiva durante la ejecución del programa. Las rutinas implementadas en este programa han sido modificadas para realizar el estudio que se presenta en este artículo.

4 ANÁLISIS DE LEY DE HACK EN COLOMBIA

Como se mencionó anteriormente, la ley de Hack es una relación potencial empírica entre la longitud del canal principal de la cuenca y su área. Varios estudios sobre esta relación se han realizado desde que se formuló por primera vez en 1957 (Hack, 1957), y se ha encontrado, consistentemente, que el exponente del área es superior a 0.5 - que es el valor esperado por un análisis dimensional simple - y generalmente oscila entre 0.55 y 0.60. Este resultado ha motivado a la comunidad hidrológica y geomorfológica a proponer diversas explicaciones para este comportamiento anómalo del exponente. En este capítulo se hará un resumen de las diferentes propuestas teóricas tendientes a ex-

plicar la anomalía del exponente encontrado en la ley de Hack, las cuales van desde explicaciones puramente geométricas, hasta explicaciones basadas en la "fractalidad" de los ríos, pasando por explicaciones basadas en la forma de ramificación de la estructura topológica de la red de drenaje. Esta revisión de las explicaciones teóricas estará acompañada por un estudio de muestreo y medición de las características morfométricas en más de 1000 cuencas en el modelo digital de terreno de Colombia, que pretende verificar las explicaciones que se han propuesto hasta el momento. El objetivo de este capítulo es dar luces que orienten la mirada en la dirección correcta para buscar una explicación física que resuelva satisfactoriamente el problema del exponente anómalo de Hack.

4.1 EXPLICACIONES PROPUESTAS PARA LA LEY DE HACK

4.1.1 Tendencias en la geometría de la cuenca y la red de drenaje

4.1.1.1 Elongación Hack observó que si la forma de las cuencas se conserva invariable con el aumento de su tamaño el exponente en la relación debería ser 0.5. Al escribir la ecuación de Hack como

$$\frac{A}{L^2} = \frac{1}{2} A^{-2}$$

podría interpretarse que la forma de las cuencas de diferentes tamaño no es completamente similar, ya que un aumento del tamaño de la cuenca implica un decremento en la relación A/L^2 . Esto, según Hack, indica una tendencia a la elongación de las cuencas con el aumento de su tamaño; este tipo de crecimiento se conoce el campo de la biología como crecimiento alométrico.

Para ilustrar esta idea, se ha propuesto el siguiente ejercicio teórico: demos una mirada a la secuencia de cuencas en la Figura 2, los bordes están dados por una sencilla curva conocida como la lemniscata, la cual está descrita por la fórmula $\gamma(\phi) = \lambda \cos(c(\phi - \pi/2))$, donde ϕ varía desde $\pi(c - 1)/2c$, hasta $\pi(c + 1)/2c$. Acá el diámetro es λ , y la constante $c \geq 1$, determina el grado de elongación - lo que significa que el

ancho es proporcional a (λ/c) . Cuando $c = 1$ entonces la forma es completamente circular. El área de esta curva está dada por

$$A_\lambda = \frac{\pi \lambda^2}{4c}$$

Para la secuencia de formas de la Figura 2, el diámetro crece como 10^n , mientras que la constante c está dada por $c_\lambda = \lambda^\epsilon$, con $\epsilon = \frac{1}{4}$. Poniendo esta expresión en la ley de Hack ($L \propto A^h$) y asumiendo que $L \propto \lambda$, obtenemos $h = 4/7 \approx 0.57$.

Este supuesto comportamiento de las cuencas ha sido observado en modelos teóricos como el introducido por Scheidegger (1967) en el cual, "redes de drenaje aleatorias" son creadas en una malla triangular siguiendo una regla simple; y en modelos aún más elaborados como el propuesto por Rodriguez Iturbe et al. (1997) de redes óptimas de canales, basado en principios de optimización en la conectividad de la red. Esta explicación sobre la ley de Hack ha sido aceptada durante mucho tiempo. Con el fin de hacer una correcta estimación de posibles tendencias en la forma de las cuencas es necesario definir el diámetro de la cuenca usando el concepto de la cáscara convexa (Mantilla, 1999) y hacer un estudio de su relación con el incremento del área. En la sección 4.3.2 se mostrarán los resultados de esta prueba.

4.1.1.2 Sinuosidad En la misma época en que Hack predicaba que la anomalía del exponente era debida principalmente a la elongación de las cuencas, otros autores (Smart et al., 1967) proponían que el incremento de la sinuosidad a lo largo del canal podía contribuir en gran medida a este resultado. La sinuosidad se define como la relación entre la longitud medida a lo largo del canal, L_c , y la longitud en línea recta desde su nacimiento hasta su desembocadura, L_r . Matemáticamente esto se expresa como

$$\text{Si nuosidad} = \frac{L_c}{L_r}$$

Para ilustrar de manera precisa esta interpretación se ha propuesto el siguiente ejercicio

teórico: Suponga un canal principal dado por la función

$$f(x) = A(x) \sin\left(\frac{2\pi x}{T(x)}\right)$$

esta curva oscila alrededor del eje x , con amplitud y periodo dados por $A(x)$ y $T(x)$, como se muestra en la Figura 3. Cuando $A(x)$ y $T(x)$ son constantes, $f(x)$ es una curva sinusoidal sencilla. Pero si suponemos que la amplitud y el período están dadas como funciones potenciales de x , es decir, $A(x) = cx^a$ y $T(x) = dx^b$ y asumiendo $a > 0$ y b entre 0 y 1, entonces la amplitud y el período aumentan hacia aguas abajo como se observa en las canales naturales (Leopold y Maddock, 1953).

La longitud de esta curva está dada por la longitud de arco de $f(x)$, que se calcula mediante la integral

$$L(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

la cual no puede ser resuelta de manera analítica, pero es claro que $L(x)$ es una función creciente de x . Es posible demostrar además, basados en los resultados del uso de límites superiores inferiores y superiores que dependiendo de los valores a y b , es posible que el valor de $L(x)$ crezca más rápido que x , de hecho es posible demostrar que $L(x) \sim x^{1+(a-b)}$, si $a > b$, y que $L(x) \sim x$, en cualquier otro caso.

Con base en este resultado analítico y el estudio realizado por Leopold y Maddock (1953) en el que se encontró que la amplitud y el período de los meandros estaban fuertemente ligados al ancho del canal w , en varios ordenes de magnitud por las fórmulas

$$A(w) \sim w^{1.1}$$

$$T(w) \sim w^{1.0}$$

es posible derivar el exponente de Hack. Teniendo en cuenta los estudios de Schumm (1977) que relacionan las características del canal con el caudal de banca llena, en particular se encontró que el ancho cumple la relación potencial $w \sim Q_{2.33}^{0.58}$ en varios ordenes de magnitud, y estudios sobre la variación del caudal con el área (Flood Studies Report, 1975), en los

que se encontró que la creciente media estaba relacionada con el área por $Q_{2.33} \sim A^{0.73}$. De esta manera y bajo la hipótesis de que el diámetro de la cuenca escala con el área mediante un exponente de 0.5 (cuenca autosemejantes), resulta que el exponente de Hack en la ecuación LaA^h es $h = 0.55$, como consecuencia exclusiva de estas suposiciones.

4.1.1.3 Estructura topológica de la red de drenaje Otras explicaciones del exponente de Hack se relacionan con el efecto de la organización topológica de la red de drenaje. Para ello se establece la relación entre el diámetro topológico, D_t , definido como la mayor distancia topológica -en número de segmentos- entre una fuente y la salida y la magnitud de la cuenca, m ,

$$D_t = am^{h_t}$$

Definido de esta manera, es posible derivar valores teóricos del exponente h_t a partir de los modelos topológicos de la red de drenaje.

4.1.1.4 Exponente de Hack derivado del modelo de Shreve Una de las conclusiones derivadas del modelo de Shreve (1966) sobre la topología de las cuencas, es el resultado obtenido en Mesa y Gupta (1987) acerca de la ley de Hack. El resultado presentado en ese trabajo demuestra que si los postulados del modelo de Shreve son válidos, la observación del exponente anormal de Hack se debe a un efecto preasintótico. El exponente teórico calculado es

$$h_t(m) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi + (\pi/m)^{\frac{1}{2}}}{\pi - m} \right)$$

donde m es la magnitud de la cuenca. Los valores derivados de la curva teórica, $h_t(m)$, serán comparados con los valores observados en todas las cuencas de Colombia. Debe aclararse que en este caso la comparación se hará con el exponente topológico de Hack, que es el que resulta de la regresión potencial entre la magnitud de la cuenca y el diámetro topológico.

4.1.1.5 Exponente de Hack derivado del modelo de árboles autosimilares Como

apuntó Peckham (1995), si las redes de drenaje pueden ser consideradas como árboles autosemejantes, el exponente topológico de Hack derivado de esta estructura está dado por $h_t = 1/D_{AAS}$ donde D_{AAS} es la dimensión fractal del árbol autosimilar, la cual se define por la relación $D_{AAS} = \frac{\log(R_B)}{\log(R_C)}$. En esta concepción, la explicación del exponente de Hack es topológica.

4.1.1.6 "Fractalidad" Mandelbrot (1983) sugirió que el exponente de Hack mayor que 0.5, podía explicarse en términos de la naturaleza fractal de los canales de la cuenca, lo que causaría que la longitud medida variara con la escala del objeto. Así, el exponente de Hack, $h = 0.6$, conduciría a que la dimensión fractal de los ríos fuese $d = 2h = 1.2$. Esta suposición se fundamenta en dos hipótesis: (1) los canales pueden ser vistos como curvas fractales, y (2) la forma de las cuencas es autosemejante en todas las escalas. Esta idea parece surgir en la observación de ríos obtenidos a partir de modelos digitales de terreno, sin hacer la salvedad de que el grado de discretización involucrado en estos puede llevar a confusiones visuales y de cálculos, como se demostrará a mas adelante.

La dimensión fractal de un objeto se define como la relación entre la longitud y la escala a la que esta se mida (Mandelbrot, 1985) y se escribe

$$D = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\log(N_\lambda(A))}{\log\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

donde $N_\lambda(A)$ representa el número de pasos necesarios para recorrer un objeto A con un tamaño de paso λ . La manera tradicional en que se ha determinado esta dimensión es a través del algoritmo de "Box - counting" (conteo de cajas), que consiste en cubrir el objeto con una malla regular de tamaño λ y contar el número de cajas, $N_\lambda(A)$, que quedan ocupadas, este proceso se repite disminuyendo el tamaño de la malla y contando nuevamente, finalmente se hace un gráfico log-log y se determina la pendiente de la relación $\log(N_\lambda(A)) \sim \log(\lambda)$ la cual es interpretada como la dimensión de Hausdorff - Besikovitch del objeto.

La estimación de la dimensión fractal ha sido hecha por diferentes autores (Feder, 1988), sin embargo no se ha hecho claridad sobre la dificultad de estimar la dimensión fractal a partir de datos. Este problema se ilustrará a través de una sencilla serie de ejemplos en los cuales se harán evidentes las dificultades, desde el punto de vista estadístico para su determinación. Considere una curva sinusoidal de período 2π generada por computador; obviamente lo que se tiene es una colección de n puntos que visualmente representan la curva continua que estamos generando (este es el caso de los ríos que extraemos a partir de modelos digitales de terreno), ahora apliquemos el procedimiento de conteo de cajas para determinar su dimensión. El resultado mostrado en la Figura 4 pone en evidencia que la pendiente de la recta $\log(N_\lambda(A))$ vs $\log(\lambda)$, para tamaños de caja menores que la resolución del objeto ($x = 10$), es igual a cero, que es la dimensión de un punto y para tamaños mayores obtenemos un valor de uno, que es la dimensión de la línea.

Acá podemos ver que un usuario desprevenido de los programas comunes para determinar la dimensión fractal de un objeto, podría cometer graves errores en la determinación de la dimensión fractal si tomara indiscriminadamente puntos antes y después del umbral de resolución. En algunas curvas el umbral de resolución no es tan claro y la selección de los puntos que deben ser tomados en la regresión se convierte en una tarea de mucho cuidado. Por ejemplo, en la Figura 5, se muestran los resultados del proceso de "box - counting" para la curva usada en la sección 4.1.1.2 para modelar de manera sencilla el comportamiento de los meandros. Cuando se observa la gráfica $\log(N_\lambda(A))$ vs $\log(\lambda)$, resulta evidente que no es sencilla la decisión de cuales puntos deben usarse para la determinación de la pendiente de la curva (dimensión fractal).

De hecho, si se hacen todas las posibles combinaciones de selección de puntos (Tabla 1), la pendiente, que debiera ser uno pues ésta es una curva simple, solo resulta en dos de ellas. En la Figura 6 se muestra la pendiente de

la curva calculada con base en distintas selecciones de los puntos para la regresión.

Sin embargo, si repetimos este experimento haciendo un muestreo mas detallado como el mostrado en la Figura 7 ($x/x = \text{múltiplos de } 0.01$) de la curva $f(x) = A(x) \sin(2\pi x/T(x))$, los resultados son diferentes; sin embargo, este drástico incremento de resolución no corrigió completamente las desviaciones de la curva cerca al límite de resolución y en los tamaños grandes del cajón.

Sin embargo, acá se hace más fácil la determinación de los puntos que se deben tener en cuenta para la estimación de la pendiente (Figura 8)

Como se puede observar en estos ejercicios numéricos, existe la necesidad de una muy buena resolución del objeto del cual se quiere estimar la dimensión fractal. La determinación de la dimensión fractal de algunos ríos de Colombia se presentará en la sección 4.2.5 donde se mostrará que el grado de resolución necesario para estimarla es aun muy pobre.

Además, del problema de la resolución para estimar dimensiones fractales, es posible demostrar con un sencillo ejercicio, que incluso con ríos fractales el exponente de la relación de Hack debería ser 0.5, recordando que la desviación de este exponente de su valor esperado fue la motivación principal de Mandelbrot para proponer su teoría sobre ríos fractales.

Teniendo en cuenta que en los primeros estudios de la relación longitud vs área, estos parámetros eran medidos en mapas de distinta escala, supongamos dos cuencas de diferente tamaño, con su divisoria de aguas dada por un círculo de diámetro λ y con su cauce principal dado por un sencillo fractal conocido como la curva de von Koch (1993). Supongamos además que para fines de hacer el estudio a mano, las cuencas deben ser dibujadas en un cuadro de papel de 1 metro por 1 metro, y que las distancias se miden con algún aparato que cuenta el número de pasos y que con base en la escala determina la distancia recorrida, por lo cual su precisión depende exclusivamente de la escala (Figura 9).

Como se puede ver en la figura la escala grá-

fica en la cual se hacen las mediciones depende del área de la cuenca, en este caso es claro que la escala gráfica depende del área elevada a la 0.5 y la longitud depende de la precisión del instrumento que a su vez depende de la escala gráfica del mapa. Matemáticamente estas proporcionalidades están dadas por

$$La\delta, \delta\alpha A^{0.5} \Rightarrow LaA^{0.5}$$

De donde puede concluirse que el exponente de Hack no contiene ninguna información acerca del carácter fractal de los ríos.

4.2 ANÁLISIS DE DATOS Y COMPARACIÓN DE RESULTADOS CON LAS INTERPRETACIONES TEÓRICAS

4.2.1 Estimación del exponente de Hack para cuencas de Colombia

A continuación se presentan los resultados de la estimación del exponente de Hack con base en mediciones realizadas en aproximadamente 1000 cuencas hidrográficas de Colombia. La selección de las cuencas en que se hizo la medición fue diseñada para que hubiese suficiente información en todos los ordenes de magnitud involucrados en la regresión, con el fin de evitar los problemas estadísticos asociados a la falta o poca presencia de datos en regiones particulares de los datos (Figura 10).

4.2.2 Pruebas sobre la elongación de cuencas

Para las 1000 cuencas seleccionadas se realizó un conjunto de mediciones, con el fin de revisar si la tendencia a la elongación de las cuencas con el incremento en el área es significativa para producir el efecto de la ley de Hack. Como se mostró en la sección 4.1.1.1, la tendencia a la elongación debe ser muy clara ya que el exponente de Hack encontrado en los datos es del orden de 0.56.

Usando la definición de diámetro y perímetro de la cáscara convexa (McCallum y Davis, 1979) se realizaron las regresiones entre el diámetro y el área (que corresponde a la relación de elongación, Eagleson, 1970) y el perímetro contra el área (que corresponde al

índice de Gravelius, Eagleson, 1970). Los resultados se muestran en la Figura 11.

Las regresiones muestran que, en las cuencas Colombianas, el efecto de la elongación tiene una influencia determinante sobre el exponente anormal de Hack. Además, revelan que existe una componente adicional para explicar el crecimiento anormal de la longitud del cauce, la cual puede estar asociada a la sinuosidad y/o a la conexión topológica existente en la red de drenaje. Esta conclusión se deriva del exponente distinto de 1.0 en la regresión L vs D , que muestra un crecimiento más rápido de la longitud con el cambio de tamaño.

Con base en estos resultados se derivan las formulas de relación de elongación e índice de compacidad para las cuencas de Colombia así:

Escala 60 segundos arco: $K = 1.11A^{0.03}$ y $R_e = 0.91A^{-0.05}$

Las medidas de elongación son consistentes en ambas escalas, mostrando que las cuencas de Colombia, son en general, alargadas en todas las escalas y con una clara tendencia a aumentar su diámetro más rápido que su ancho. Esta observación se confirma cuando se escalan 3 cuencas de diferente tamaño con su diámetro y se comparan visualmente (Figura 12).

4.2.2.1 Pruebas sobre la sinuosidad de los canales Con el fin de demostrar la importancia del cambio de sinuosidad a lo largo del canal utilizaremos el criterio de ordenamiento de Horton - Strahler para clasificar los canales. Así, determinaremos la sinuosidad promedio de un canal de orden $1, 2, \dots, \Omega$. Esta medición se hará en las cuencas de los ríos Arauca, Atrato, Baudó, Catatumbo, Patía, Putumayo, San Juan, Sinú, Tomo, Vaupés, Vichada, Caquetá, Guaviare, Magdalena y Meta.

En la Figura 13 se muestran los resultados para la cuenca del río Meta, en donde se revela que, en promedio, la sinuosidad de los canales crece hacia aguas abajo, o mejor con el orden del canal a una tasa aproximada de 0.35. Sin embargo, cuando se mira la variabilidad alrededor de los estados medios, se encuentra una gran dispersión, motivada principalmente por la presencia de controles geológicos en todas

las escalas que impiden que la sinuosidad presente una variabilidad constante a lo largo del cauce. Un ejemplo de este tipo de controles se puede entender si comparamos la sinuosidad del río Atrato, con la del río Cauca a la altura de Ituango, ambos ríos han acumulado prácticamente la misma área, sin embargo es evidente que el Cauca no puede meandrear libremente por el control que ejerce el cañón interandino.

En general podemos observar que la tendencia de la sinuosidad no es lo suficientemente sistemática para producir el efecto del exponente de Hack por sí sola, sin embargo se ha mostrado que su contribución al crecimiento de la longitud del cauce no es despreciable y que debe ser tenida en cuenta por modelos teóricos que expliquen la estructura geométrica de la red de drenaje de las cuencas hidrográficas.

4.2.2.2 Pruebas sobre el exponente topológico de Hack La búsqueda de la explicación del exponente de Hack en la topología de la red de drenaje ha sido uno de los esfuerzos matemáticos más significativos hasta el momento, desde que Shreve (1966) presentó su modelo de topologías aleatorias. Sin embargo, el exponente topológico de Hack solo corresponde con el exponente geométrico para valores grandes de la magnitud de la red de drenaje como consecuencia de la ley de los grandes números, por esta razón acá se hará un esfuerzo por medir independientemente el exponente topológico y compararlo con los valores esperados por los modelos de Shreve (1966) y Tokunaga (1978).

En la Figura 14a se muestra el resultado de la comparación entre el valor de $\log(D_t)/\log(A)$ observado en los datos y el valor esperado según el modelo de Shreve, se incluyen además las bandas de 2 y 3 desviaciones estándar. El valor teórico de esta relación esta dado por

$$\frac{\log(D_t)}{\log(m)} = \frac{1}{2} + \frac{\log(2\sqrt{\pi}(1 \pm \xi\sigma))}{\log(m)}$$

donde σ es la desviación típica y esta dada por $\left(\frac{\pi-3}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ y ξ es una variable aleatoria con distribución normal.

Las observaciones están dentro de los ran-

gos permisibles por el modelo. Esta prueba no es concluyente pues no hay ley de grandes números para la relación entre el diámetro y la magnitud, ya que la varianza no tiende a cero. En el capítulo siguiente se harán algunas pruebas adicionales del modelo de Shreve con el fin de obtener resultados más concluyentes sobre su validez.

En la Figura 14b se presentan los resultados de la comparación entre el exponente de Hack estimado a partir de los datos de aproximadamente 1000 cuencas de Colombia y el valor esperado por el modelo de árboles autosimilares; se puede apreciar cómo el valor es claramente subestimado. Este resultado demuestra que la organización topológica de la red de drenaje aporta una cantidad significativa a la observación del crecimiento anómalo de la longitud del cauce principal con el incremento del área.

4.2.3 *Estimación de la dimensión fractal de algunos ríos de Colombia*

Basados en el procedimiento explicado en la sección 4.1.1.4 se presentaran los resultados de la estimación de la dimensión fractal de algunos ríos de Colombia. En el programa CUENCAS se ha implementado un módulo que permite calcular la dimensión fractal de un río y permite al usuario escoger los puntos con que desea hacer la estimación de la dimensión. A continuación se presentarán 3 ejemplos en los cuales se hará esta medida. Se debe resaltar acá que estos resultados son con propósitos ilustrativos, pues como se demostró en la sección 4.3.2. la tendencia a la elongación de las cuencas con el aumento de tamaño viola la hipótesis de cuencas autosemejantes en forma propuesta por Mandelbrot, para explicar la ley de Hack en términos de ríos fractales.

Este ejercicio se hace con la intención de demostrar los problemas asociados a la estimación de la dimensión fractal de ríos extraídos de modelos digitales de terreno y en general de objetos muestreados en bajas resoluciones. Además, como se puede ver en las Figuras 15 y 16 la dimensión de Hausdorff - Besikovitch no están muy lejos de 1.0.

5 CONCLUSIONES

Se ha realizado un extenso estudio de medición en cuencas de Colombia, cuyas áreas varían en varios ordenes de magnitud, para examinar las teorías sobre la ley de Hack. Se demuestra que la tendencia de las cuencas a elongarse con el aumento de tamaño, es uno de los principales componentes en el crecimiento anómalo de la longitud del cauce principal con el aumento del área, observado en la ley de Hack. Además, se muestra el efecto no despreciable de la sinuosidad creciente hacia aguas abajo de los ríos en el crecimiento de la longitud del canal principal con el área y la importante contribución de la organización topológica, con base en los resultados del modelo de árboles autosimilares (Tokunaga, 1978).

Se ha dado un paso significativo en el campo del desarrollo de herramientas computacionales para el análisis de cuencas hidrográficas extraídas de modelos digitales de terreno que permitió realizar este estudio sin precedentes en Colombia, de la caracterización geomorfométrica de cuencas de gran tamaño que hasta hace algunos años parecían imposibles de medir y analizar. Y se diseño un programa con una interfaz gráfica amigable que permite la extracción de los parámetros geomorfométricos de cualquier cuenca hidrográfica de Colombia, obviamente con las limitaciones de escala que ofrecen los mapas trabajados.

REFERENCIAS

- Bak, P. Self - Organized Criticality in non conservative Models. *Physica A*, 191, 41-46. 1992.
- Eagleson, P.S., *Dynamic Hydrology*, McGraw-Hill, New York. 1970.
- Feder, J. *Fractals*. Plenum. New York. 1988.
- Hack, J. T. Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland. U. S. Geol. Surv. Prof. Pap 294-B, 195.
- Horton, R. E. Erosional development of streams and their drainage basins: Hydrophysical approach to quantitative geomorphology. *Geol. Soc. Am. Bull.* 56 275-370. 1945.
- Houle, M. E. Computing the width of a set. *Symposium of Computational Geometry*. 1-7.1985.
- Leopold, L.B. y Maddock, T. The hydraulic geometry of stream channels and some physiographic implications. *U.S. Geol. Surv. Prof. Paper.* 252. 1953.

- Mandelbrot, B. B. Self-affine fractals and fractal dimension. *Physica Scripta*. 32, 257-260. 1985.
- Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman. New York. 1983.
- Mantilla, R. *Analisis Multiescalas de Propiedades Morfométricas y de Caudales Máximos de Cuencas Hidrográficas De Colombia*. Tesis de Grado. Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia. 1999.
- Mantilla, R., Mesa, O. y Poveda, G. Geometría, topología y morfometría de las cuencas Magdalena - Cauca y Atrato a partir de modelos digitales de terreno. XIII Seminario Nacional de Hidráulica e Hidrología, Cali, 155-172. 1998.
- McCallum D. y Avis, D. A linear algorithm for finding the convex hull of a simple polygon. *Inform. Proces. Letters*. 9(5), 201-205. 1979.
- Mesa, O. J. y Gupta, V.K. On the main channel length-area relationships for channel networks. *Water Resources Research*. No.23(11), .2119-2122. 1987.
- Mesa, O., Poveda, G., Vélez, J., Barco, J., Botero B., Cuartas, A., Hoyos, C, Mantilla R., Mejía J., Montoya, M. *Hidro-Sig : Una Herramienta para la Estimación de Balances Hidrológicos de Colombia*. VII congreso Ibero - Americano de Sistemas de Información Geográfica. Merida, Venezuela. 1999.
- Peckham, S. D. New results for self-similar trees with application to river networks, *Water Resour. Res.* 31(4). 1023-1029. 1995.
- Richards, K. *Fluvial geomorphology*. *Progr. Phys. Geogf.* 12(3), 433-456. 1988.
- Rodríguez Iturbe, I., y A. Rinaldo. *Fractal River Basins: Chance and Self Organization*. Cambridge University Press. p. 251 - 355. 1997.
- Scheidegger, A.E. A stochastic model for drainage patterns into an intramontane trench. *Bull. Ass. Sci. Hydrol.* 12, 15-20. 1967.
- Shreve, R. L. Statistical law of stream numbers. *J. Geol.* 74, 17-37. 1966.
- Shumm, S.A. *The fluvial system*. J. Wiley. New York. 1977.
- Smart, J. S., Surkan, A. J. y Considine, J. P. Digital simulation of channel networks. *IAHS. Publ.* No. 75, 87-98. 1967.
- Tokunaga E. Consideration on the composition of drainage networks and their evolution. *Geogrp. Rep. of Tokio Metropolitan University*. No 13. 1978.
- Unidad de Planeación Minero Energética -UPME-, Colciencias y Posgrado de Recursos Hidráulicos. (1999) Proyecto Balances Hidrológicos de Colombia. Informe final.

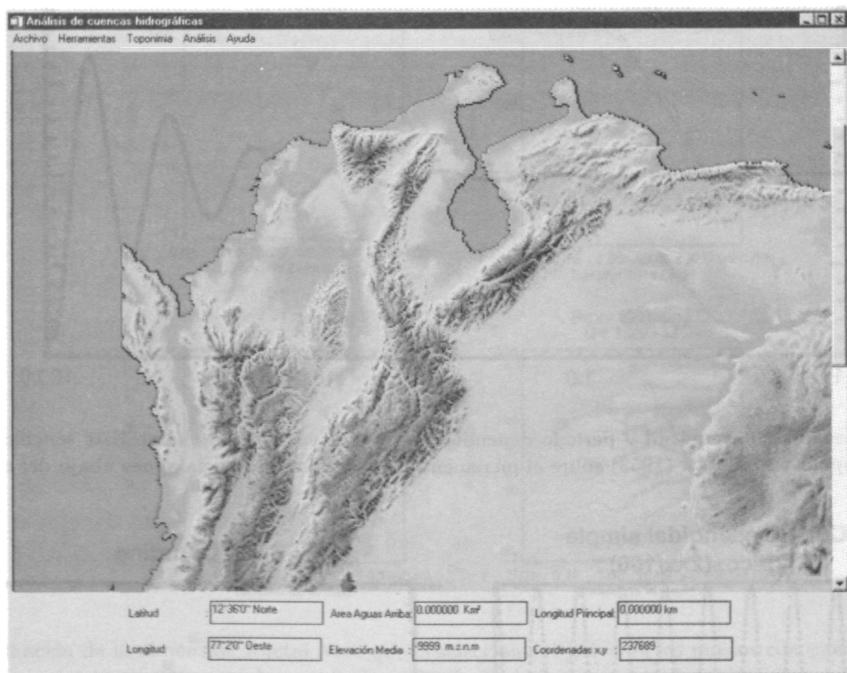


Figura 1. Interfaz principal de la versión final del programa CUENCAS.

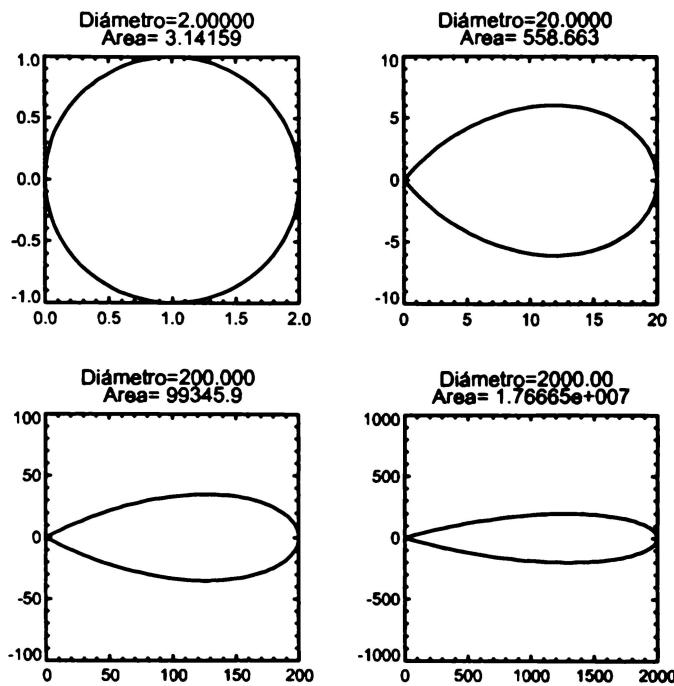


Figura 2. Secuencia de cuencas con la divisoria dada por la lemniscata.

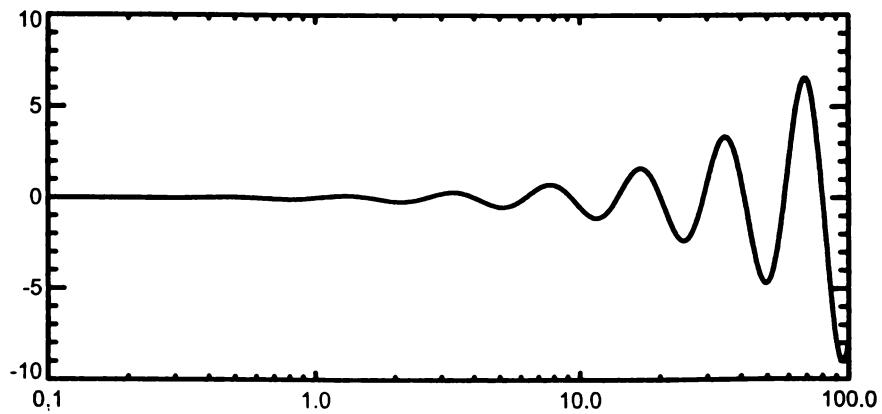


Figura 3. Función sinusoidal con amplitud y periodo dependientes de x de manera potencial. Este sencillo esquema, modela las observaciones de Leopold y Maddock (1953) sobre el incremento de la sinuosidad hacia aguas abajo del canal.

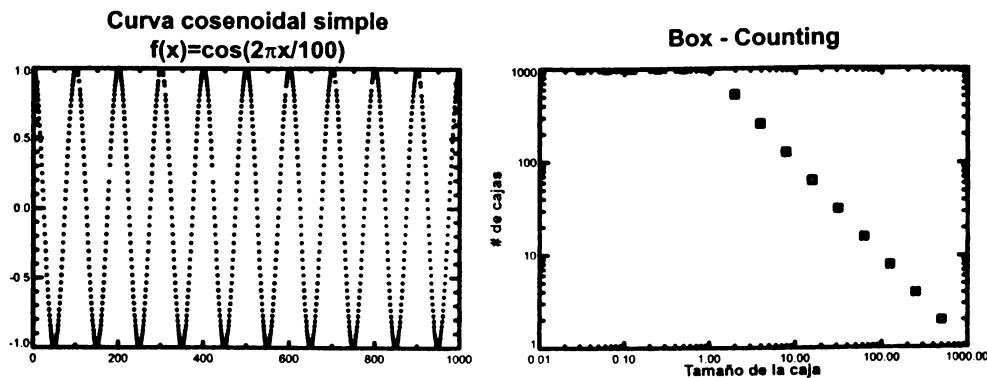


Figura 4. Proceso de "Box-counting" aplicado a una curva cosenoidal simple, muestrada en $\{x/x = \text{múltiplos de } 10\}$.

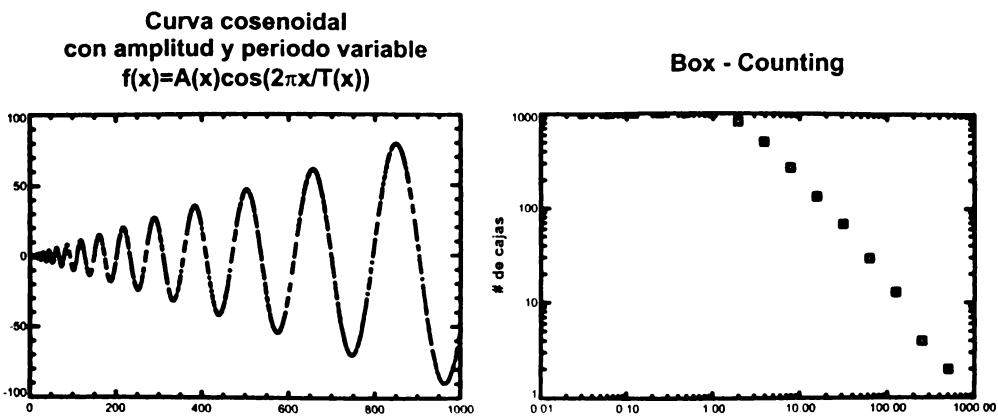


Figura 5. Proceso de "Box-counting" aplicado a una curva cosenoidal con amplitud y periodo dependiente de x , muestrada en $\{x/x = \text{múltiplos de } 10\}$.

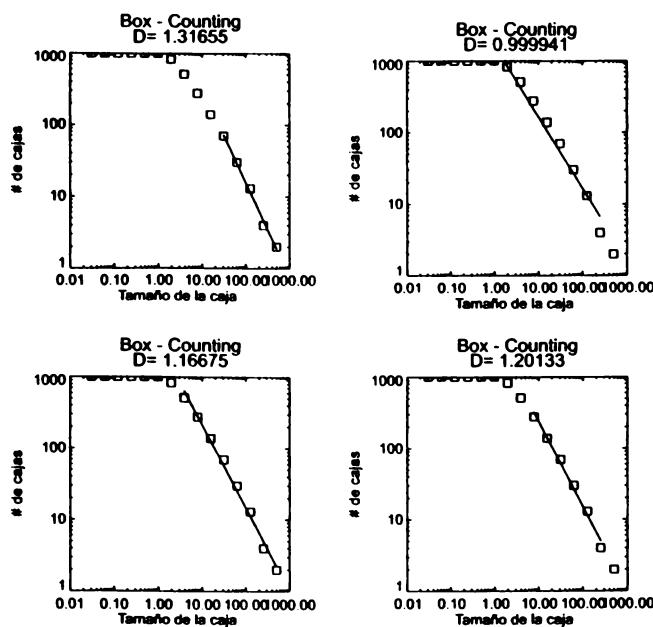


Figura 6. Determinación de la dimensión fractal Note que la selección subjetiva de los puntos con que se estima la pendiente, puede inducir a diferencias significativas en los resultados del cálculo de la dimensión fractal.

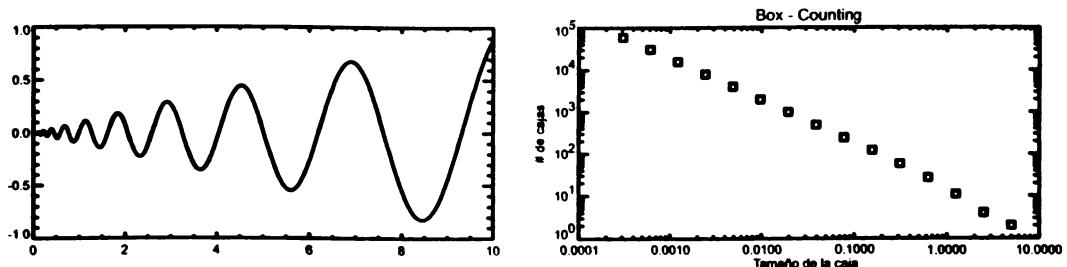


Figura 7. Proceso de "Box - counting" aplicado a una curva cosenoidal simple.

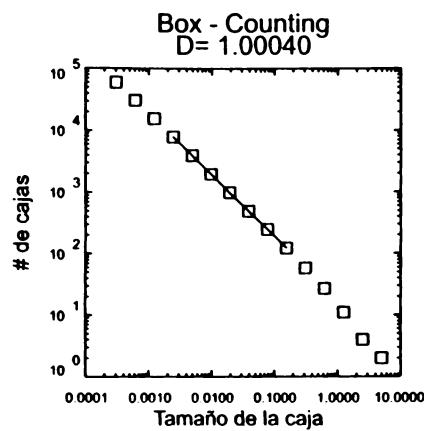


Figura 8. Determinación de la dimensión fractal.

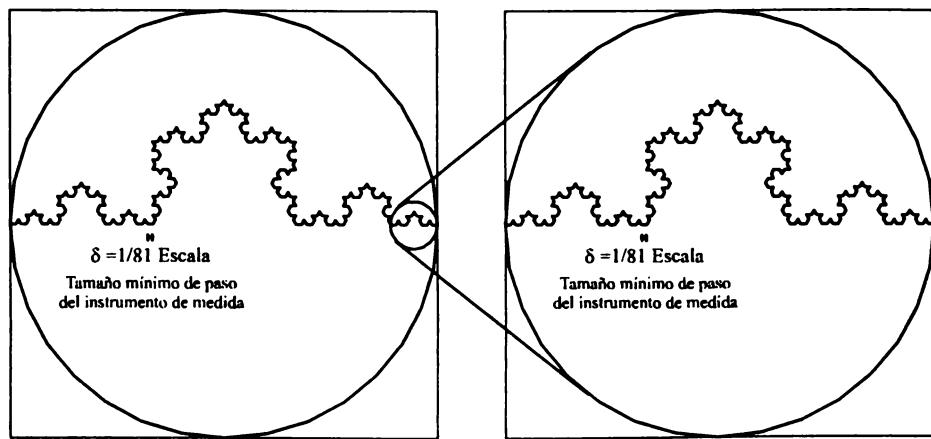
Cuenca 1**Área = 636172.5 km²****Escala = 1 : 900000****Longitud del cauce principal = 256 δ
= 2844.44 km****Cuenca 2****Área = 7853.98 km²****Escala = 1 : 100000****Longitud del cauce principal = 256 δ
= 316.05 km**

Figura 9. Esquema de medición de la longitud y el área en mapas de distinta escala de dos cuencas de distinto tamaño, bajo la suposición de cauce principal es un fractal.

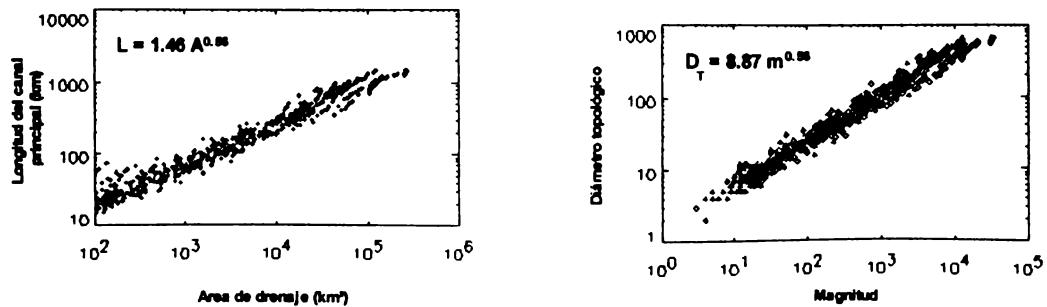


Figura 10. Regresiones de la longitud del cauce principal con el área y del diámetro topológico con la magnitud, para la determinación del exponente geométrico y topológico de Hack, respectivamente. $L = 1.46A^{0.56}$ y $D_T = 8.87m^{0.56}$. (Medido en un mapa con resolución de 60 segundos de arco).

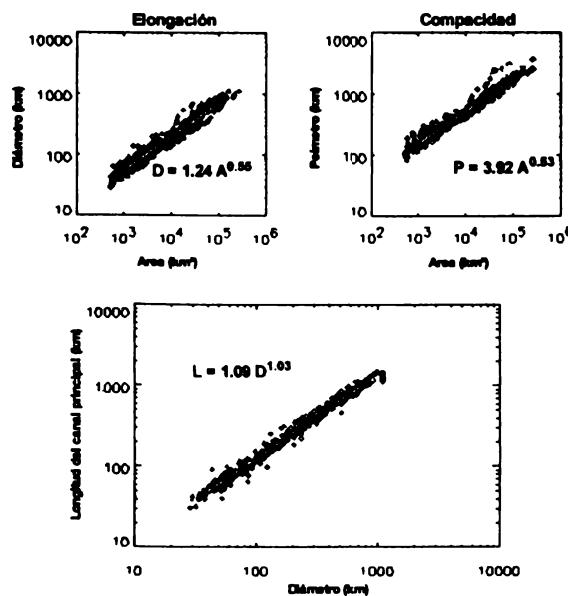


Figura 11. Regresión del diámetro y el perímetro contra el área de drenaje. De este resultado es posible derivar conclusiones sobre el índice de compactación y la relación de elongación. $D = 1.24A^{0.55}$ y $P = 3.92A^{0.53}$. Además, la regresión $L = 1.09D^{1.03}$ muestra que existe otra componente que ayuda a explicar el crecimiento anómalo de la longitud del cauce principal, L (resolución: 60 segundos de arco).

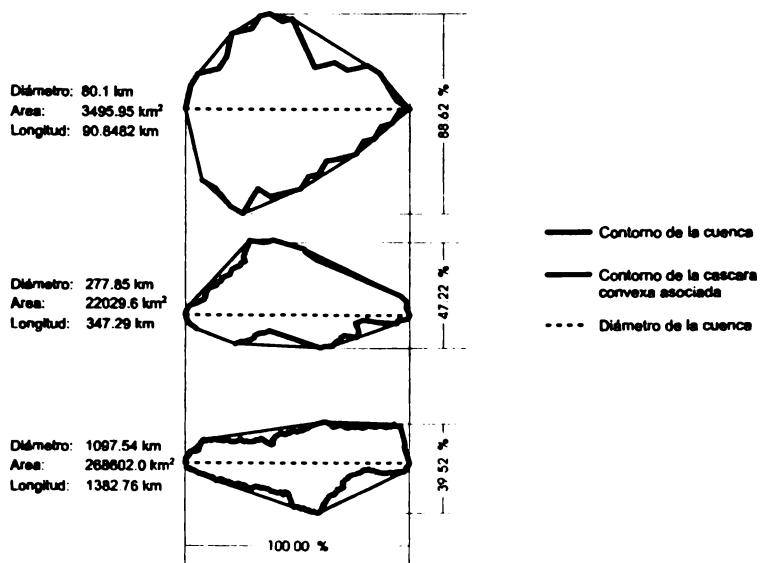


Figura 12. Contorno de 3 cuencas de diferente tamaño escaladas con la medida del diámetro. El ancho esta dado como un porcentaje del diámetro con el fin de ilustrar la idea del crecimiento de la elongación en las cuencas con el cambio de tamaño.

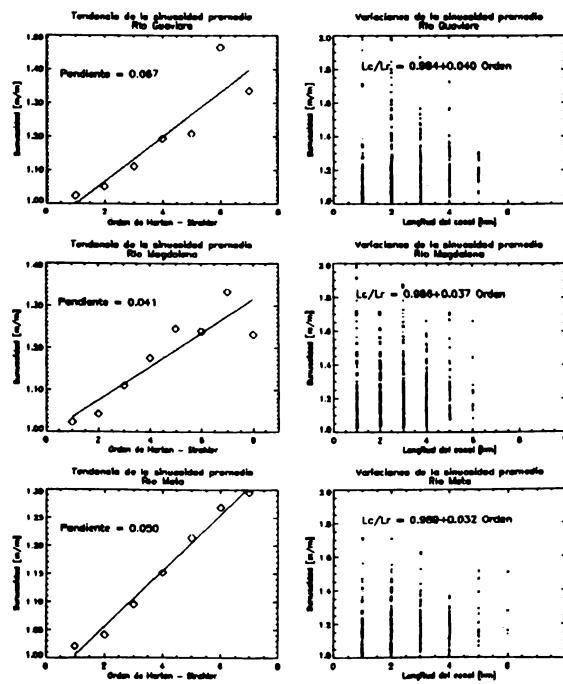


Figura 13 Gráficos de la sinuosidad de las corrientes de los principales ríos de Colombia.

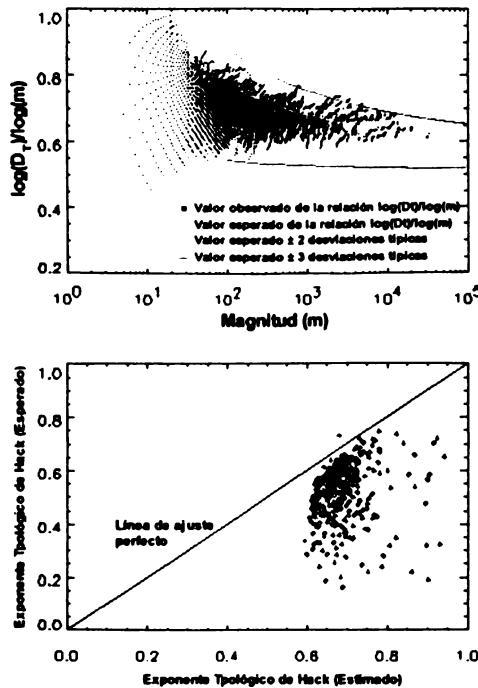


Figura 14. (superior) Comparación entre el valor teórico esperado por el modelo de Shreve y el valor observado de la relación $\log(D_t)/\log(m)$ en todos los puntos de la red de drenaje extraída del modelo digital de terreno de Colombia. (inferior) Comparación entre el valor teórico esperado por el modelo de árboles autosimilares de Tokunaga y el observado del exponente topológico de Hack en la red de drenaje extraída del modelo digital de terreno de Colombia.

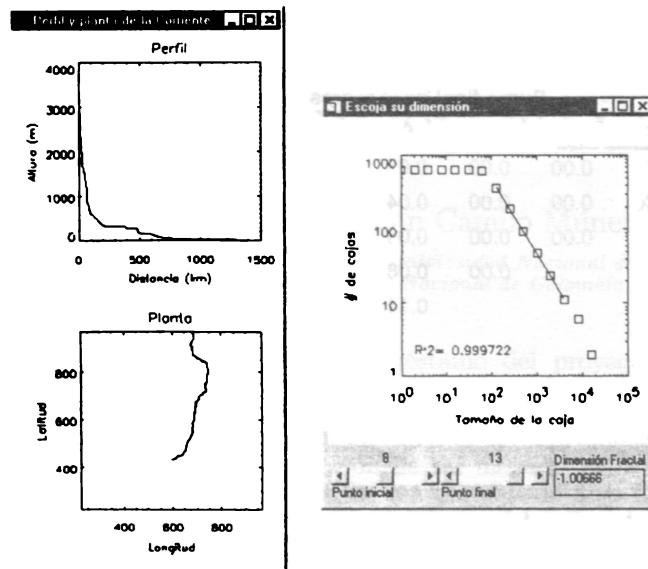


Figura 15 Estimación de la dimensión fractal de río Magdalena, $d = 1.00$.

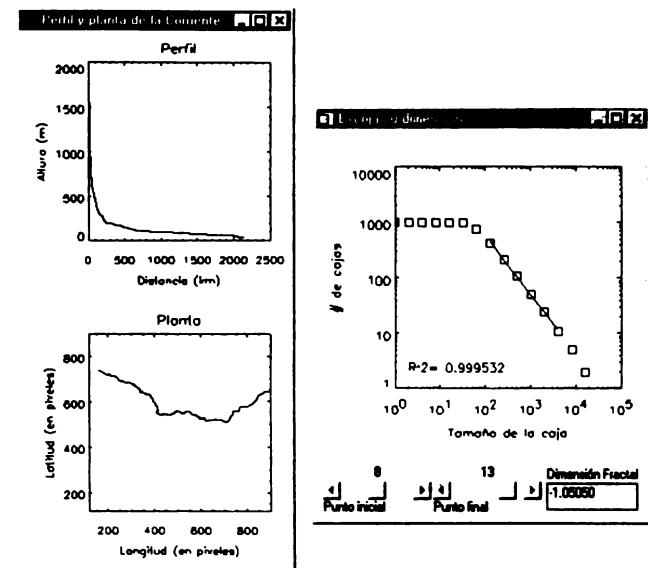


Figura 16 Estimación de la dimensión fractal del río Putumayo, $d = 1.05$.

Tabla 1. Determinación de la dimensión fractal usando "box-counting" y haciendo todas las posibles combinaciones de los puntos de la curva $\log(N_{\lambda}(A))$ vs $\log(\lambda)$.

Tabla 2. Determinación de la dimensión fractal usando "box-counting" y haciendo todas las posibles combinaciones de los puntos de la curva $\log(N_{lambda}(A))$ vs $\log(lambda)$.