

# APLICACIÓN DE LA TÉCNICA "WAVELETS" A UN CAMPO DE PRECIPITACIÓN. IDENTIFICACIÓN DE AUTOSEMEJANZA

Ana Cecilia Arbeláez<sup>1</sup>, Baldassare Bacchi<sup>2</sup>, Roberto Ranzi<sup>2</sup>, Horacio Arango<sup>3</sup>

1. Posgrado en Aprovechamiento de los Recursos Hidráulicos, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.

2. Universidad de Brescia, Italia.

3. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.

**RESUMEN** Entender el comportamiento de la lluvia a nivel espacial es de vital importancia para analizar los procesos hidrológicos que se desarrollan y mejorar las técnicas de predicción de los mismos. Este comportamiento es un interrogante aún abierto y con diversas posibilidades de desarrollo. Según Perica y Foufoula, (1996a) el patrón de las lluvias a nivel espacial es autosemejante en una escala de 1 a 64 km, es decir, que observando el fenómeno a diferentes escalas se obtiene características del proceso similares entre sí. Esta autosemejanza no está necesariamente condicionada al campo en particular sino que puede referirse a la distribución de probabilidad del mismo, es decir, autosemejanza en la distribución de probabilidades. Para probar esta autosemejanza, el medio científico ha utilizado diferentes herramientas matemáticas entre las cuales se encuentra el espectro de frecuencias. En el presente estudio se utilizó la técnica denominada "Wavelet-transform" para descomponer el campo de precipitación en diferentes escalas. Utilizando el análisis de múltiple escalamiento propuesto por Mallat (1989) se verificó, para dos eventos de tormenta localizados en el norte de Italia (16384 km<sup>2</sup>), que el campo de precipitación presentaba características de autosimilaridad simple en un rango de escalas de 1 a 64 km corroborando la afirmación de Perica y Foufoula (1996a).

**ABSTRACT** Spatial behaviour of rainfall is still not a well known topic and is of prime importance for analysing and predicting hydrological process.

According to Perica and Foufoula Georgiou (1996a) the spatial pattern of rainfall is simple-scaling in a range of scales from 1 to 64 km, and that similarity behaviour applies to the probability distribution function. Different mathematical tools have been used to prove that similarity behaviour.

In this paper the Wavelet-transform technique was used to decompose at different spatial scales the rainfall pattern of two storms over an area of 16384 km<sup>2</sup> in Northern Italy.

Simple-scaling properties of both rainfall storm has been found after applying the multiresolution decomposition proposed by Mallat (1989) to the rainfall data in spatial scales ranging between 1 to 64 km. This result confirms the observations of Perica and Foufoula (1996a).

## 1 MARCO TEÓRICO

Las onditas (Wavelets) son funciones matemáticas que descomponen un conjunto de datos en sus diferentes componentes de escala y localización. Estas funciones tienen muchas aplicaciones en diversos campos de investigación como compresión de imágenes, análisis de campos de turbulencia, información

satelital, análisis de terremotos y para detectar autosimilaridad en un conjunto de datos.

### 1.1 Antecedentes al análisis de onditas (Wavelets)

La historia de las onditas tiene sus comienzos principalmente con la técnica de descomposición de funciones de Fourier (1807), se fue de-

sarrollando a través de diversas áreas de investigación que exigían resultados más refinados que los obtenidos con la técnica de Fourier.

Como es bien conocido, la técnica de descomposición de Fourier consiste básicamente en representar una función periódica como una combinación lineal infinita de funciones seno y coseno, indicando cuales son las principales frecuencias de la función.

$$X(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

donde  $X(t) = X(t + 2\pi)$

Los coeficientes de Fourier se pueden obtener con las expresiones:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X(t) \cos ktdt \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X(t) \sin ktdt \end{aligned}$$

Esta descomposición se puede realizar en  $\cos kt$  y  $\sin kt$  dado que estos constituyen una base ortogonal para el espacio  $L^2[0, 2\pi]$ . Este último es el espacio de las funciones de cuadrado integrable, es decir las funciones de energía finita,

$$X(t) \in L^2[0, 2\pi] \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} |X(t)|^2 < \infty$$

Esta técnica ofrece ventajas particulares para la descomposición de funciones periódicas, estacionarias y continuas pero sí se desea modelar funciones no diferenciables o discontinuas los resultados no son tan satisfactorios, inclusive se han descubierto funciones continuas con período  $2\pi$  para las cuales la suma de Fourier no converge. Estas nuevas necesidades obligaron al cuestionamiento sobre la existencia de otro conjunto de funciones que sirvieran de base para representar cualquier función.

Haar (1909) encontró otro conjunto de funciones ortogonales que servían como base para cualquier función. La solución propuesta por Haar aunque es la más simple pero dio inicio al desarrollo de las funciones Wavelets. Así se

comenzó a estudiar otras funciones que cumplieran algunas condiciones matemáticas y permitieran la reconstrucción de cualquier tipo de función. Mallat (1989) relacionó el análisis de onditas con los filtros utilizados en el procesamiento de señales, expandiendo esta aplicación al campo bidimensional. Finalmente, Daubechies (1992) hizo un aporte muy importante al encontrar una forma de determinar para cualquier entero  $r$  una base ortonormal de soporte compacto para el espacio  $L^2[0, 2\pi]$ .

## 1.2 Análisis en onditas (Wavelets)

Una función  $\psi(t)$  se llama una Wavelet si  $\psi(t) \in L^2(R)$  y  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ , es decir que es una función de  $L^2(R)$  con media cero y, (a) escalando y (b) trasladando la función  $\psi(t)$  se construye una familia  $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$   $a > 0, b \in R$ . Es importante resaltar que las onditas constituyen una base generadora de funciones, que además de determinar las principales escalas de la señal, a través del parámetro de escala  $a$ , determinan también su localización, a partir de la media del parámetro de localización  $b$ , ofreciendo ventajas adicionales y obviando así una de las limitaciones de la técnica de Fourier.

Si es una base de  $L^2(R)$  entonces los coeficientes de la descomposición se obtienen como el producto interno entre la función  $X(t)$  y la base de  $L^2(R)$

$$\begin{aligned} W_*^\psi(a, b) &= \langle X(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ a &> 0, b \in R \end{aligned}$$

Según, por ejemplo, Calderón (1964) si  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(w)|^2}{w} dw < \infty$ , entonces la función  $X(t)$  se puede obtener como el producto interno entre los coeficientes y la familia de funciones generadora

$$X(t) = \frac{1}{W_*^\psi(a, b)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |W_*^\psi(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2}$$

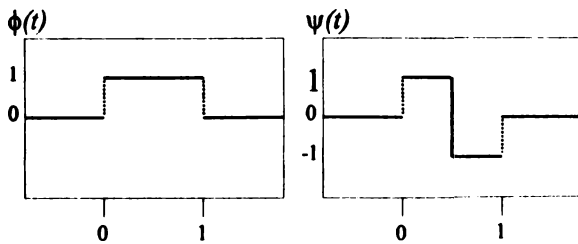
El interrogante principal se convierte en

como construir  $\psi(t)$  tal que  $\psi_{a,b}(t)$  sea una base ortogonal de  $L^2(R)$ .

**1.2.0.1 La base Haar** Haar (1909) propuso un grupo de funciones ortogonales muy simples para descomponer una señal.

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



La función  $\phi(t)$  es llamada la función de escalamiento o función padre y  $\psi(t)$  es llamada la función "Wavelets" (madre). Aplicadas a una señal actúan como un filtro matemático ( $\phi(t)$  paso bajo y  $\psi(t)$  paso alto) que permite almacenar las aproximaciones y los detalles la señal.  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  deben cumplir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

$$\|\psi(t)\| = 1$$

Sea  $X(t)$  la señal a ser analizada, se tiene entonces

$$\bar{X}_a(b) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \phi_{a,b}(t) dt$$

$$X'_a(b) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \psi_{a,b}(t) dt$$

$\bar{X}_a(b)$  es llamada la función de aproximación local de la señal a la escala  $a$  y localización  $b$ .

$X'_a(b)$  es llamada la transformada "Wavelets" o también la función de fluctuaciones locales o los detalles de la señal a la escala  $a$  y localización  $b$ .

### 1.2.1 La base Daubechies

Finalmente Daubechies, 1992 (10) generalizó los resultados obtenidos por Haar y construyó para cada entero  $r$  una base ortonormal para  $L^2(R)$  de la forma y con las siguientes características:

- El soporte para  $\psi_r$  es el intervalo  $[0, 2r + 1]$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_r dt = \dots = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_r^r dt = 0$
- $\psi_r(t)$  tiene  $\gamma_r$  derivadas continuas.  $\gamma = 1/5$
- $r = 0 \rightarrow$  Haar

Esta familia más amplia de funciones es de mayor complejidad y se comportan mejor para el análisis de funciones discontinuas, no derivables y adicionalmente, la proporción de coeficientes resultantes iguales a cero es mayor facilitando las operaciones y el almacenamiento de datos.

## 1.3 Análisis de Multirresolución

Mallat (1989) propuso un análisis de escala ( $j$ ), utilizando las funciones "Wavelets" en repetidas oportunidades sobre las aproximaciones  $\bar{X}_a(b)$ . Es decir el campo original  $\bar{X}_0$  en una dimensión o escala ( $m = 0$ ) se descompone en, un campo promedio en escala  $m = 1$  y en la fluctuación  $\{X'_1\}$ , luego  $\bar{X}_1$  se descompone en  $\bar{X}_1$  y  $\{X'_2\}$  ( $m = 2$ ), y así sucesivamente. Obteniendo coeficientes de detalles (filtros de paso alto  $H$ ) para todas las escalas  $m$  en estudio y coeficientes de aproximación (filtros de paso bajo  $L$ ) para la escala más pequeña considerada. Esto se puede apreciar en la Figura 1.

### 1.3.1 Procesamiento de imágenes usando "Wavelets"

El análisis de multirresolución presentado anteriormente es fácilmente llevado al campo bidimensional aplicando los filtros de paso bajo ( $L \rightarrow$  aproximación) y paso alto ( $H \rightarrow$  fluctuación) a las filas y luego a las columnas con la

operación matemática de convolución, definida como

$$[X \otimes f]_{(u)} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f(u-t) dt$$

para  $-\infty < u < \infty$

donde  $f$  es el filtro de paso bajo si se quieren obtener las aproximaciones o  $f$  es el filtro de paso alto si se quieren obtener los detalles (Figura 2).

Los coeficientes para la combinación lineal de las onditas se obtienen de los datos iniciales y son direccionales, es decir, indican fluctuaciones del proceso en diferentes direcciones. Esto se puede apreciar en la Figura 2, donde cada cuadro final representa además de las aproximaciones, los detalles horizontales, verticales y diagonales.

$L$  es conocido como un filtro de paso bajo, es decir, que concentra la señal en las frecuencias más altas y permite obtener los valores aproximados del proceso; mientras que  $H$  es conocido como un filtro de paso alto, es decir, que concentra la señal en las frecuencias más bajas y permite obtener los detalles del proceso (Figura 3).

$L$  y  $H$  constituyen el filtro de espejo cuadrado "Quadrature Mirror Filter" (QMF). Para lo cual se debe cumplir que la suma del cuadrado de la Transformada de Fourier consigo misma, pero desplazada  $\pi$  unidades sea igual a 2  $\rightarrow |\hat{H}(\omega + \pi)|^2 + |\hat{H}(\omega)|^2 = 2$ .

Para el análisis de multirresolución del caso bidimensional obtienen los coeficiente de detalles para todas las escalas en estudio y coeficientes de aproximación para la escala más pequeña considerada. Esto se puede apreciar en la Figura 4.

El campo original  $\bar{X}_0$  ( $m = 0$ ) se descompone en  $\bar{X}_1$  y  $\{X'_{1,i}\}_{i=h,v,d}$  ( $m = 1$ ). Luego  $\bar{X}_1$  se descompone en  $\bar{X}_2$  y  $\{X'_{1,i}\}_{i=h,v,d}$  ( $m = 2$ ), y así sucesivamente. Las fluctuaciones  $\{X'_{m,i}\}_{i=h,v,d}$  locales pueden ser interpretadas como gradientes en las direcciones horizontal, vertical y diagonal del campo representado.

## 2 APLICACIÓN PRÁCTICA

Se realizó una aplicación de los conceptos previamente presentados en la zona localizada al norte de Italia, cerca a Venecia. En esta zona se disponía de información satelital y de radar de dos eventos de lluvia independientes Bacchi et al. (1996). Algunas propiedades de la transformada wavelet de estos campos fueron investigadas por Ranzi (1994) y Marazzi et al (1996).

Se plantea la hipótesis que la descomposición de un campo  $\bar{X}_0$  en los coeficientes de diferentes escalas permite identificar patrones de autosimilaridad, ya que dichos coeficientes almacenan información relacionada con el proceso mismo y si el proceso es autosimilar los coeficientes deben reflejarlo, es decir deben ser autosimilares también. Para probar esto se utilizarán las onditas para realizar el análisis sobre la distribución de los coeficientes a diferentes escalas, tratando de comprobar que existe una relación entre estas distribuciones, es decir

$$\bar{X}_m \stackrel{d}{=} (2^{m-1})^H \bar{X}_1$$

$$X'_{m,i} \stackrel{d}{=} (2^{m-1})^H \bar{X}_1$$

Donde  $H$  es el exponente de escala,  $m$  es la escala y  $\stackrel{d}{=}$  se refiere a igualdad en la distribución.

### 2.1 Información disponible

La información utilizada se compone de imágenes de radar, registrados en celdas de 1km\*1km, de dos eventos de tormenta en el norte de Italia. El primer evento (04-10-92) fue registrado cada 15 minutos durante 2.5 horas para un total de 11 imágenes. El segundo evento (02-10-93) fue registrado por 12 imágenes cada hora.

La información de radar cubría un área 128\*128 km<sup>2</sup> para el evento del 2 de octubre de 1993 y un área de 120\*120 km para el evento del 4 de octubre de 1992. Ambos eventos fueron registrados con una resolución de 1km\*1km.

## 2.2 Análisis de multirresolución de los campos de precipitación

Se realizó la descomposición de los campos de precipitación, con el uso de la ondita de Haar, a diferentes escalas en aproximaciones y detalles con ayuda del software Matlab versión 4.0. De esta forma se obtuvieron los coeficientes de aproximaciones y de detalle para los eventos estudiados. Se estudio la distribución de dichos coeficientes y se trató de identificar la autosemejanza del campo de precipitación en ellos.

### 2.2.1 Distribución gaussiana de los coeficientes a diferentes escalas

Para los coeficientes obtenidos en el análisis de multirresolución a diferentes escalas se realizó un ajuste de distribuciones para identificar el comportamiento de dichos coeficientes. Dado que los coeficientes de detalle en su mayoría son negativos no fue posible ajustar distribuciones en el campo logarítmico. Por este motivo se trató verificar, en primera instancia, el ajuste a una distribución simétrica como la distribución gaussiana. Para ello se realizó la prueba de ajuste gráfico, la prueba de ajuste Chi cuadrada ( $\chi^2$ ) y la prueba F. Tanto en el ajuste gráfico (Figura 5) como en los resultados de las pruebas de ajuste se puede apreciar que la hipótesis de que los coeficientes se distribuyen gaussianamente no puede ser rechazada, a pesar de que algunas desviaciones de la distribución gaussiana son observadas, especialmente para los valores de los coeficientes cercanos a la media cero.

### 2.2.2 Autosemejanza en los coeficientes de diferentes escalas

Una vez se realizó la descomposición en onditas y se verificó el ajuste de los coeficientes a la distribución gaussiana se procedió a verificar la hipótesis de comportamiento autosemejante en las aproximaciones y detalle a diferentes escalas. Ya que los coeficientes parecen, en una primera aproximación, se comportan según la distribución gaussiana (para los detalles la media es cero) el análisis se realizó so-

bre la desviación estándar de los coeficientes a diferentes escalas, es decir

$$\begin{aligned}\overline{\sigma_m} &= (2^{m-1})^H \overline{\sigma_1} \\ \sigma'_{m,i} &= (2^{m-1})^{H_i} \sigma'_{1,i} \\ i &= h, v, d\end{aligned}$$

En la Figura 6 se presenta la variación de la desviación estándar con la escala para un evento en particular, resultados similares se obtuvieron para todos los eventos.

En la Tabla 2 se resume los resultados obtenidos para el exponente característico H y la correlación obtenida utilizando el total de escalas disponibles (5). Se verificó que las correlaciones fueran significativas para el número de datos utilizados.

Para que se tenga un nivel de significancia de  $\alpha = 0.01$  en la correlación obtenida en un conjunto de 5 datos el coeficiente de determinación debe ser superior a  $r = 0.8745$ , para una significancia de  $\alpha = 0.001$  el coeficiente de correlación debe ser superior a  $r = 0.9507$ . Según los resultados reportados en las Tablas 3a y 3b se puede observar que el 100% de los ajustes tiene una significancia de  $\alpha = 0.01$  y el 97.9% una significancia de  $\alpha = 0.001$ .

## 3 ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los coeficientes de detalles obtenidos de la descomposición en onditas son direccionales, es decir, permiten identificar altas frecuencias de la señal en las direcciones horizontal, vertical y diagonal. Para los eventos estudiados, los campos de precipitación no presentaban características radicalmente diferentes entre las direcciones horizontal y vertical para todos los eventos ya que el comportamiento de los coeficientes y de sus distribuciones fue aproximadamente constante. El exponente característico resultó ser aproximadamente constante y también la constante  $\sigma_1$  no cambia significativamente en las tres direcciones. Solamente en los resultados en la dirección diagonal si presentan algunas diferencias respecto a las direc-

ciones restantes, es decir que se presenta una suave anisotropía en la dirección diagonal.

Se encontró que la hipótesis de que los coeficientes se comportaban según la distribución gaussiana no puede ser rechazada, en una primera aproximación, permitiendo realizar el análisis de autosimilaridad sobre la desviación estándar de las distribuciones de los coeficientes.

La descomposición con la ondita propuesta por Haar en diferentes escalas (multirresolución) para los campos de precipitación estudiados permitió identificar el patrón de autosemejanza simple en la distribución de los coeficientes en escalas de 1 a 64 km, y los niveles de significancia obtenidos en los ajustes de la desviación estándar con la escala usando una ley de escalamiento fueron muy altos, superiores en todos los casos a  $\alpha = 0.01$  y en un 97.9% superior a  $\alpha = 0.001$ .

Esta autosimilaridad en el campo de precipitación es especialmente útil para la desagregación del campo a escalas inferiores cuando se dispone inicialmente de escalas grandes como es el caso de las imágenes de radar o de satélite, ya que permiten obtener el campo de precipitación a cualquier escala utilizando la propiedad de autosemejanza.

#### AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos muy especiales al gobierno italiano que a través del Instituto Italo Latinoamericano IILA permitió el financiamiento de una pasantía en Italia, a la Universidad de Brescia y a los compañeros del Grupo de Estudio de Señales de la Universidad Nacional de Colombia (sede Medellín) por sus enseñanzas y colaboración.

#### REFERENCIAS

- Arneodo, A., Grasseau, G. y Holschneider, M. "Wavelet Transform of Multifractals". *Physical Review Letter*. Vol 61, Number 20, 1988.
- Bacchi, B., Ranzi, R. y Borga, M. "Statistical Characterization of spatial patterns of rainfall cells in extratropical cyclones". *Journal of Geophysical Research*. Vol 101, No D21, 1996.
- Haar, A. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme, *Math. Ann.*, 69, 1910.
- Mallat, S. A Theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transaction on Pattern and Machine Intelligence*, 11 (7), 674-693, 1989.
- Marazzi A., Gamba P. y Ranzi R. Rain pattern detection by means of packet wavelets, *Proc. of the 1996 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS '96)*, Vol. IV, Lincoln, Nebraska, USA. 1996.
- Perica, S. y Foufoula-Georgiou, E. Linkage of scaling and thermodynamics parameters of rainfall: Results from midlatitudes mesoscale convective systems. *Journal of Geophysical Research*. Vol 101, No D3. 1996a.
- Perica, S. y Foufoula-Georgiou, E. Models for multiscale disaggregation of spatial rainfall based on coupling meteorological and scaling descriptions. *Journal of Geophysical Research*. Vol 101, No D21. 1996b.
- Strang, G. Wavelets transforms versus Fourier transforms. *American Mathematical society*, Vol 28, Number 2. 1993.
- Ranzi, R. The wavelet transform as a new technique for analysing spatial scales of rainfall fields, *Proc. Int. Meeting on "Atmospheric Physics and Dynamics in the Analysis and Prognosis of Precipitation Fields"*, Rome, 1994.
- Vidakovic, B. and Müller, P. Wavelets for Kids. A Tutorial Introduction. 1991.

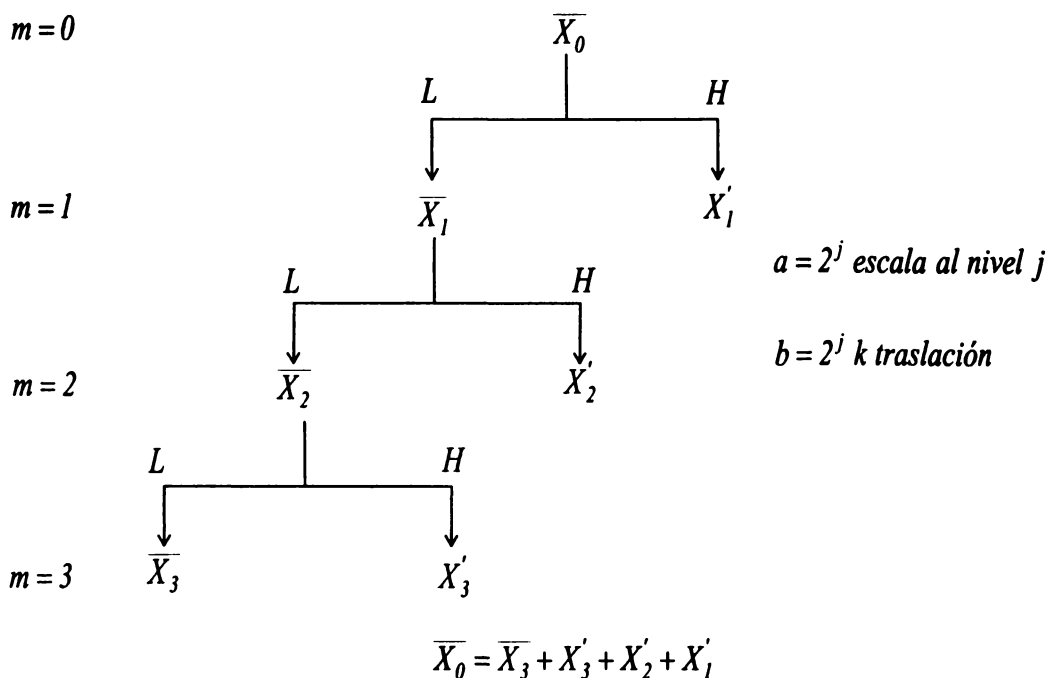


Figura 1. Esquemmatización del análisis de múltiple escalamiento unidimensional propuesto por Mallat, 1989.

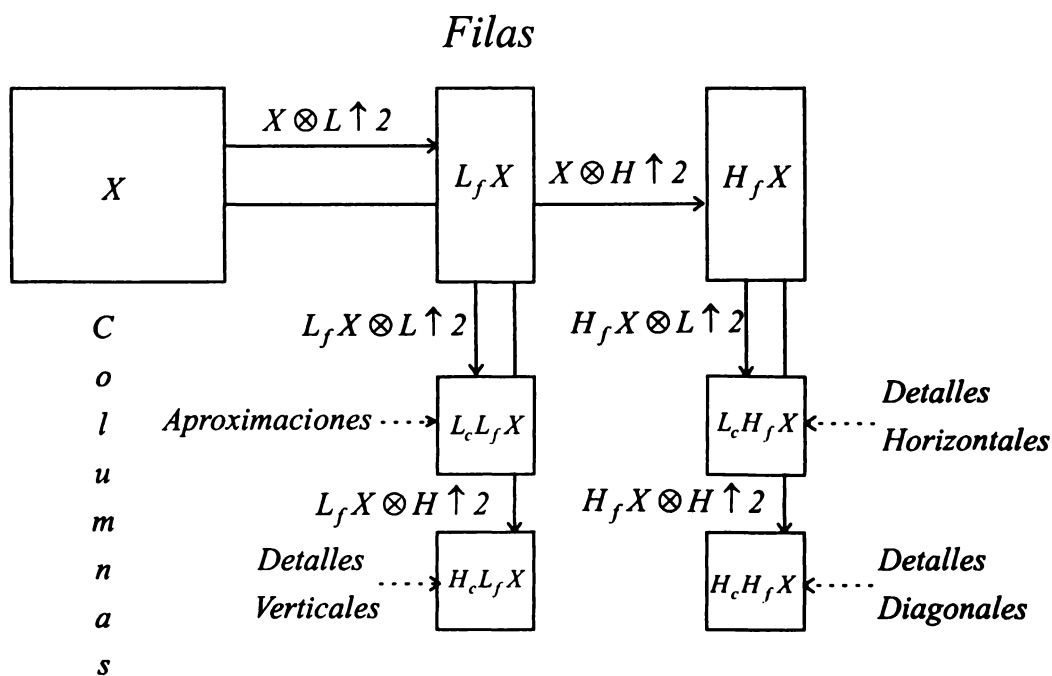


Figura 2. Esquemmatización del análisis con onditas en el campo bidimensional.

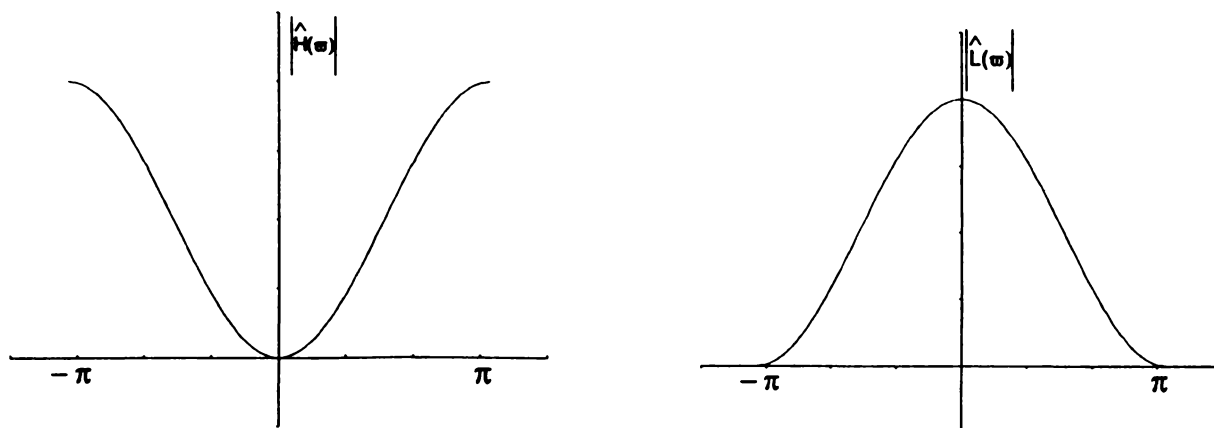
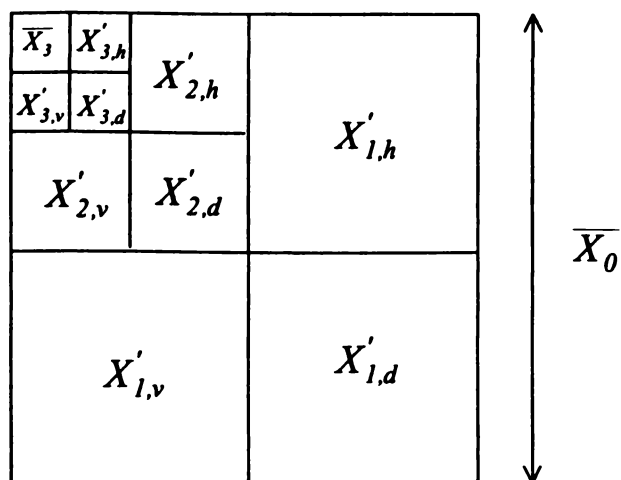


Figura 3. Filtros de paso baja (L) y paso alto (H).



$$\overline{X_0} = \overline{X_3} + \sum_{i=h,v,d} X'_{3,i} + \sum_{i=h,v,d} X'_{2,i} + \sum_{i=h,v,d} X'_{1,i}$$

Figura 4. Esquemización del análisis de múltiple escalamiento bidimensional propuesto por Mallat, 1989.



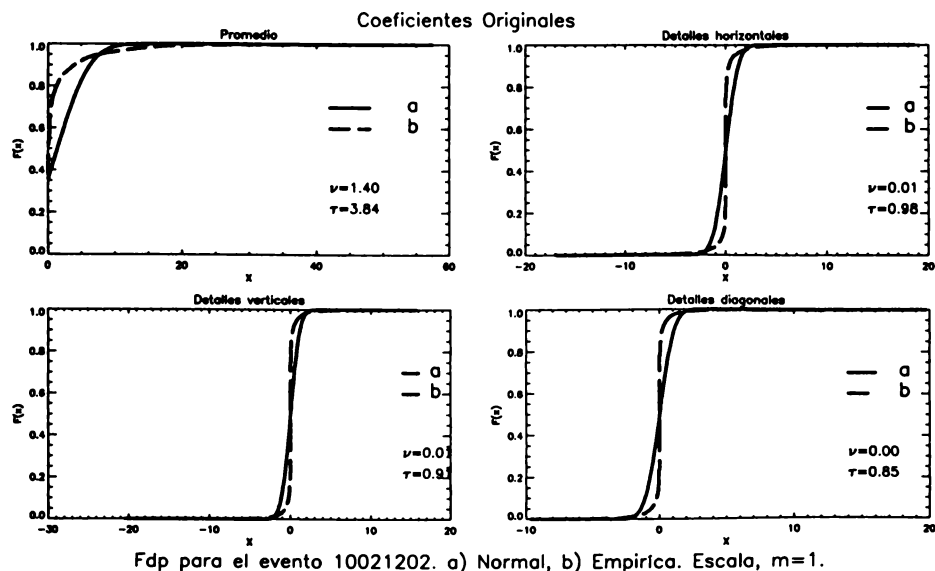


Figura 5 Ajuste gráfico de los coeficientes a la distribución gaussiana, escala  $m=1$ .

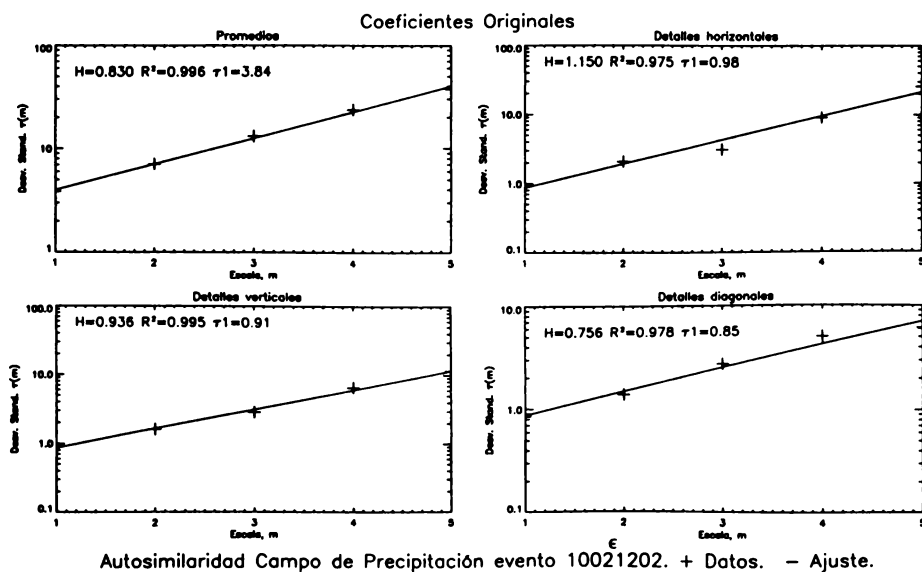


Figura 6. Exponente característico  $H$  para las desviaciones estándar en diferentes escalas de las aproximaciones y detalles horizontales, verticales y diagonales.

**Tabla 1.** Rango de escalas usadas en este estudio, sus índices relativos y el tamaño del conjunto de datos disponibles para cada escala.

Escala física	Tamaño del conjunto de datos	Escala relativa (m)
1km*1km	128*128	0
2km*2km	64*64	1
4km*4km	32*32	2
8km*8km	16*16	3
16km*16km	8*8	4
32km*32km	4*4	5

**Tabla 2.** Resultados para el exponente característico H y el coeficiente de determinación  $R^2$  para el evento 10-04-92 y para el evento 10-02-93.

Evento	Promedios		Detalles horizontales		Detalles verticales		Detalles diagonales		Evento	Promedios		Detalles horizontales		Detalles verticales		Detalles diagonales	
33704	H	R <sup>2</sup>	H	R <sup>2</sup>	H	R <sup>2</sup>	H	R <sup>2</sup>	34010	H	R <sup>2</sup>	H	R <sup>2</sup>	H	R <sup>2</sup>	H	R <sup>2</sup>
10040317	0.728	0.997	0.942	0.989	0.968	0.994	0.875	0.975	10020702	0.852	1	0.897	0.997	0.882	0.999	0.653	0.958
10040332	0.741	0.998	0.936	1	0.935	0.997	0.937	0.987	10020802	0.905	1	0.915	0.999	0.815	0.991	0.566	0.956
10040347	0.766	0.999	0.891	1	0.896	0.997	0.993	0.991	10020902	0.929	1	0.845	0.993	0.815	0.996	0.55	0.983
10040402	0.802	0.999	0.973	1	0.961	0.998	0.865	0.997	10021002	0.904	1	0.855	0.993	0.837	0.99	0.859	0.981
10040417	0.831	1	0.964	0.996	0.911	0.999	0.872	0.993	10021102	0.896	1	1.111	0.968	0.784	0.937	0.736	0.979
10040432	0.736	0.995	0.987	0.994	0.963	0.999	0.972	0.999	10021202	0.83	0.998	1.15	0.988	0.937	0.998	0.756	0.989
10040447	0.733	0.994	0.995	0.998	1.031	0.996	1.033	0.991	10021302	0.921	1	0.798	0.989	0.852	0.992	0.795	0.999
10040502	0.738	0.998	0.874	0.994	0.979	0.998	0.967	0.994	10021402	0.799	0.997	1.109	0.996	0.947	0.986	1.02	0.911
10040517	0.748	0.999	0.965	0.991	0.726	1	0.858	0.995	10021502	0.854	1	0.814	0.993	1.003	0.996	0.755	0.957
10040532	0.805	1	0.837	0.967	0.746	0.957	0.914	0.993	10021602	0.77	0.999	0.876	0.995	0.938	0.984	0.795	0.991
10040547	0.829	1	1.024	0.998	0.889	0.999	0.948	0.974	10021702	0.72	0.996	0.902	1	1.114	0.998	0.847	0.991
Promedio	0.769		0.94		0.909		0.93		10021802	0.75	0.998	0.771	0.968	1.091	0.993	0.989	1
Desv. Estand	0.04		0.05		0.095		0.06		Promedio	0.84		0.92		0.92		0.78	
									Desv. Estand	0.07		0.13		0.11		0.14	