AVANCES EN RECURSOS HIDRÁULICOS, NÚMERO 07, PÁGINAS 095-101, NOVIEMBRE DE 2000

NOTAS INTRODUCTORAS A LOS CAPÍTULOS INICIALES DEL LIBRO "THE PHYSICS OF FLUID TURBULENCE" DE Mc. COMB

Carlos Alberto Palacio

Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín.

RESUMEN En este artículo, siguiendo la lección de Mc Comb (1996), se exponen algunos conceptos fundamentales en torno al fenómeno de la turbulencia en Mecánica de Fluidos. En la primera parte se presentan las ecuaciones de Navier - Stokes en la forma solenoidal, las correlaciones entre dos puntos, las escalas de longitud en turbulencia isotrópica y la turbulencia estacionaria. Luego, haciendo uso del análisis de Fourier, se continua trabajando en el espacio del número de onda para obtener los momentos del campo de velocidad y el tensor de espectro isotrópico. Finalmente se enuncian los conceptos de creación y disipación de energía en un fluido viscoso, la cascada de energía turbulenta y las hipótesis de Kolmogorov.

ABSTRACT In this paper, of Mc Comb (1996), some fundamental concepts as the first aproximation to the turbulence phenomenon in Fluid Mechanic are expose. At the beginning of the paper the Navier-Stokes equation in solenoidal form, the two-point correlations, the length scales for isotropic turbulence and the stationary turbulence are present. Then, based in the Fourier analysis, we continue working in the wavenumber space to obtain the velocity-field moments and the isotropic spectrum tensor. Finally the concepts of creation and dissipation of kinetic energy in a viscous fluid, the energy cascade in isotropic turbulence and the Kolmogorov hypotheses are enunciate.

1 LAS ECUACIONES DE NAVIER - STOKES EN FORMA SOLENOIDAL

Para un fluido incompresible de densidad ρ y viscosidad Newtoniana ν, ocupando un volumen V limitado por una superficie S, y al hacer uso de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\beta} = 0$$

de la ecuación de Navier - Stokes en dirección α

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} + U_\beta \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \nu\nabla^2 U_\alpha$$

y de la condición de frontera

$$U_\alpha(x,t) = 0 \ (x \text{ en } S)$$

y con alguna manipulación se obtiene la ecuación de Navier - Stokes en forma solenoidal,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} - \nu\nabla^2 U_\alpha &= M_{\alpha\beta\gamma}(\nabla)\left[U_\beta(x,t)\,U_\gamma(x,t)\right] \\ &\quad - L_{\alpha\beta}(\nabla)\left[U_\beta(x,t)\right] \qquad (1) \\ &\quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{ext}}{\partial x_\alpha}\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}M_{\alpha\beta\gamma}(\nabla) &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial D_{\alpha\gamma}(\nabla)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial D_{\alpha\beta}(\nabla)}{\partial x_\gamma}\right\} \\ D_{\alpha\gamma}(\nabla) &= \delta_{\alpha\gamma} f(x) \\ &\quad -\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma}\int_V G(x,x')\, f(x')\, dV' \\ L_{\alpha\beta}(\nabla)\left[f(x)\right] &= \nu\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha}\cdot \\ &\quad \int_S G(x,x')\,\eta_\beta(x')\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

donde:
$\delta_{\alpha\gamma}$: Delta de Kronecker
$G(x, x')$: Función de Green
η_β : Vector unitario normal.

Al utilizar la descomposición de la velocidad como

$$U_\alpha(x,t) = \overline{U_\alpha}(x,t) + u_\alpha(x,t)$$

donde

$$\overline{U_\alpha}(x,t) = \langle U_\alpha(x,t)\rangle \text{ y } \langle u_\alpha(x,t)\rangle = 0$$

Se puede escribir

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\nabla^2\right)\overline{U_\alpha}(x,t) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{ext}}{\partial x_\alpha} + \\ &\quad M_{\alpha\beta\gamma}(\nabla)\left[\overline{U_\beta}(x,t)\cdot\right. \\ &\quad \overline{U_\gamma}(x,t) + \\ &\quad \left.Q_{\beta\gamma}(x,x;t,t)\right] \\ &\quad -L_{\alpha\beta}(\nabla)\left[\overline{U_\beta}(x,t)\right]\end{aligned} \tag{2}$$

con

$$Q_{\beta\gamma}(x,x;t,t) = \langle u_\beta(x,t)\,u_\gamma(x,t)\rangle$$

el momento de segundo orden.

2 CORRELACIONES ENTRE DOS PUNTOS

Se define el coeficiente de correlación $R_{\alpha\beta}$, como

$$\begin{aligned}Q_{\alpha\beta}(x,x';t,t') &= R_{\alpha\beta}(x,x';t,t')\,u'_\alpha(x,t) \\ &\quad \cdot u'_\beta(x',t')\end{aligned} \tag{3}$$

en donde las primas en la velocidad denotan que corresponde a la raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de las fluctuaciones.

Suponiendo que $R_{\alpha\beta}$ satisface que

$$\begin{aligned}\max|R_{\alpha\beta}(x,x;t,t)| &= 1 \text{ y } R_{\alpha\beta}\to 0 \\ \text{para } |x-x'| &\to \infty\end{aligned}$$

Escogiendo convenientemente $x = x' = 0$ y $\tau = \frac{(t+t')}{2} = 0$, la integral de escala de tiempo se puede definir por

$$\tau_E = \int_0^\infty R(\tau)\,d\tau \tag{4}$$

el subindice E significa que es una estructura Euleriana.

De forma similar se puede definir la escala integral de longitud; tomando $t = t' = 0$ y $\tau = \frac{(x+x')}{2} = 0$, por

$$L_{\alpha\beta}(\vec{r}) = \int_{0<|r|<\infty} R_{\alpha\beta}(r)\,dr \tag{5}$$

en donde $\vec{r}$ es el vector unitario en la dirección de $r = x - x'$.

3 ESCALAS DE LONGITUD PARA TURBULENCIA ISOTRÓPICA

El coeficiente de correlación longitudinal isotrópico, $f(r)$, definido como

$$\langle u^2\rangle f(r) = \langle u_L(x)\,u_L(x')\rangle$$

es la base para definir dos escalas de longitud muy importantes. La primera es la microescala de Taylor; esta es una escala diferencial obtenida al expandir $f(r)$ alrededor de $r = 0$, la cual es una función simétrica que cumple $f'(0) = 0$,

$$\begin{aligned}f(r) &= 1 - \frac{r^2}{2\lambda^2} + O\left(r^4\right) \\ \text{donde } \frac{1}{\lambda^2} &= -f''(0)\end{aligned}$$

la importancia física de la microescala de Taylor esta indicada por la relación que tiene con la rata de disipación de energía en turbulencia isotrópica,

$$\varepsilon = \frac{15\nu\langle u^2\rangle}{\lambda^2}$$

la escala longitudinal integral es sólo un caso particular de la longitud integral general, ecuación (5),

$$L = \int_0^\infty f(r)\,dr \tag{6}$$

4 TURBULENCIA ESTACIONARIA

La turbulencia es intrínsecamente un fenómeno dependiente del tiempo, pero se dice que $U_\alpha(x,t)$ es una variable aleatoria estacionaria si en muchos tiempos las distribuciones de probabilidad dependen sólo de las diferencias entre los tiempos medidos y no de sus valores absolutos. Consideremos la correlación en dos tiempos

$$\langle u(t)\, u(t')\rangle = Q(\tau, T)$$

donde t y T son los tiempos relativos y absolutos respectivamente. Si $u(t)$ es una función aleatoria estacionaria, se tiene,

$$Q(T) = Q(t-t') = \langle u(t)\, u(t')\rangle$$

Se puede definir una microescala similar a la de Taylor de turbulencia homogénea pero ahora homogénea en el tiempo. Si $R_E(t)$ es una función de correlación Euleriana para pequeños valores de $\tau = t - t'$,

$$\begin{aligned} R_E(t) &= 1 - \frac{\tau^2}{2\tau_E^2} + O(r^4) \\ \therefore\ \frac{1}{\tau_E^2} &= -R_E''(0) \end{aligned}$$

5 ANÁLISIS DE FOURIER DEL CAMPO DE VELOCIDADES TURBULENTAS

En un campo de flujo con media cero, escogiendo las unidades de tal forma que la densidad sea la unidad, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\nabla^2\right) u_\alpha &= -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} \\ &\quad -\frac{\partial(u_\alpha u_\beta)}{\partial x_\beta} \end{aligned}$$

con u y p denotando las fluctuaciones de velocidad y presión. Considerando el fluido turbulento en un cubo de lado L

$$\begin{aligned} u_\alpha(\vec{x}, t) &= \sum_k u_\alpha\left(\vec{k}, t\right) \exp\left\{i\vec{k}\cdot\vec{x}\right\} \\ p(\vec{x}, t) &= \sum_k p\left(\vec{k}, t\right) \exp\left\{i\vec{k}\cdot\vec{x}\right\} \end{aligned}$$

Después de algunas operaciones se obtiene,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu k^2\right) u_\alpha\left(\vec{k}, t\right) &= M_{\alpha\beta\gamma}(\nabla) \\ &\quad \cdot \sum_j u_\beta(j, t)\, u_\gamma(k-j, t) \end{aligned} \tag{7}$$

siendo,

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta\gamma}\left(\vec{k}\right) &= -(2i)^{-1}\left\{k_\beta D_{\alpha\gamma}\left(\vec{k}\right) + \right. \\ &\quad \left. k_\gamma D_{\alpha\beta}\left(\vec{k}\right)\right\} \\ D_{\alpha\gamma}\left(\vec{k}\right)] &= \delta_{\alpha\gamma} - \frac{k_\alpha k_\gamma}{\left|\vec{k}\right|^2} \end{aligned}$$

que es la transformada de Fourier de la ecuación solenoidal general del movimiento, donde no hay velocidad media ni gradientes externos de presión.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu k^2\right) u_\alpha\left(\vec{k}, t\right) &= M_{\alpha\beta\gamma}(\nabla) \cdot \\ &\quad [u_\beta(\vec{x}, t)\, u_\gamma(\vec{x}, t)] \end{aligned}$$

Se ve que $M_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})$ y $D_{\alpha\gamma}(\vec{k})$ son las transformadas de Fourier de $M_{\alpha\beta\gamma}(\nabla)$ y $D_{\alpha\gamma}(\nabla)$ definidas antes.

6 MOMENTOS DEL CAMPO DE VELOCIDAD EN EL ESPACIO DEL NÚMERO DE ONDA

Es usual definir el tensor de densidad espectral (continuo) $Q_{\alpha\beta}(\vec{k})$ como sigue,

$$Q_{\alpha\beta}(\vec{k}) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \left\langle u_\alpha\left(\vec{k}\right) u_\beta\left(-\vec{k}\right)\right\rangle$$

y se introduce el par de transformadas de Fourier $Q_{\alpha\beta}(\vec{r})$ y $Q_{\alpha\beta}(\vec{k})$ mediante las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta}(\vec{r}) &= \int d^3k Q_{\alpha\beta}(\vec{k}) \exp\left\{i\vec{k}\cdot\vec{x}\right\} \\ Q_{\alpha\beta}(\vec{k}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \cdot \\ &\quad \int d^3k Q_{\alpha\beta}(\vec{r}) \exp\left\{i\vec{k}\cdot\vec{x}\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

7 EL TENSOR DE ESPECTRO ISOTRÓPICO

Robertson (1940) planteó la correlación isotrópica entre dos puntos en el espacio x. Usando este mismo procedimiento se puede obtener una ecuación para el espacio del número de onda,

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta}(\vec{k}) &= q(k)\,\delta_{\alpha\beta} - q(k)\,\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \\ &= D_{\alpha\beta}(\vec{k})q(k) \end{aligned} \tag{9}$$

No es difícil demostrar que la energía por unidad de masa del fluido, E, se puede relaciona con el espectro del número de onda $E(k) = 4\pi k^2 q(k)$ mediante la expresión (10)

$$E = \int_0^\infty E(k)\,dk \tag{10}$$

8 MOMENTOS EN EL ESPACIO DEL NÚMERO DE ONDA PARA UN MISMO TIEMPO

Tomando como punto de partida la ecuación (7) se obtiene, después de algunos cálculos, la ecuación para el momento doble,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) Q_{\alpha\gamma}(\vec{k},t) &= M_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}) \cdot \\ &\quad \int d^3j \cdot \\ &\quad Q_{\beta\gamma\sigma}(\vec{j},\vec{k}-\vec{j};t) \\ &\quad +M_{\sigma\beta\gamma}(-\vec{k}) \cdot \\ &\quad \int d^3j \cdot \\ &\quad Q_{\beta\gamma\alpha}(\vec{j},-\vec{k}-\vec{j};t) \end{aligned} \tag{11}$$

9 CREACIÓN Y DISIPACIÓN DE ENERGÍA CINÉTICA EN FLUIDO VISCOSO

Sabiendo que la energía cinética, E_T, en un elemento de control de volumen V y área superficial S esta dada por

$$E_T = \frac{1}{2}\sum_\alpha \int_V \rho U_\alpha^2 dV$$

y utilizando las ecuaciones de Navier - Stokes se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_T}{\partial t} &= \int_V U_\alpha F_\alpha dV \\ &\quad - \int_V \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} S_{\alpha\beta} dV \end{aligned}$$

con $S_{\alpha\beta}$ el esfuerzo viscoso.

En palabras: la tasa de cambio de la energía cinética es igual a la rata de trabajo hecho por las fuerzas externas menos la tasa en la cual la energía es disipada por efectos viscosos.

Definiendo la fuerza externa por unidad de volumen como $f_\alpha = F_\alpha/\rho$ la tasa de disipación de energía por unidad de masa y de tiempo por,

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2$$

y siendo

$$S_{\alpha\beta} = \rho\nu\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$$

se obtiene, después de algunos cálculos,

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} = \int_V U_\alpha F_\alpha dV \tag{12}$$

$$- \int_V \rho dV \tag{13}$$

Notas:

- El estado estable existe cuando $U_\alpha f_\alpha = \varepsilon$
- Cuando las fuerzas externas son cero, la energía cinética del flujo decae según la rata dada por ε.
- Se puede ver que el término de presión y los términos no lineales (osea los términos inerciales) no realizan trabajo neto en el sistema; o sea, son fuerzas conservativas.

Para el caso de flujo turbulento la tasa de disipación media es

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\nu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial\overline{U_\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\overline{U_\beta}}{\partial x_\alpha}\right)^2 \tag{14}$$

$$+\frac{\nu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left\langle\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2\right\rangle$$

esto teniendo en cuenta que $\langle \overline{U_u}\rangle = 0$.

Para el caso particular de turbulencia homogénea se pueden tomar los gradientes de velocidad media igual a cero y considerar sólo la disipación de la energía cinética de los movimientos fluctuantes

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon\rangle &= \frac{\nu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left\langle\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2\right\rangle \\ &= \nu\sum_{\alpha,\beta}\left\langle\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^2\right\rangle \qquad (15)\end{aligned}$$

10 LA ECUACIÓN DE BALANCE DE ENERGÍA EN TURBULENCIA ISOTRÓPICA

Partiendo de la ecuación (11) para el caso de turbulencia isotrópica, multiplicando por $2\pi k^2$ y haciendo algunas operaciones, se obtiene la ecuación para el espectro de energía $E(k,t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu k^2\right)E(k,t)=T(k,t) \qquad (16)$$

donde el término no - lineal esta dado por,

$$\begin{aligned}T(k,t) &= 2\pi k^2 M_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})\cdot \qquad (15a)\\ &\int d^3j\left\{Q_{\beta\gamma\sigma}(\vec{j},\vec{k}-\vec{j};t)-\right.\\ &\left.Q_{\beta\gamma\alpha}(\vec{j},-\vec{k}-\vec{j};t)\right\}\end{aligned}$$

Se puede demostrar que el término no - lineal $T(k,t)$ no produce trabajo neto en el sistema, luego $T(k,t)$ sólo puede redistribuir energía en el espacio del número de onda. Al integrar cada término en la ecuación (15) sobre $\vec{k}$, teniendo en cuenta que

$$E = \int_0^\infty E(k,t)dk$$

y que $\int_0^\infty T(k,t)dk = 0$

se llega a que

$$\frac{dE}{dt}+\int_0^\infty 2\nu k^2E(k,t)dk=0 \qquad (17)$$

Por lo tanto, la rata de decaimiento de la energía cinética total de las fluctuaciones (por unidad de masa del fluido) es sólo la rata de disipación. De aquí podemos obtener un resultado simple para la rata de disipación e en turbulencia isotrópica:

$$\frac{dE}{dt}=-\varepsilon=-\int_0^\infty 2\nu k^2E(k,t)dk \qquad (18)$$

11 LA CASCADA DE ENERGÍA EN TURBULENCIA ISOTRÓPICA

La interpretación más frecuente de la ecuación (15) es que la energía en el sistema en k pequeños (escalas grandes) es transferida por el término no - lineal $T(k,t)$ a k grandes (escalas pequeñas), donde es disipada (o sea convertida en calor) por el término viscoso. Es bastante útil reescribir la ecuación (15) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{dE(k,t)}{dt} &= \int_0^\infty S\left(\vec{k},\vec{j},\left|\vec{k}-\vec{j}\right|\right)dj\\ &-2\nu k^2E(k,t) \qquad (19)\end{aligned}$$

donde la definición de S puede ser deducida de la ecuación (15a).

Consideremos en la ecuación (18) el conjunto no - lineal igual a cero. Luego la solución de la ecuación (18) toma la forma

$$\begin{aligned}E(k,t) &= E(k,t_0)\cdot\\ &\exp\left\{-2\nu k^2(t-t_0)\right\}\end{aligned}$$

para un tiempo inical t_0. Y así la cantidad de energía en cada modo k decae individualmente con el inverso del tiempo $2\nu k^2$. Es claro que mientras mayor sea el valor de k más rápido será el decaimiento. Esto es equivalente a la situación de flujo cortante donde la viscosidad molecular es un parámetro pequeño y debido a esto los efectos viscosos sólo llegan a ser importantes cuando los gradientes de velocidad son grandes. Así, el efecto de la no - linealidad puede ser deducido como una transferencia de energía de donde hay producción neta (cerca a la frontera sólida) a donde hay disipación neta (en el centro). De forma análoga, cuando se considera la forma completa de la ecuación (18) se puede esperar que la no - linealidad transfiera la energía desde donde entra al sistema (típicamente en valores pequeños de k, donde $2\nu k^2$ es pequeña) a valores grandes de k, donde domina la viscosidad.

Miremos ahora el rango de números de onda involucrado en los procesos de transferencia inercial. Para el caso del limite inferior es bastante directo. El torbellino más grande posible estará limitado por el tamaño del sistema, por lo tanto el número de onda más pequeño posible esta dado por$k_{min} = 2p/L$, donde L es la dimensión lineal más grande del sistema turbulento. Es de esperar que el mayor número de onda esté determinado por la disipación viscosa. Los únicos parámetros físicos importantes que se tienen son la viscosidad cinemática ν y la rata de disipación ε, por lo tanto, en base a la dimensionalidad se introduce una escala de longitud característica

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{20}$$

y una velocidad de escala asociada, v,

$$v = (\nu\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \tag{21}$$

El inverso de la ecuación (19) es tomado normalmente como una medida aproximada del máximo número de onda posible, k_d:

$$k_d = \frac{1}{\eta} = \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{22}$$

Se puede notar que al definir un número de Reynolds local (en el número de onda) basado en las escalas anteriores, se obtiene

$$R(k_d) = \frac{v\eta}{\nu} = 1 \tag{23}$$

esto indica que los procesos viscosos son dominantes para $k = k_d$.

Por experimentación se conoce que la energía está determinada por los números de onda menores mientras la rata de disipación está determinada por los números de onda mayores, y los dos rangos no se traslapan aún para números de Reynolds pequeños. Lo que muestra que el término inercial (que es la cadena entre los dos extremos) puede dominar sobre un rango de número de onda tan grande como se quiera, simplemente al incrementar el número de Reynolds.

12 HIPÓTESIS DE KOLMOGOROV

Mc. Comb (1996) muestra como Kolmogorov basado en resultados experimentales en donde encontró que en números de onda altos el espectro de energía puede tomar una forma universal y que la cascada de energía puede ser independiente de la forma en la cual fue creada la turbulencia, formalizó las siguientes dos hipótesis que son esencialmente principios de similaridad para el espectro de energía. La primera hipótesis dice que en números de onda suficientemente altos el espectro depende sólo de la viscosidad del fluido, la rata de disipación y el número de onda, es decir:

$$\begin{aligned} E(k) &= \nu^2\eta f(k\eta) \\ &= \nu^{\frac{5}{4}}\varepsilon^{\frac{1}{4}} f(k\eta) \end{aligned} \tag{24}$$

donde f es una función desconocida de forma universal.

La segunda hipótesis de semejanza dice que $E(k)$ debe llegar a ser independiente de la viscosidad cuando el número de Reynolds tienda a infinito. Lo cual exige que la función f tome la forma:

$$\begin{aligned} f(k\eta) &= \alpha(k\eta)^{-\frac{5}{3}} \\ &= \alpha\nu^{-\frac{5}{4}}\varepsilon^{\frac{5}{12}}k^{-\frac{5}{3}} \end{aligned} \tag{25}$$

donde α es una constante. Al substituir en la ecuación (23) se obtiene:

$$E(k) = \alpha\varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}} \tag{26}$$

cuando el número de Reynolds tiende a infinito.

En aproximaciones teóricas se trabaja con funciones de densidad espectral $q(k)$,

$$q(k) = \frac{\alpha}{4\pi}\varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{11}{3}} \tag{27}$$

Para números de Reynolds grandes pero finitos, se puede tomar las expresiones anteriores. Si el número de Reynolds es lo suficientemente grande, podemos postular la existencia de un subrango inercial de números de onda, tal que,

$$\frac{2\pi}{L} << k << k_d,$$

para el cual el espectro dado por la ecuación (23) es independiente de la viscosidad, luego la ecuación (24) se puede modificar y tomar la forma:

$$f\,(k\eta) = \alpha\,(k\eta)^{-\frac{5}{3}}\,F\left(\frac{k}{k_d}\right) \tag{28}$$

donde F es otra función universal que cumple $F(0) = 0$. Luego la ecuación (23) llega a ser:

$$E\,(k) = \alpha\epsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}}F\left(\frac{k}{k_d}\right) \tag{29}$$

para $k >> 2\pi/L$, la cual tiende asintóticamente a la forma dada por la ecuación (25) en el subrango inercial del número de onda.

La constante de proporcionalidad de Kolmogorov, α, ha sido blanco de un gran número de investigaciones las cuales, en su mayoría, están de acuerdo en tomar α como un valor cercano a 1.5.

REFERENCIAS

Mc. Comb, W. D., The Physics of Fluid Turbulence. Oxford, University Press Inc., USA, 1996.

Robertson, H. P. Proc. Camb. Phil. Soc. 36, 209, 1940.