

UN MODELO DE PROPAGACIÓN BIDIMENSIONAL DE ONDAS BASADO EN LAS ECUACIONES DE AGUAS PANDAS.

Carlos A. Escobar S.¹, Francisco M. Toro B.² y Ramón Pacheco G.³

¹ Departamento de Ingeniería Civil, Universidad EAFIT

² Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos, Facultad de Minas
Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

³ Consultor independiente, Italia

fmtoro@perseus.unalmed.edu.co

RESUMEN

Se presenta en este artículo la estructura de un algoritmo de solución para las ecuaciones de aguas pandas escritas en forma bidimensional y aplicadas a la propagación de ondas en flujos a superficie libre. El modelo propuesto considera todos los términos en las ecuaciones de aguas pandas y, en particular, incluye las aceleraciones de carácter convectivo en la ecuación de conservación del momentum lineal. La solución numérica de este modelo utiliza el método de las diferencias finitas, el cual permite determinar el sistema de ecuaciones resultante a través de un procedimiento iterativo que minimiza el error generado por las variaciones de las profundidades dentro del dominio de cálculo. Finalmente, se presenta la aplicación del modelo en algunos casos teóricos y reales con el fin de demostrar la potencialidad del algoritmo de solución.

ABSTRACT

This paper presents the structure of solution algorithm for the shallow water equations written in two dimensional form and used for the propagation of waves in open channels. The proposed model considers the shallow water equations in full form and includes the convection acceleration terms in the momentum equation. The numerical solution of this model uses the finite difference method to discretize the governing equations and solves the finally set of equations by an iterative process that reduce the error generated by the variations of the water depth with respect to the linear case. Finally, a set of applications is presented, comparison with analytic solution and a real life case, in order to show the the algorithm's potential.

1. INTRODUCCIÓN

El crecimiento de poblaciones y de los desarrollos agrícolas en regiones cercanas a cauces naturales de ríos, tanto en regiones montañosas como en valles, hacen que sea necesaria la implementación de algunos sistemas de alarmas que permitan prevenir a las poblaciones con alguna anticipación, del inminente riesgo por el viaje de una creciente desde la parte alta de la cuenca. Adicionalmente, requieren la publicación de mapas que indiquen las zonas de inundación y la frecuencia con que éstas ocurren, para así planificar en forma adecuada el tipo de explotación agrícola más conveniente en una región.

En el campo de la hidráulica fluvial, la modelación numérica de los eventos de propagación de ondas generados por situaciones extremas (ruptura de presas, eventos hidrometeorológicos críticos, etc.) requiere, en muchos casos, una simulación de carácter bidimensional dadas las características topográficas del territorio. La modelación 2D dentro del contexto de la hidrodinámica fluvial tiene sus inicios en los años sesenta con el desarrollo de los modelos de tipo algebraico (Modelo del Mekong; Zanobetti-Lorgeré, 1968), los cuales dividen el territorio en celdas rectangulares y calculan el flujo entre ellas por medio de algunas relaciones funcionales que vinculan el caudal a la profundidad con la hipótesis de que la estructura de separación entre las celdas adyacentes es un vertedero de cresta ancha con funcionamiento a superficie libre o ahogado. Posteriormente, en los años ochenta aparecen los modelos difusivos o parabólicos, en donde los términos iniciales se suponen despreciables en comparación con los términos de presión, fricción y gravedad (HromadkaYen, 1986).

En la actualidad la literatura científica presenta una gran cantidad de modelos basados en la solución de las ecuaciones de “Shallow Water” (AbbotRodenhuis 1973 [4], FraccarolloToro, 1995, GarciaKahawitha, 1986, Roe, 1981; Toro 1992) escritas en forma completa. Para la solución de tal sistema de ecuaciones se recurre normalmente a los métodos de los volúmenes finitos o de los elementos finitos utilizando esquemas de carácter explícito o implícito, los cuales, en muchos casos, se estructuran para tratar las singularidades numéricas asociadas a flujos transcriticos. (Godunov, 1959; GarciaKahawitha, 1986). En general, todos los esquemas numéricos presentados en la literatura y adoptados para la solución completa de las aguas pandas, escritas en

dos dimensiones, son válidos, normalmente, sobre topografías simplificadas.

El objetivo de este artículo es presentar un algoritmo de solución para las ecuaciones de las aguas pandas escritas en forma bidimensional y aplicadas a topografía compleja. Se presenta la estructura del algoritmo de cálculo, además de una solución numérica de las ecuaciones simplificadas y una solución numérica a un caso de la vida real con el fin de demostrar la potencialidad del algoritmo de solución.

El algoritmo de solución aquí presentado se basa en el método de las diferencias finitas, el cual se resuelve a través de un procedimiento iterativo que minimiza el residuo generado por las variaciones de las profundidades en el dominio de cálculo con respecto al caso lineal.

2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

La propagación de ondas en ríos tiene unas características particulares que permiten clasificarlas y diferenciarlas de otras, como son: (a) la capacidad de transportar masa (ondas translacionales), (b) cambios suaves o graduales en las variables hidráulicas (ondas largas), (c) toda la sección transversal del río está perturbada por el movimiento de la onda (ondas de aguas pandas) y (d) densidad constante. Estas características de las ondas en ríos las diferencian de las ondas marinas donde, al contrario, se tienen ondas orbitales, cortas, profundas y con densidad variable por factores como la temperatura y la salinidad. Por estas diferencias no se recomienda la aplicación de modelos marinos en problemas de hidráulica fluvial.

El flujo bidimensional no permanente en canales naturales, si se asume que la densidad es constante, está descrito por tres variables dependientes que son el nivel de la superficie libre del agua y las componentes de la velocidad en las direcciones x , y y y . Por consiguiente, para definir el flujo es necesario plantear tres ecuaciones independientes. Estas tres ecuaciones se originan en principios básicos de la mecánica como lo son la conservación de masa y la conservación del momentum lineal.

De acuerdo con el principio de conservación de masa se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

donde x, y, t son las coordenadas espaciales y temporales; h es la profundidad; q_x y q_y son los caudales por unidad de ancho en las direcciones x , y y , respectivamente.

Si se consideran las fuerzas externas de gravedad, presión y fricción dominantes en el tipo de flujo a simular, se puede expresar el principio de conservación del momentum lineal mediante las dos ecuaciones escalares siguientes:

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + u \frac{\partial q_x}{\partial x} + v \frac{dq_x}{\partial y} + u \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) + \left(gh - u^2 \right) \frac{\partial h}{\partial x} - uv \frac{\partial h}{\partial y} + gh \left(C_f q_x - S_x \right) \quad (2.a)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + u \frac{\partial q_y}{\partial x} + v \frac{dq_y}{\partial y} + v \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) + \left(gh - v^2 \right) \frac{\partial h}{\partial y} - uv \frac{\partial h}{\partial x} + gh \left(C_f q_y - S_y \right) \quad (2.b)$$

donde u y v son las componentes de la velocidad promediadas en la vertical, para las direcciones x , y y respectivamente; g es la aceleración de la gravedad; C_f es el coeficiente de fricción; S_x y S_y son las pendientes del fondo del terreno en la dirección x y y , respectivamente.

El cálculo del coeficiente de fricción se determina de acuerdo con la aproximación que hace la teoría de los flujos no permanentes al considerar que los esfuerzos de fricción y la turbulencia se pueden tener en cuenta por medio de las leyes de resistencia análogas a las utilizadas para flujo permanente uniforme. El término C_f , relativo a la resistencia ofrecida por el terreno se puede evaluar por la fórmula empírica de resistencia al flujo de Manning

para canales anchos y que se presenta a continuación:

$$C_f = \frac{(n^2 * q_s)}{h^{10/3}} \quad (3)$$

donde n es el coeficiente de rugosidad de Manning y s es un subíndice que indica la dirección x o y , según el caso.

3. DISCRETIZACIÓN NUMÉRICA

Las ecuaciones de aguas pandas, en su presentación bidimensional completa se discretizan, utilizando las aproximaciones en diferencias finitas, de la siguiente manera:

$$\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^{n+1} + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)^{n+1} = 0 \quad (4.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_x^{n+1} - q_x^n}{\Delta t} + u^n \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^n + v^n \left(\frac{dq_x}{\partial y} \right)^n - u^{n+1} \left(\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} \right) + (gh - u^2)^{n+1} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^{n+1} \\ - (uv)^{n+1} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^{n+1} + gh^n \left(C_f^n q_x^{n+1} - S_x \right) = 0 \quad (4.b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{q_y^{n+1} - q_y^n}{\Delta t} + u^n \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} \right)^n + v^n \left(\frac{dq_y}{\partial y} \right)^n - v^{n+1} \left(\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} \right) + (gh - v^2)^{n+1} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^{n+1} \\ - (uv)^{n+1} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^{n+1} + gh^n (C_f q_y^{n+1} - S_y) = 0 \quad (4.c) \end{aligned}$$

Los superíndices n y $n+1$ indican, respectivamente, las características del flujo evaluadas en el tiempo t y $t+\Delta t$, donde Δt es el intervalo temporal de cálculo. De esta discretización se obtiene un sistema linealizado de ecuaciones diferenciales, parciales en el cual algunas incógnitas (aquellas con el índice “ $n+1$ ”) están multiplicadas por variables conocidas que fueron halladas en el tiempo anterior (índice “ n ”).

La discretización espacial utilizada para el cálculo de las derivadas, se obtiene mediante dos mallas superpuestas, tal como se muestra en la figura 1, y se

consideran diferencias centrales al interior del dominio de cálculo y diferencias adelante o atrás en cercanías de las fronteras según el caso. En la figura 1, la malla en líneas continuas permite determinar el caudal sobre los lados de las celdas (malla principal) y la malla en líneas discontinuas permite determinar la profundidad del flujo en el centro de las celdas (malla secundaria).

El sistema de ecuaciones diferenciales (4) se resuelve numéricamente mediante un procedimiento iterativo basado en la anulación de un residuo, tal como se indicará mas adelante. La ecuación que resuelve el sistema vincula el nivel de una celda en particular con

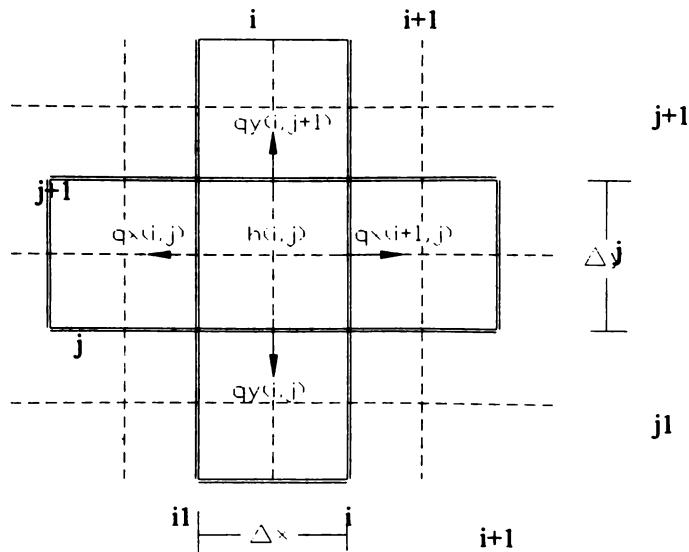


FIGURA 1. Esquema de malla alternada para la solución del sistema de ecuaciones.

el nivel de las cuatro celdas adyacentes y con el caudal que pasa a través de los cuatro lados de las celdas.

Considerando “ n ” como el valor en el tiempo anterior y “ p ” el valor en la iteración pésima, se tiene que las ecuaciones (4.b) y (4.c) se pueden escribir como:

$$\frac{q_x^p - q_x''}{\Delta t} + u'' \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)'' + v'' \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} \right)'' - u'' \left(\frac{h'' - h''}{\Delta t} \right) + (gh - u^2)^p \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^p - (uv)^p \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^p + gh'' (C_x'' q_x'' - S_x) = 0$$

$$\frac{q_y^p - q_y''}{\Delta t} + u'' \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} \right)'' + v'' \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)'' - v'' \left(\frac{h'' - h''}{\Delta t} \right) + (gh - v^2)^p \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^p - (uv)^p \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^p + gh'' (C_y'' q_y'' - S_y) = 0$$

Si se despeja de estas ecuaciones el caudal por unidad de ancho en las direcciones x y y respectivamente, se tiene:

$$q_x^p = \frac{\Delta t}{1 + gh'' C_x'' \Delta t} * \left[\frac{q_x''}{\Delta t} - u'' \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)'' - v'' \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} \right)'' + gh'' S_x \right] + \frac{\Delta t}{1 + gh'' C_x'' \Delta t} \left[u'' \left(\frac{h'' - h''}{\Delta t} \right) - (gh - u^2)^p \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^p + (uv)^p \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^p \right] \quad (5.a)$$

$$q_y^p = \frac{\Delta t}{1 + gh'' C_y'' \Delta t} * \left[\frac{q_y''}{\Delta t} - u'' \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} \right)'' - v'' \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)'' + gh'' S_y \right] + \frac{\Delta t}{1 + gh'' C_y'' \Delta t} \left[v'' \left(\frac{h'' - h''}{\Delta t} \right) - (gh - v^2)^p \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^p + (uv)^p \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^p \right] \quad (5.b)$$

donde u' , v' y h son valores tentativos que, inicialmente, se suponen iguales a los hallados en el paso temporal precedente.

Ahora sustituyendo el valor hallado de q^p , utilizando los valores tentativos de u' , v' y h en la ecuación de conservación de la masa se obtiene:

$$\frac{h'' - h''}{\Delta t} + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^p + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)^p = R^p \quad (6)$$

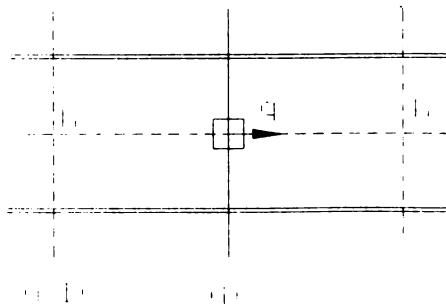
La metodología para el cálculo del campo de flujo se resume de la siguiente manera:

- Plantear la ecuación 6 anulando el residuo, para cada una de las celdas del dominio de cálculo.
- El sistema resultante se resuelve para h^p , utilizando los valores de caudal tentativos q^p hallados mediante la ecuación 5.
- Los valores de h^p calculados se comparan con los supuestos y de acuerdo con esto se inicia un proceso iterativo en el cual se actualiza el cálculo de los caudales según la ecuación 5 para los valores de h^p actuales y se regresa al paso inicial.

4. TRATAMIENTO DE LA TOPOGRAFÍA COMPLEJA

La formulación matemática anteriormente descrita y la representación topográfica del fondo del dominio de cálculo pasan a no ser siempre idóneas en la representación del comportamiento físico real del movimiento del agua durante una inundación.

La altura del agua entre dos celdas limítrofes HN, se evalúa como el promedio de la profundidad en el centro de las dos celdas, según se representa en la figura 2. Con este criterio se expresa que la pendiente del fondo es



uniforme, pero existen situaciones para las cuales la conformación del fondo en el dominio de cálculo muestra cambios bruscos en el perfil real del suelo (casos de inundación incipiente, umbrales, etc.). En estas condiciones la evaluación de la altura HN, como se presentó anteriormente, ya no tiene justificación física, porque la altura con que pasa el agua no debe ser evaluada utilizando la cota de fondo de las dos celdas limítrofes si no la altura de la celda con cota de fondo más elevada. Se define entonces:

$$\begin{aligned} DH &= |H(I, J) - H(I - 1, J)| \\ HN &= 0.5 * [H(I, J) + H(I - 1, J)] \end{aligned} \quad (7)$$

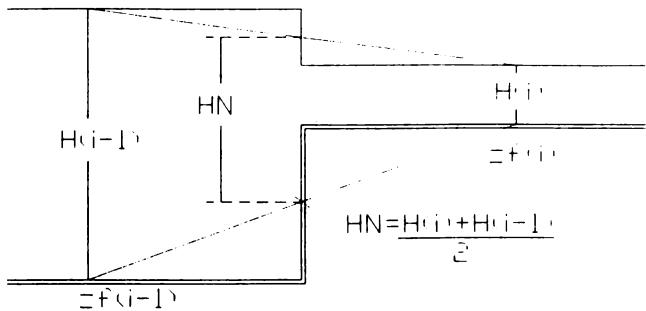


FIGURA 2. Representación de las celdas adyacentes al interior del dominio de cálculo.

donde $H(I, J)$ es la profundidad del agua en la celda.

Tenemos que la relación DH/HN ofrece una medida de la no uniformidad de la altura del agua y del fondo. Esta relación viene, por tanto, siendo utilizada para decidir si entre las dos celdas hay un umbral o si por el contrario la cota de fondo entre las dos celdas puede ser hallada por interpolación. La confrontación se efectúa utilizando el parámetro VMRH (input), que se define como la relación entre la altura de agua menor y la mayor de las dos celdas y que posteriormente se transforma para poderlo comparar con la relación DH/HN ya descrita, a través de la relación:

$$VMRH = \frac{2 * (1 - VMRH(\text{input}))}{1 + VMRH(\text{input})} \quad (8)$$

Condición 1. Si $DH/HN > VMRH$, se tiene un umbral elevado con respecto a la altura media de paso del agua, por tanto la cota de fondo corresponderá a la cota más elevada entre ambas celdas, es decir:

$$ZFFON = \text{MAX} (ZF(I, J), ZF(I1, J)), \text{ ver figura 3.}$$

Condición 2. Si $DH/HN < VMRH$, se tiene que el umbral es reducido con respecto a la altura media de paso del agua entre las dos celdas, por tanto la cota de fondo entre las dos debe ser calculada como la media entre las dos cotas de fondo de las celdas estudiadas.

Cuando crece el nivel de agua y se pasa de la condición 1 a la condición 2 es posible tener oscilaciones en el caudal y en el nivel, las cuales son difícilmente controlables desde el punto de vista numérico. Así, para evitar este tipo de comportamiento se calcula la cota de fondo entre las celdas interpolando entre el valor medio y el valor máximo de las cotas de fondo y utilizando como parámetros de interpolación las relaciones DH/HN y $VMRH$, tal como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} ZFMED &= 0.5 * [ZF(I, J) + ZF(I1, J)] \\ ZFMAX &= \text{MAX} (ZF(I, J), ZF(I1, J)). \end{aligned} \quad (9)$$

Por lo tanto se toma el valor de la cota de fondo entre las dos celdas (ZFFON) de tal forma que este comprendido entre estos dos extremos, según la siguiente expresión:

$$ZFFON = \left(1 - \frac{DH/HN}{VMRH} \right) * ZFMED + \left(\frac{DH/HN}{VMRH} \right) * ZFMAX \quad (10)$$

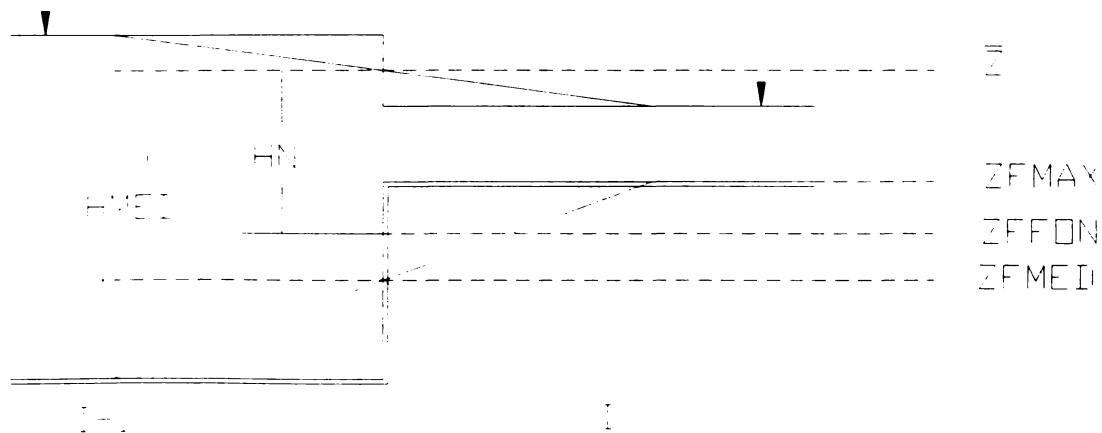


FIGURA 3. Esquema para la representación de los criterios de interpolación.

Definimos por tanto:

$$HMED = 0.5 * [H(I,J) + H(I1,J)] \quad (12)$$

La cota media del flujo :

$$Z = ZFMED + HMED \quad (13)$$

La altura del agua entre las celdas:

$$HN = Z - ZFFON \quad (14)$$

5. APLICACIÓN EN CASOS TEÓRICOS Y REALES

Se presentan a continuación unos ejemplos de aplicación del modelo que forman parte del proceso de validación

5.1 Onda de Marea

A continuación se estudia el caso de una onda de marea en un canal rectangular prismático, donde el movimiento del fluido es unidimensional y está gobernado por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$$

$$c^2 = g h$$

donde N , es el nivel del agua con respecto a un nivel medio de referencia.

Se considera un canal rectangular de sección uniforme y de longitud L , cerrado en el extremo $x = L$ y abierto en $x = 0$. El nivel del agua se perturba en $x = 0$ mediante la condición de frontera dada por una hidrógrafa de profundidades. La hidrógrafa de profundidades se toma igual a una onda de la forma:

$$N_o = a \operatorname{Sen}(Wt) \quad (16)$$

donde a es la amplitud, W la frecuencia de una oscilación de periodo T ($W=2\pi/T$).

La solución analítica de este problema corresponde al caso de una onda estacionaria (ver Wang y Connor, 1975):

$$u = - \frac{a(gh)^{1/2}}{h \cos(WL/(gh)^{1/2})} \operatorname{sen} \left[W \frac{L}{(gh)^{1/2}} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right] \cos Wt$$

$$N = \frac{a}{\cos(WL/(gh)^{1/2})} \cos \left[W \frac{L}{(gh)^{1/2}} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \right] \operatorname{sen} Wt \quad (17)$$

El modelo numérico propuesto se utilizó para resolver este problema, considerando los siguientes parámetros:

Intervalo de Cálculo “Dt” : 2s

Tamaño de las celdas : 100m*100m

Coeficiente de Manning: 0.018

Número de celdas: 38

Profundidad promedia del flujo: 4.093m.

Periodo de la onda (T): 600s

Amplitud de la onda: 0.10m.

Longitud del canal “L”: 3800m.

A continuación se presentan las soluciones numérica y analítica del caso:

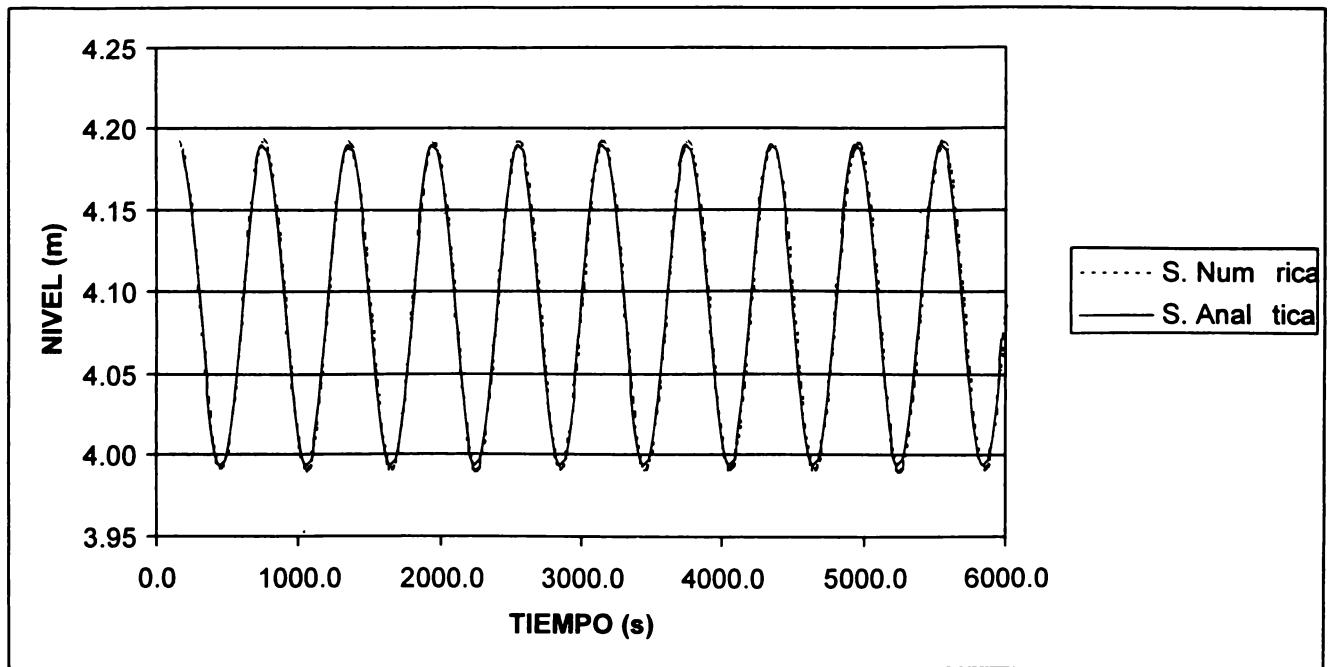


FIGURA 4. Onda de marea en la abscisa x=50m. de un canal prismático.

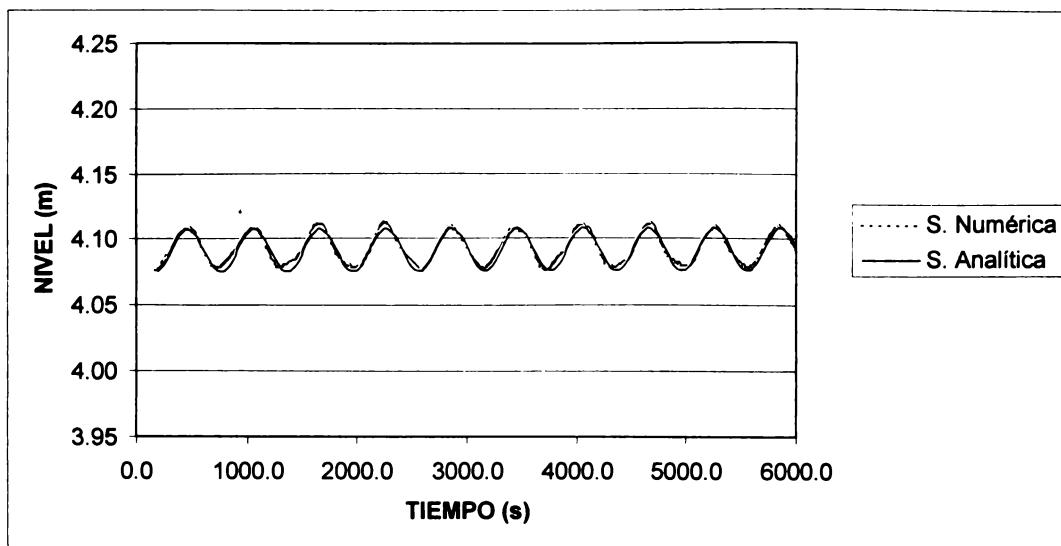


FIGURA 5. Onda de marea en la abscisa x=1050m. De un canal prismático.

En las figuras 4 y 5 se observa una buena correspondencia entre la solución numérica y la solución analítica. Haciendo un análisis de sensibilidad al tamaño de la malla se observó que la solución numérica se alejaba de la solución analítica a medida que se aumentaba el tamaño de las celdas (efecto no mostrado en las figuras). A pesar de lo anterior la solución numérica permaneció estable mientras se satisfacía la condición de Courant.

5.2. Simulación real en el Río Tanaro (Italia)

El dominio en estudio se caracteriza por una superficie irregular a la cual se le superpone una malla de celdas cuadradas de 50 metros de lado, donde cada celda estará

initialmente seca. Se impusieron como condiciones de frontera las siguientes: un flujo entrante en la celda (1300, 0) representado por una hidrógrafa de caudales triangular (0 seg $0\text{m}^3/\text{s}$; 25920 seg $4000\text{ m}^3/\text{s}$; 30000 seg $4000\text{ m}^3/\text{s}$) que está ubicada aguas arriba del río. Como condición de frontera de aguas abajo se localizaron hidrógrafas de niveles que permitían descargar el caudal libremente.

Con este caso se pretendía verificar el funcionamiento del algoritmo con topografía compleja en un caso real sin que se presentaran contratiempos de tipo numérico. El tratamiento de la topografía compleja se basa en un trabajo ya presentado por Molinaro et al (1992) [1].

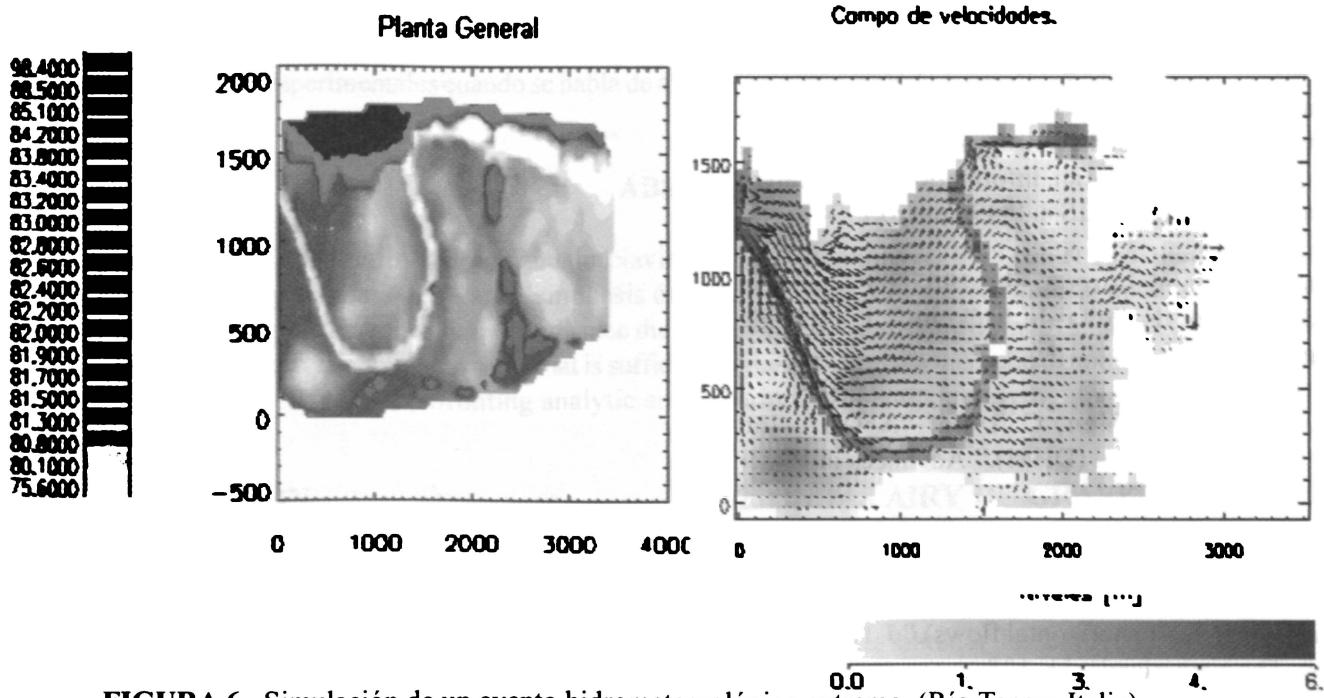


FIGURA 6. Simulación de un evento hidrometeorológico extremo. (Río Tanaro Italia)

6. CONCLUSIONES

Se presentó un algoritmo de solución de las ecuaciones de aguas pandas escritas en forma bidimensional considerando los términos convectivos en la ecuación de conservación del momentum lineal. Con tal algoritmo, es posible realizar la propagación de eventos extremos no estacionarios a través de un sistema de celdas cartesianas superpuestas al terreno.

El algoritmo presentado permite hacer simulaciones fluviales sobre topografías complejas y llanuras de

inundación inicialmente secas, lo cual fue verificado en el caso real estudiado de la propagación de una avenida en el río Tánaro (Italia).

El código de cálculo para el esquema numérico propuesto se verifica con ejemplos teóricos que cuentan con solución analítica. Además, se presenta la aplicación del modelo en un caso real como es la propagación de una onda en un cauce natural (río Tánaro), donde se muestra su potencial en la simulación de fenómenos hidráulicos que involucran fondo inicialmente seco y topografía compleja. Los resultados de la aplicación del modelo en el río

Tánero de Italia se muestran razonables, obteniéndose campos de flujo acordes a las condiciones impuestas para simular esta región. Sin embargo, la condición de frontera aguas arriba no fue tomada de un registro pluviográfico medido. En el caso de que se cuente con este registro los resultados obtenidos se deberán comparar con mediciones reales en el campo.

El modelo implementado permite la aplicación de diversas condiciones de frontera, como son las hidrógrafas de caudales y las hidrógrafas de niveles de una manera flexible, ya que se pueden localizar en cualquier punto del dominio de cálculo y su ingreso se hace por medio de los formatos normalmente utilizados en los problemas prácticos.

7. BIBLIOGRAFÍA

Molinaro et.al., 1992. “Un modello matematico per la simulazione delle inondazioni di vaste aree a topografia complessa. Aspetti teorici, informatici e applicativi. Relazione ENEL – CRIS n 4849, marzo 1994.

Zanobetti, D., and Lorgeré, H., 1968. “Le modèle mathématique du delta du Mékong.” La Houille Blanche, 255269.

Hromadka, T., and Yen, C., 1986. “A Diffusion Hydrodynamic Model (DHM).” Advances in Water Resources, 118167.

Abbot, M., Damsgaard, A., and Rodenhuis, G., 1973. “SYSTEM 21, ‘Jupiter’, (a design system for two dimensional nearly horizontal flows).” J. Hydr. Res., Delft, The Netherlands, 11, 128.

Fraccarollo, L., and Toro, E. 1995. “Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two dimensional dambreak type problems.” J. Hydr. Res., Delft, The Netherlands, 33(6), 843864.

Garcia, R., and Kahawitha, R, 1986. “Numerical Solution of the Saint Venant Equations with the MacCormack finite difference scheme.” Int. J. Numer. Methods in Fluids, 6, 507527.

Roe, P. L., 1981. “Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes.” J. Computational Phys., 43, 357372.

Toro, E., 1992. “Riemann Problems and the WAF Method for Solving the Two-dimensional Shallow Water Equations.” Philosophical Trans. Royal Soc., London, U. K., A338, 4368.

Godunov, S., 1959. “A Difference Scheme for Numerical Computation of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations.” Math. Sbornik, 43, 271306 [Translated, U.S. Joint Publication Research Service, JPRS 7226, 1969].