

ONDAS AIRY DE GRAVEDAD Y TEORÍA DE PRIMER ORDEN APLICADAS A LA ATENUACIÓN DE ONDAS ESTACIONARIAS

Y. Cataño¹, J. P. Smith² y J. Naranjo¹

¹Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos Facultad de Minas

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

²Universidad de Purdue, Estados Unidos

janaranj@perseus.unalmed.edu.co

RESUMEN

Se presentan en primera instancia las ecuaciones de continuidad de masa y de Navier - Stokes para luego centrarnos en su forma particular para el caso de las ondas Airy. En este trabajo se hace énfasis en el modo 1 de oscilación y en una teoría lineal por ser aquél el más simple y porque esta es el punto de partida de análisis de modos y teorías más complejas. Se pretende mostrar aquí lo acertada que es la modelación teórica del fenómeno de una onda de gravedad linealizada al confrontar resultados analíticos y experimentales cuando se habla de cantidades como periodo y velocidad de fase.

ABSTRACT

This article presents the continuity of mass and the Navier - Stokes equations for then center us in their particular form for the case of the Airy waves. Afterwards, emphasis on both the mode 1 of oscillation and upon a linear theory are made by being the first one the more simple and since the second one is the starting point of analysis of modes and more complex theories. Besides, it is sought to show that is sufficiently guessed right the theoretical modeling of the phenomenon of a linearized gravity wave by confronting analytic and experimental results involving relationships of period and speed of phase.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de la amortiguación de ondas estacionarias en un medio fluido y en particular en agua, no ha sido hasta ahora, resuelto completamente. El grado de complejidad es alto, al menos en cuanto a la parte concerniente a la capa límite, puesto que se precisa del uso de la solución de las conocidas ecuaciones de Navier - Stokes para el problema estudiado. Se introduce el concepto del potencial de velocidad como herramienta básica para el análisis de cualquier tipo de onda y finalmente se infieren las pérdidas de energía (en forma de energía potencial) del modelo real respecto del teórico a través de la gráfica velocidad de fase contra profundidad de flujo.

2. ONDAS AIRY DE GRAVEDAD. TEORÍA DE PRIMER ORDEN

Para abordar el estudio de ondas de gravedad es conveniente obtener las expresiones que ellas deben satisfacer. Por el hecho de tratarse, en este caso, de ondas en un medio fluido, es condición indispensable que se satisfaga la ecuación de la continuidad de masa y las ecuaciones (o la ecuación vectorial) de Navier - Stokes⁽¹⁾, las cuales, como es bien sabido, tiene un carácter más general y por ende contienen a la ecuación de Bernoulli o de conservación de la energía.

2.1. Ecuaciones de continuidad de masa y de Navier - Stokes

2.1.1 Ecuación de continuidad de masa

La expresión general que representa la conservación de masa en su forma vectorial se expresa como

¹ Además de unas ciertas condiciones de frontera que caracterizan a una onda en particular y que suelen ser correspondientes a las de las paredes confinantes y la superficie libre.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1)$$

donde

ρ : es la densidad del fluido

\vec{V} : es el campo de velocidades

t : es el tiempo

Para el caso que nos compete que es el agua, la cual se puede considerar como incompresible, tenemos que la densidad es prácticamente constante, por lo cual (1) se puede escribir como

$$\bar{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

ó con la definición de la taza de deformación

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$e_{kk} = 0 \quad (3)$$

2.1.2 Ecuaciones de Navier - Stokes

Para el caso del agua $\rho = \text{constante}$ y $\bar{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ la ecuación de la segunda ley de Newton aplicada a una parcela de fluido o "ecuación de Navier Stokes" se transforma en,

(con ν la viscosidad cinemática, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\bar{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} + \bar{\nabla} \frac{1}{2} V^2 = -\bar{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + gh \right) + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (4)$$

donde:

P : es el campo de presiones que actúa sobre la parcela.

ρ : es la densidad del fluido.

μ : coeficiente de viscosidad dinámica

2.2. Relaciones de período y velocidad de fase para ondas estacionarias tipo Airy

Las ondas tipo Airy se caracterizan por ser irrotacionales. Estas ondas lineales se generan en la práctica, por ejemplo, excitando un estanque de tal forma que la amplitud sea muy pequeña en relación a la profundidad

del agua. Bajo estas condiciones, se puede decir que existe una función " ϕ " continua y derivable en todos los puntos del medio fluido tal que $\vec{V} = -\bar{\nabla} \phi$. A esta función se le conoce como potencial de velocidad y deberá satisfacer las condiciones de continuidad de masa y aquellas impuestas en la ecuación de Navier-Stokes (condición dinámica). Si estamos hablando de un fluido como el agua, tal como se demuestra para líquidos poco viscosos, su acción disipadora puede ser bastante tenue, muy lenta en comparación con el período de oscilación de la onda y por lo tanto (4) se escribe como

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \bar{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + gh + \frac{1}{2} V^2 \right) = \vec{V} \times (\bar{\nabla} \times \vec{V}) \quad (5)$$

Con la condición de irrotacionalidad ($\bar{\nabla} \times \vec{V} = 0$) y de onda lineal (esto es, con $V^2 \ll gh$) como supuestos se puede escribir

$$\bar{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + gh \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\nabla} \phi) = \bar{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (6)$$

por lo cual

$$\frac{P}{\rho} + gh = \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(t) \quad (7)$$

Ahora bien, elijamos un sistema coordenado como el de la figura 1.

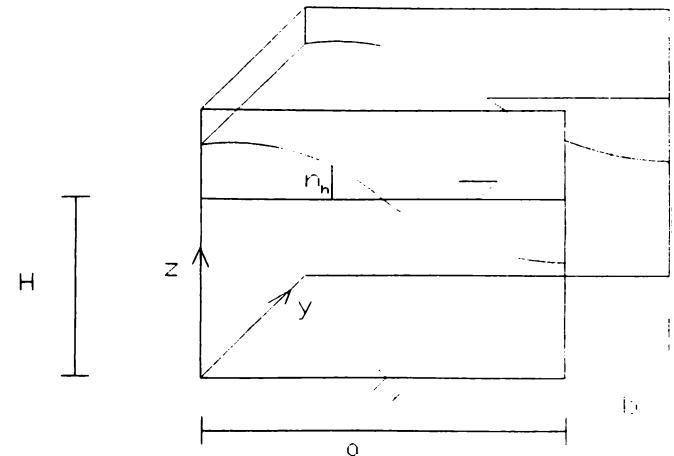


FIGURA 1. Onda estacionaria, en un estanque de dimensiones b y a por unidad de altura, bajo un sistema de referencia establecido sobre fondo plano.

Es fácil observar que bajo la condición de frontera al nivel de la superficie que (7) se escribe como

$$P_{\text{atm}} + \rho g (H + \eta_H) = \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{H+\eta_H} + f(t)$$

Igualando las partes variables en el espacio

$$\rho g \eta_H = \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{H+\eta_H}$$

y notando que para una función continua y derivable $G(x)$ se escribe por diferenciación $G(x + \Delta x) = G(x) + G'(x)\Delta x$, tendremos

$$\rho g \eta_H = \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_H + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_H \eta_H \right)$$

pero, bajo el supuesto de una teoría de primer orden se tiene que

$$\rho g \eta_H = \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_H$$

derivando esta expresión se obtiene

$$\rho g \frac{\partial \eta_H}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_H \quad (8)$$

De otro lado, como ϕ es un potencial de velocidades y η_H un desplazamiento de una partícula de fluido desde la condición de reposo en la superficie libre, se tiene entonces:

$$\frac{\partial \eta_H}{\partial z} = V_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{H+\eta_H} \quad (9)$$

(9) reemplazada en (8) produce

$$\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_H - \eta_H \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_H \right) \rho g \equiv -\rho g \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{H+\eta_H} = -\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_H$$

y bajo el supuesto de una teoría de primer orden se tendrá

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_H = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_H \quad (10)$$

Se obtiene así, una de las condiciones que debe cumplir el potencial de velocidades para ondas estacionarias a la luz de la ecuación dinámica: "la condición de superficie libre".

Otras condiciones se obtienen fácilmente a partir de los requerimientos de velocidad nula en las paredes del estanque confinador y por ello según la figura 1 es válido escribir:

$$V_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0$$

$$V_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = 0$$

$$V_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = a \quad (11)$$

$$V_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0$$

$$V_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = b$$

Se han definido seis condiciones de frontera que caracterizan al flujo, las cuales han de utilizarse en la ecuación de continuidad que ahora se escribe como

$$\nabla \cdot \mathcal{V} = \nabla \cdot (-\nabla \phi) = -\nabla^2 \phi = 0 \quad (12)$$

Esta ecuación sugiere que " ϕ " es una Función armónica que se puede encontrar por el método de la separación de variables: supóngase que ϕ es el resultado de multiplicar las cuatro funciones de las cuatro variables, de las cuales depende,

$\phi = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$, lo que al reemplazar en la ecuación de Laplace produce

$$\nabla^2 \phi = \ddot{X}YZT + X\ddot{Y}ZT + XY\ddot{Z}T = 0$$

La solución trivial carece de sentido físico y entonces

$$\frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\ddot{Z}}{Z} = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\ddot{Y}}{Y} = -\frac{\ddot{Z}}{Z} = -k^2 \quad (13)$$

donde k es una constante.

Hacemos $k^2 = kx^2 + ky^2$ con kx^2 la contribución del sumando X/X a la constante y ky^2 la contribución del sumando Y/Y . De (13) se obtiene

$$\frac{\ddot{X}}{X} = -kx^2, \quad \frac{\ddot{Y}}{Y} = -ky^2, \quad \frac{\ddot{Z}}{Z} = k^2$$

Cuyas soluciones son (cf. Boyce y Diprima, 1980):

$$X(x) = Axe^{ikx} + Bxe^{-ikx}$$

$$Y(y) = Aye^{iky} + Bye^{-iky}$$

$$Z(z) = Aze^{kz} + Bze^{-kz}$$

donde Ax, Ay, Az, Bx, By, Bz son constantes por determinar a partir de las condiciones de frontera (10) y (11); así por ejemplo, con (11),

$$-\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \text{ se obtiene } Ay = By$$

ó bien $Y(y) = Ay \cos(kyY), (Ay = 2Ay)$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \text{ se obtiene}$$

ó bien $X(x) = Ax \cos(kxX), (Ax = 2Ax)$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \text{ se obtiene } Az = Bz$$

ó bien $Z(z) = Az \cosh(kzZ), (Az = 2Az)$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \text{ se obtiene } \sin(kxA) = 0$$

ó bien $kx = \frac{n\pi}{a} \quad n \in \mathbb{Z}$

luego, $X(x) = Ax \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \text{ produce } ky = \frac{m\pi}{b} \quad m \in \mathbb{Z}$$

ó bien $Y(y) = Ay \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$

El potencial de velocidades para ondas lineales tridimensionales se puede escribir entonces como

$$\phi = A \cosh(kz) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) T(t) \quad (14)$$

$$(A = AxAyAz)$$

En esta expresión m y n son números enteros que determinan la forma de la onda. Específicamente, están relacionados con el Número de Nudos (puntos de la superficie con desplazamiento vertical nulo) que hay en direcciones x e y , respectivamente; concibiendo la onda como una superposición de una en xz con otra en yz . Ahora bien, del análisis matemático puede demostrarse que la ecuación (12) tiene infinitas soluciones de la forma (14) y entonces una solución más general es de la forma $\phi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i$, y se conoce como teoría de orden superior. Los a_i son coeficientes reales. Con (10) y observando que

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=H} = kA \operatorname{senh} kH \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) T(t)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_{z=H} = \frac{1}{g} \left[A \cosh kH \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right] \ddot{T}(t)$$

se obtiene

$$\ddot{T} + gk \tanh kH T = 0 \quad (15)$$

Lo cual expresa una dependencia armónica del potencial de velocidades con el tiempo (tal como se dijo antes) de frecuencia angular

$$\sigma = \sqrt{gk \tanh kH} \quad . \quad (16)$$

pero con $k^2 = kx^2 + ky^2$

$$\sigma = \sqrt{g\pi \tanh kH} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{1/4} \quad (17)$$

En este contexto a k se le suele llamar número de onda y en general es igual a $\frac{2\pi}{\lambda}$, siendo λ la longitud de la

onda compuesta con la forma $\lambda = \sqrt{\frac{2a}{n^2 + \frac{m^2 a^2}{b^2}}}$. Para

aguas muy profundas ó lo que es equivalente de longitud de onda muy pequeña se cumple que el término $\tanh kH \rightarrow 1$ y entonces (17) puede escribirse como

$$\sigma = \sqrt{g\pi} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{1/4} \quad (18)$$

Es posible encontrar con una confiabilidad satisfactoria cuál es la profundidad requerida para que la hipótesis de onda muy larga sea satisfecha. Así por ejemplo, si el error relativo es del 3% dicha profundidad mínima se encuentra de la ecuación

$$\frac{\sigma - \sigma^*}{\sigma} = 0,03$$

para encontrar $H_{min} = 0,28\lambda$ (Donde s se tomó de (17) y s^* de (18)).

Así que si se están produciendo ondas de un metro de longitud (digamos en dirección x) la fórmula (18) es válida para encontrar su frecuencia angular de oscilación con una confiabilidad del 97% si la profundidad H es de 28 cm. Por lo que, como norma general, puede hablarse de "ondas cortas"²⁾ si $H > 0,28\lambda$.

La solución para $T(t)$ será, entonces

$$T(t) = A, e^{i\omega t} + B, e^{-i\omega t} \quad (19)$$

Ahora bien, obtenido el potencial es posible encontrar el movimiento de cualquier partícula inmersa en el agua con el paso de la onda. Para ello pueden utilizarse las ecuaciones del tipo (9) que ya mencionamos anteriormente, a sabiendas de que en el caso general, cualquier partícula tendrá un desplazamiento $\eta(x, y, z, t)$ en dirección de z , $\xi(x, y, z, t)$ en dirección de x y $\epsilon(x, y, z, t)$ en dirección de y . Bastará resolver

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{respectivamente.}$$

Entonces

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

Así, con

$$\phi = A \cosh kz \cos \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{m\pi y}{b} \right) [C, \cos \omega t + D, i \sin \omega t]$$

se obtiene

$$\eta = -\frac{kA}{\sigma} \operatorname{sen} kz \cos \left(\frac{n\pi x}{a} \right) [C, \operatorname{sen} \omega t - D, i \cos \omega t] \cos \left(\frac{m\pi y}{b} \right)$$

De (20) se puede notar que a $x_n = \frac{a}{2n}$ de distancia del

origen se presenta un nodo (al igual que en $y = \frac{b}{2m}$).

Ahora bien, si en $x = 0$ la onda arranca con toda la amplitud es claro que en $x = \frac{a}{4}$ (considerando l solo en la dirección x) se presentará el primer nodo tal como se observa en la figura 2.

Por lo tanto $\frac{a}{2n} = \frac{\lambda}{4}$ ó $n = \frac{2a}{\lambda}$. Si en el plano xz

hacemos $n = 1$, $a = \frac{\lambda}{2}$ entonces reproduciríamos el

llamado "modo 1 de oscilación" en el plano xz y así sucesivamente para valores requeridos de n , fijas las dimensiones del estanque. Así por ejemplo tenemos que el modo 1 de oscilación puede representarse gráficamente como lo muestra la figura 2.

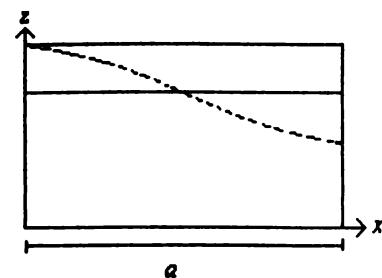


FIGURA 2. Modo 1 de oscilación en un plano.
 $n = 1$ (un solo nudo)

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\sigma} \quad (\text{desfasada } \frac{1}{4} \text{ de período}).$$

² Ondas cortas es equivalente a decir ondas en aguas muy profundas.

En el modo 2 de oscilación en un plano se tendrá que:

$$n = 2, a = 1 \text{ y } t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\sigma} \text{ (desfasada } \frac{1}{4} \text{ de período).}$$

En el modo 3 de oscilación se tiene que:

$$n = 3, a = 3/2 \text{ y } t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\sigma} \text{ (desfasada } \frac{1}{4} \text{ de período).}$$

Generalizando para el modo “ n ” de oscilación en xz tendremos que el r -ésimo nodo se encuentra a una distancia “ x_r ” dada por

$$x_r = (2r + 1) \frac{\lambda}{4} = (2r + 1) \frac{a}{2n} \quad (21)$$

El mismo análisis se hace en yz solo que en vez de a y n se tiene b y m .

El potencial (14) corresponde a la superposición de una onda en xz con un modo de oscilación “ n ” y en yz con un modo de oscilación “ m ”.

Sin embargo, es difícil excitar un estanque, al menos por medios manuales, y reproducir una superposición de modos observables en diferentes planos. Y en un solo plano y con un modo mayor que 1 es difícil medir el período, razón por la cual nuestro estudio se centra (de acuerdo con la figura 1) en el modo 1 de oscilación en el plano xz lo cual implica que $m = 0$ $n = 1$, luego :

$$\phi = A \cosh(kz) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) (C_1 \cos \sigma t + D_1 i \sin \sigma t) \quad (22)$$

$$\eta = \frac{kA}{\sigma} \operatorname{senh}(kz) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) [C_1 \operatorname{sen} \sigma t + D_1 i \cos \sigma t] \quad (23)$$

$$\xi = \int kA \cosh(kz) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) [C_1 \cos \sigma t + D_1 i \sin \sigma t] dt$$

$$\xi = -\frac{kA}{\sigma} \cosh(kz) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) [C_1 \operatorname{sen} \sigma t + D_1 i \cos \sigma t] \quad (24)$$

$$\epsilon = \int -\frac{\partial \phi}{\partial y} dt = 0 \quad (25)$$

Se hablará de ahora en adelante de l para la dirección x , así pues es posible escribir

$$k = \frac{\pi}{a} \text{ (con } a = \frac{\lambda}{2} \text{ y } k = \frac{2\pi}{\lambda}) \quad (26)$$

$$\sigma = \sqrt{gk \tanh kH} \quad (27)$$

La extensión a casos más complejos de oscilación es, en teoría, inmediata.

Nuestro experimento consiste en reproducir el modo 1 de oscilación excitando el estanque manualmente y determinar por medición el período de oscilación de la

$$\text{onda para compararlo con el teórico } T = \frac{2\pi}{\sigma}.$$

También, la velocidad de fase experimental

$$\frac{\lambda}{T_{\text{exp}}} = \frac{2a}{\sigma_{\text{exp}}}$$

se compara con la teórica

$$C\phi = \frac{\lambda\sigma}{2\pi} = \frac{\sigma}{k} \quad \left(k = \frac{\pi}{a} \right),$$

en todos los casos con σ de (27).

En la tabla 1 se muestra la confrontación entre los resultados experimentales y los valores teóricos en cuanto a la velocidad de fase y el período.

TABLA 1. Relaciones entre H , T , C ? para una onda en el modo uno de oscilación confinada en un estanque de dimensiones $a = 50$ cm y $b = 40$ cm.

| Profundidad (cm) | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Período teórico (s) | 1.004 | 0.977 | 0.954 | 0.934 | 0.917 | 0.903 | 0.890 | 0.879 | 0.869 | 0.861 |
| Período experimental (s) | 1.019 | 0.988 | 0.968 | 0.938 | 0.927 | 0.912 | 0.898 | 0.898 | 0.871 | 0.866 |
| error rel. en el período(%) | 1.47 | 1.11 | 1.45 | 0.43 | 1.08 | 0.99 | 0.89 | 2.11 | .23 | 0.58 |
| Vel. de g. teórica (cm/s) | 99.6 | 102.4 | 104.8 | 107.0 | 109.0 | 110.8 | 112.4 | 113.8 | 115.0 | 116.1 |
| Vel. de grupo exp. (cm/s) | 98.1 | 101.2 | 103.3 | 106.6 | 107.8 | 109.7 | 111.4 | 112.8 | 114.8 | 115.4 |
| Error rel. en vel. (%) | 1.53 | 1.19 | 1.45 | 0.37 | 1.11 | 1.00 | 0.90 | 0.89 | 0.17 | 0.61 |

TABLA 1. Relaciones entre H , T , C ? para una onda en el modo uno de oscilación confinada en un estanque de dimensiones $a = 50$ cm y $b = 40$ cm.

Para $22\text{cm} < H < 31\text{cm}$

| Profundidad (cm) | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
|------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Período teórico (s) | 0.854 | 0.847 | 0.842 | 0.837 | 0.834 | 0.829 | 0.826 | 0.823 | 0.820 | 0.818 |
| Período experimental (s) | 0.859 | 0.853 | 0.846 | 0.841 | 0.837 | 0.834 | 0.830 | 0.827 | 0.823 | 0.822 |
| error rel. en el período (%) | 0.58 | 0.70 | 0.47 | 0.47 | 0.36 | 0.60 | 0.48 | 0.48 | 0.36 | 0.49 |
| Vel. de g. teórica (cm/s) | 117.1 | 118.0 | 118.8 | 119.5 | 120.0 | 120.6 | 121.1 | 121.5 | 121.9 | 122.2 |
| Vel. de grupo exp. (cm/s) | 116.4 | 117.2 | 118.2 | 119.0 | 119.5 | 119.9 | 120.5 | 120.9 | 121.5 | 121.7 |
| Error rel. en vel. (%) | 0.60 | 0.68 | 0.51 | 0.42 | 0.42 | 0.58 | 0.50 | 0.50 | 0.33 | 0.41 |

Para $32\text{cm} < H < 40\text{ cm}$

| Profundidad (cm) | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Período teórico (s) | 0.816 | 0.814 | 0.813 | 0.811 | 0.810 | 0.809 | 0.808 | 0.807 | 0.807 |
| Período experimental (s) | 0.820 | 0.819 | 0.818 | 0.816 | 0.815 | 0.814 | 0.812 | 0.811 | 0.807 |
| error rel. en el período (%) | 0.49 | 0.61 | 0.61 | 0.61 | 0.61 | 0.61 | 0.49 | 0.49 | 0.00 |
| Vel. de g. teórica (cm/s) | 122.5 | 122.8 | 123.0 | 123.2 | 123.4 | 123.5 | 123.7 | 123.8 | 123.9 |
| Vel. de grupo exp. (cm/s) | 121.9 | 122.0 | 122.5 | 122.5 | 122.8 | 122.9 | 123.2 | 123.3 | 123.9 |
| Error rel. en vel. (%) | 0.49 | 0.66 | 0.41 | 0.57 | 0.49 | 0.49 | 0.40 | 0.40 | 0.00 |

Nótese la bondad de los resultados obtenidos con errores relativos entre el 0,23% para $H = 20$ cm hasta el 1.47% para $H = 12$ cm³ con un promedio del 0,72% en la medida del período de oscilación de la onda. En la figura 6 se muestra la comparación gráfica entre los valores teóricos y experimentales de los períodos de oscilación.

La figura 3 muestra el comportamiento del citado error relativo Vs la profundidad de flujo. Es de especial interés observar cómo los errores tienden a disminuir en la medida que la profundidad de flujo aumenta y parecen alcanzar un valor asintótico.

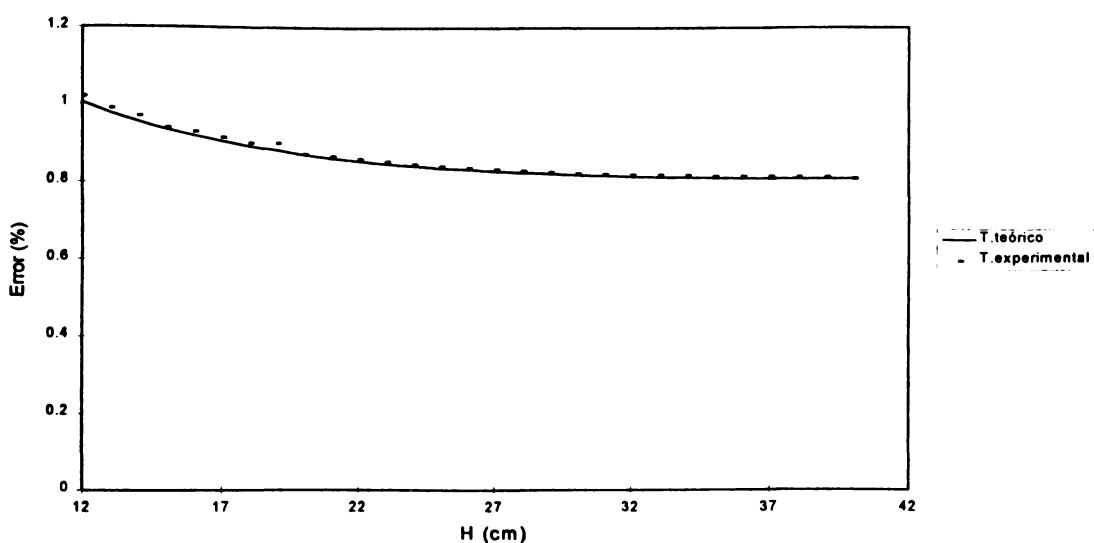


FIGURA 3. Comparación entre los períodos teórico y experimental.

También se puede notar fácilmente lo acertado que es usar (17) con $n=1$ y $m=0$ en especial para $H > 0,28\lambda = 0,28 \times 2a = 0,28 \times 100$ cm = 28 cm

tal como lo establece la teoría.

Otro aspecto que será objeto de discusión es sacado de la tabla 1: si dibujamos la curva

³Es muy posible que el dato correspondiente a $H = 19$ cm sea de carácter anómalo.

$$C\phi = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{\frac{g}{\kappa} \tanh kH}, \quad (\text{fig. 8}), \text{ con}$$

$$k = \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{50} \text{ cm}^{-1}, \quad C\phi(\text{cm/s}) = 124,88 \sqrt{\tanh\left(\frac{\pi H}{50}\right)}$$

y la comparamos con los puntos experimentales

$$C\phi = \frac{\lambda}{T_{\text{exp}}} = \frac{2a}{T_{\text{exp}}} = \frac{100 \text{ cm}}{T_{\text{exp}}}$$

podemos notar, como norma general, que estos últimos quedan por debajo de los teóricos. Así, para un mismo $C\phi$ requerimos teóricamente un cierto H en tanto que a nivel experimental requerimos es un $H + \delta H$. Acá la altura δH que es más bien una “pérdida de altura”, está

asociada directamente (aunque de un modo difícil de establecer en términos matemáticos y/o analíticos) con la amortiguación que producen la viscosidad en coros y paredes, y la tensión superficial en la superficie libre. En la figura 9 puede observarse el incremento de δH conforme aumentamos la profundidad H , puesto que para un $C\phi$ fijo se requiere una mayor profundidad en la realidad que en teoría y esta diferencia aumenta cuando aumentamos la velocidad de fase (o la profundidad). Esto pone de manifiesto, al menos en términos tentativos, que la constante de amortiguación de estas ondas (modo 1 de oscilación en xz , bajo teoría de primer orden) aumenta conforme aumenta la cantidad de agua en el estanque, un resultado un tanto a priori pero muy importante si se tiene en cuenta que hemos inferido ya la forma en que se disipa la energía sin tener aún expresiones para la amortiguación.

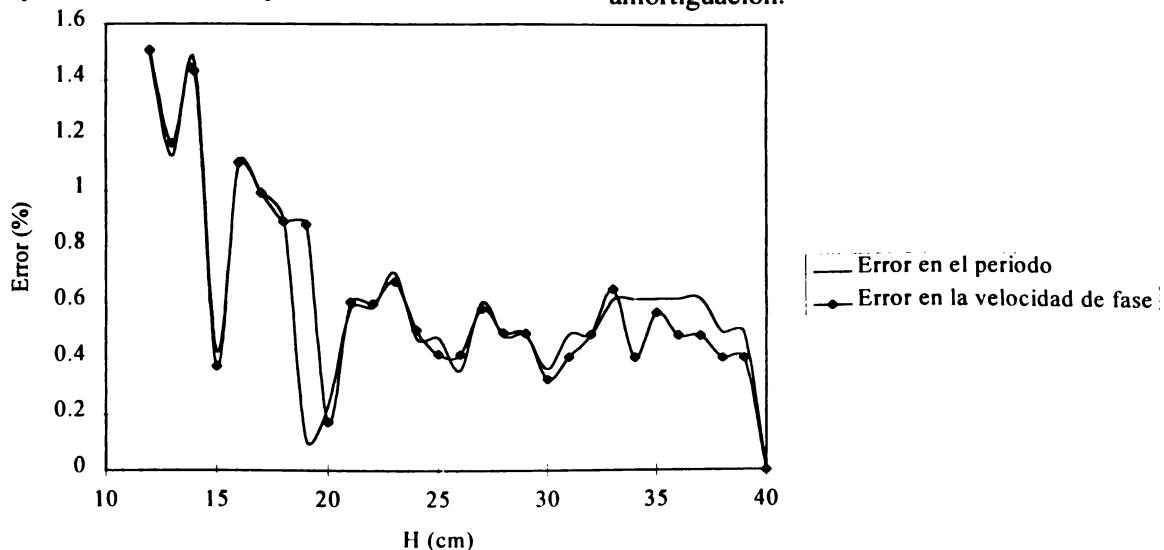


FIGURA 4. Variación en el error porcentual en el período y la velocidad de fase con la profundidad.

Podría decirse, al menos intuitivamente, que la mayor amortiguación es debido, precisamente, a la mayor cantidad de agua en el estanque, es decir, que el efecto de la amortiguación por coros se vuelve importante.

En la figura 4 se ha querido graficar la pérdida de altura por teoría de capa límite

$$\delta_{CL} = 2\pi \sqrt{\frac{v\lambda}{2\pi C\phi_{\text{exp}}(H)}}$$

para ver qué relación tiene con la experimental

$$\delta H = H - \frac{50}{\pi} \operatorname{tagh}^{-1} \left[\frac{C\phi_{\text{exp}}^2(H)}{124,88^2} \right]$$

(aquí $C\phi_{\text{exp}}$ es la velocidad de fase experimental y se lee de la tabla 1 con H la profundidad asociada). En la tabla 2 se muestra las evaluaciones correspondientes. Es muy significativo ver cómo para las menores profundidades δH y δ_{CL} se aproximan notablemente, en tanto que conforme aumenta la profundidad se alejan. En todos los casos δH es mayor que δ_{CL} indicando la amortiguación de la onda por efectos adicionales a la fricción en las paredes, efectos adicionales que son más importantes para mayores profundidades lo cual nos lleva a pensar de inmediato en el efecto de los coros (pues el de la tensión, que es otro factor a considerar en la

amortiguación, no debería ser tan cambiante con la profundidad) como un factor representativo en la amortiguación para grandes profundidades.

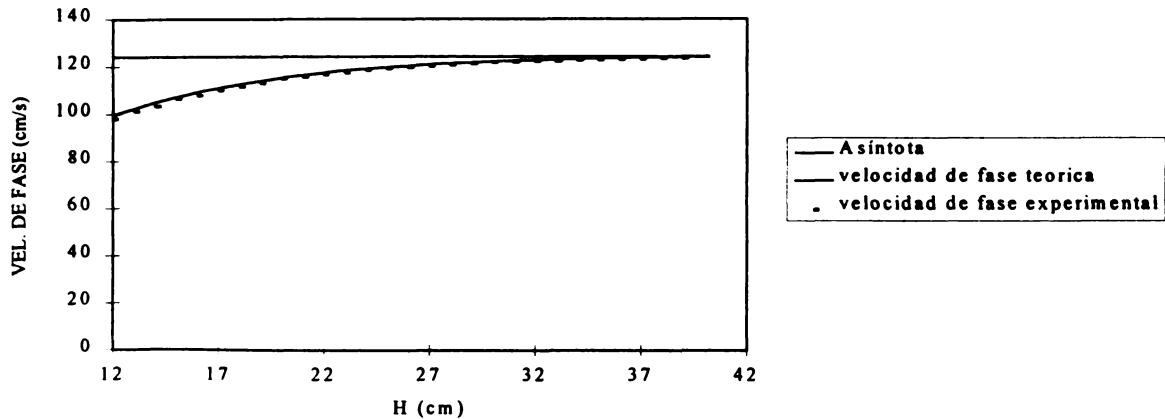


FIGURA 5. Variación de la velocidad de fase con la profundidad.

TABLA 2. Relación entre la pérdida de altura y la altura para ondas estacionarias tipo Airy (Modo 1 en z).

| H (cm) | $\frac{v\lambda}{\tau C\phi_{exp}}$ | $\tau h^{-1} \left(\frac{C\phi^2}{124,88^2} \right)$ |
|----------|-------------------------------------|---|
| 12 | 0,253 | 0,536 |
| 13 | 0,249 | 0,474 |
| 14 | 0,247 | 0,678 |
| 15 | 0,243 | 0,264 |
| 16 | 0,241 | 0,689 |
| 17 | 0,239 | 0,696 |
| 18 | 0,237 | 0,701 |
| 19 | 0,236 | 0,786 |
| 20 | 0,234 | 0,286 |
| H (cm) | | $= 2\pi \sqrt{\frac{v\lambda}{2\pi C\phi_{exp}}}$ |
| 21 | 0,233 | 0,779 |
| 22 | 0,232 | 0,862 |
| 23 | 0,232 | 1,048 |
| 24 | 0,231 | 0,902 |
| 25 | 0,230 | 0,868 |
| 26 | 0,229 | 1,145 |
| 27 | 0,229 | 1,518 |
| 28 | 0,228 | 1,477 |
| 29 | 0,228 | 1,703 |
| 30 | 0,227 | 1,384 |
| 31 | 0,227 | 1,892 |
| 32 | 0,227 | 2,369 |
| 33 | 0,227 | 3,094 |
| 34 | 0,226 | 2,561 |
| 35 | 0,226 | 3,561 |
| 36 | 0,226 | 3,479 |
| 37 | 0,226 | 4,084 |
| 38 | 0,226 | 3,767 |
| 39 | 0,226 | 4,275 |
| 40 | 0,225 | 1,456 |

3. LISTA DE SÍMBOLOS

- a*: longitud del estanque = 50 cm
b: ancho del estanque = 40 cm
a_r: coeficiente real

σ^* : tensión superficial

T: período de oscilación

k: número de onda; k_x : número de onda en *x*; k_y : número de onda en *y*

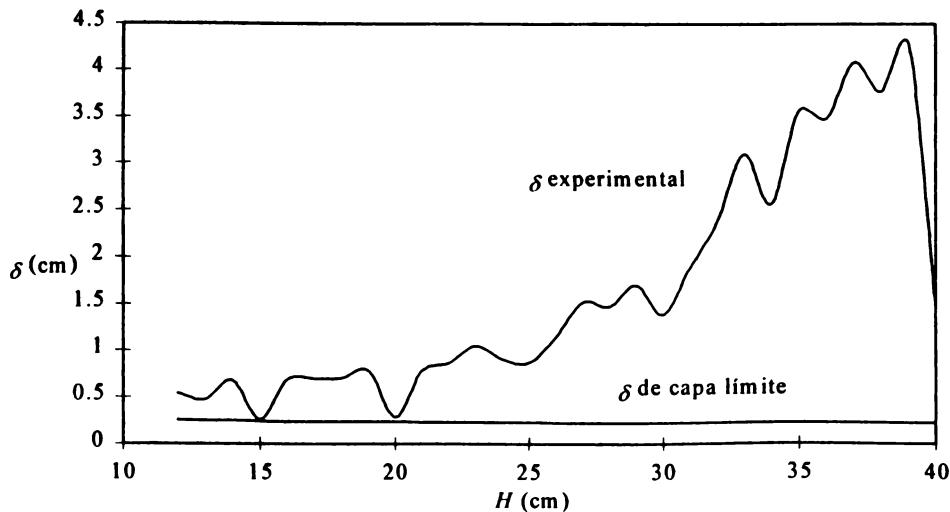


Figura 6. Pérdida de cabeza asociada a la velocidad de fase con la profundidad.

- η : desplazamiento vertical de una partícula inmersa en el medio fluido (en dirección z)
 ξ : desplazamiento en dirección de x de una partícula inmersa en el medio fluido
 ϵ : desplazamiento en dirección de y de una partícula inmersa en el medio fluido
 σ : frecuencia angular de oscilación
 H : profundidad de flujo del estanque
 dH : defecto de profundidad
 t : tiempo
 x , y , z : coordenadas globales del sistema oscilante
 $C\phi$: velocidad de fase
 P : presión
 ϕ : potencial de velocidad
 ν : viscosidad cinemática
 μ : viscosidad dinámica
 e_{ij} : tasa de deformación
 δ : espesor de la capa límite
 η_0 : amplitud inicial de oscilación o amplitud en la superficie y en la pared $x = 0$ cuando se habla de amortiguación
 λ : longitud de la onda ($\lambda = 2a$ en el modo 1 de oscilación)
 n : número de modos de oscilación en un plano (xz)
 m : número de modos de oscilación en un plano (yz)
 ζ : desplazamiento del nodo en el modo uno de oscilación por efectos del análisis de segundo orden

4. BIBLIOGRAFÍA

- Basset, A.B. 1961. A practice on Hydrodynamics with numerous examples. New York. Dover .(Dover books on Physics, Engineering, Astronomy).
- Batchelor, G.K. 1969. An introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press..
- Boyce y Diprima, 1980. Ecuaciones Diferenciales Domogéneas de Segundo Orden, Editorial Limusa.
- Cataño, Y. y Smith, P. 1997. Amortiguación de ondas estacionarias por viscosidad, Tesis de grado, Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Minas, pp. 241.
- Crawford, F. 1966. Waves and oscillations. McGraw-Hill. Berkeley Physics Course, Vol. 3. New York.
- Elmore, H. 1969. Physics of Waves . Mc Graw Hill International.
- Lamb, H. 1932. Hydrodynamics Sexta edición, Cambridge University Press, Cambridge.
- Li, W. H., Lam, S. H. 1964. Principles of Fluids Mechanics. Estados Unidos de América , Addison Wesley.
- Lighthill, J. 1980. Waves in Fluids. Cambridge University Press. Cambridge.
- Naranjo J.A. 1989. Ondas en Superficies Líquidas. Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín.
- Schlichting, H. 1968. Boundary Layer Theory. New York, Mc Graw-Hill.
- White, F. M. 1985. Mecánica de fluidos. Mexico, Mc Graw Hill.
- Whitham, G.R.S. 1974. Linear and non linear waves John Wiley and Sons.