

## MODELO ANALITICO Y EXPERIMENTAL DEL RESALTO HIDRÁULICO POR CAMBIO DE PENDIENTES

**Juan David Montoya, Oscar Humberto González, Wilfer Humberto Gómez, Carlos Arturo Quiceno  
y Jorge Alberto Naranjo**

*Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos, Escuela de Geociencias y Medio Ambiente,  
Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín  
jdvelilla@hotmail.com.ar*

Recibido para evaluación: 2 Septiembre de 2002 / Aceptación: 13 de Noviembre de 2002 / Recibida versión final: 22 de Noviembre de 2002

### RESUMEN

El presente trabajo investiga los resaltos hidráulicos formados por cambios de pendiente, con la pendiente adversa actuando como único control y donde la descarga en la salida es libre. Bajo esta consideración se pretende construir una teoría hidráulica que aproxime una solución teórica y experimental del resalto formado entre pendientes. Para cumplir con este objetivo se construye un modelo experimental que simule esta situación y del cual se desprenda la información necesaria para la obtención de los parámetros adimensionales que rigen en el modelo teórico. Los resultados obtenidos permiten realizar la validación del modelo teórico planteado a partir de la ecuación de conservación de movimiento, con la inclusión de factores de corrección por peso del volumen de control y por impacto de las fuerzas de fondo.

El modelo permite obtener buenos resultados en el cálculo de la profundidad secuente  $d_2$ , con errores en su mayoría por debajo del 20%.

**PALABRAS CLAVE:** Resalto Hidráulico, Pendiente Adversa, Controles del Resalto, Factor de Corrección.

### ABSTRACT

In this study, the hydraulic jump in the stilling basin with adverse slopes acting as an only control has been analyzed. A new classification of jump is also introduced. This work raise a theoretical solution to the problem of the hydraulic jump formed by changes of slope. The theoretical model applied the momentum equation. Accordingly, an experimental model is constructed to simulate the hydraulic jump; that model brings useful information to obtain the non-dimensional parameters. The experimental results demonstrate that the sequent depth ratio and lengths  $L_e$  and  $L_s$  of the jump depend of the approach Froude number and the two slopes Correction factors : by the weight of water in the control volume and bottom impact, which are introduced in the theoretical model. Satisfactory agreement is found between the predicted and experimental results of the mean flow field.

**KEYWORDS:** Hydraulic Jump, Adverse Slope, Jump Controls, Correction Factors.

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio del resalto hidráulico como disipador de energía ha sido una de las teorías hidráulicas más analizada y validada en los últimos tiempos por los investigadores y diseñadores hidráulicos, que intentan encontrar las condiciones óptimas para su aplicación.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un modelo hidráulico en el cual sea posible la formación de resaltos controlados exclusivamente por la disposición de pendientes. Con la información experimental obtenida, se pretende analizar y validar un modelo teórico, aplicando para esto una expresión derivada del principio de conservación de movimiento, que será comparada con ecuaciones propuestas por diferentes autores.

La importancia de este estudio radica en que hasta el momento no se conocen teorías significativas, en las cuales se exponga la generación del resalto hidráulico formado por cambios de pendiente, y donde las condiciones de flujo necesarias para la formación, estén dadas bajo condiciones completamente naturales; es decir, sin controles tales como compuertas, persianas, etc.

El trabajo total de experimentación llevado a cabo implicó el estudio de 176 resaltos, para 25 combinaciones de pendientes indicadas. La utilización de todas estas combinaciones permite observar la variación y formación de diferentes tipos de resaltos, que como resultado de este estudio se clasifican como resaltos tipo  $B_A$ ,  $C_A$ ,  $D_A$  y  $F_A$ . Finalmente la aplicación de los datos experimentales en la ecuación teórica que representa el modelo, permite obtener buenos resultados en el cálculo de la profundidad secuente  $d_2$ , con errores en su mayoría por debajo del 20%.

## 2. ESTADO DEL ARTE

La aplicación de la ecuación de conservación de movimiento para calcular las dimensiones esenciales en un resalto hidráulico clásico, ha sido suficientemente validada con datos de laboratorio. Para aplicar este mismo principio en resaltos hidráulicos formados en canales con cambio de pendiente, es necesario obtener el perfil del resalto, obtenido a través del registro de las presiones de fondo. Sólo hasta el año de 1934, la inclusión del perfil de presiones como parámetro importante en la determinación de las dimensiones del resalto fue tenida

en cuenta por Yarnell. Los resultados no fueron satisfactorios, debido a que la suposición de un perfil recto entre el inicio y el final del resalto no era lo más adecuado.

Bakhmeteff y Matzke (1938) realizaron los primeros estudios sistemáticos sobre resaltos hidráulicos en pendiente; ellos introducen en su análisis un coeficiente de forma que tiene en cuenta el efecto de las presiones en el fondo del canal. Kindsvater (1944) hizo un análisis de los datos obtenidos por Yarnell. A partir de los resultados, Kindsvater estableció una clasificación basándose en la posición del resalto (Figura 1).

**Resalto tipo A:** Todo el resalto en el piso horizontal. Resalto Clásico.

**Resalto tipo B:** El inicio del resalto en la pendiente y el final en la porción horizontal

**Resalto tipo C:** El final del resalto está en la conjunción de los planos.

**Resalto tipo D:** Todo el resalto se forma en la pendiente de entrada.

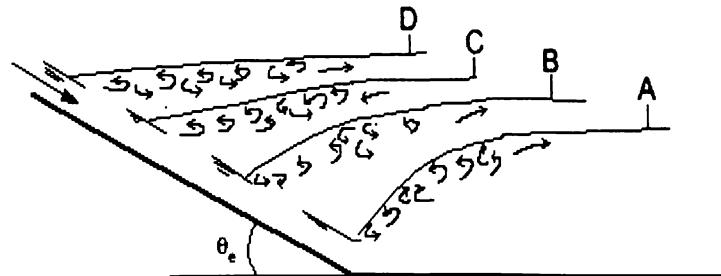


FIGURA 1. Clasificación del Resalto según Kindsvater.

Kindsvater analizó experimentalmente los casos C y D, para los cuales propuso una expresión aproximada de la relación de profundidades secuentes, deducida matemáticamente. Esta es:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2 \cos \theta_e} \left( \sqrt{\frac{8F_1^{*2} \cos^3 \theta_e}{1 - 2 \cos \phi \tan \theta_e}} + 1 - 1 \right) \quad (1)$$

Donde

$F_1^*$  =  $\frac{U_1}{gd_1}$  Es el número de Froude a la entrada aquí,  $d_1$  y  $d_2$  son las profundidades normales al inicio y final del resalto respectivamente y  $f$  es el coeficiente de presión expresado de la siguiente forma:

$$\phi = \frac{\bar{y}L_r}{(d_2)^2 - \frac{d_1^2}{\cos^2 \theta_e}} \quad (2)$$

Con:

$\bar{y}L_r$  = Área del diagrama de presión.

$L_r$  = Longitud del remolino (roller), asumido como el final del resalto.

Para el caso de resaltos tipo B, se encontró que al aplicar la ecuación (1) los resultados siempre excedieron la profundidad  $d_2$ . De este modo Kinsvater concluyó, que para este caso no se tenía una ecuación teórica que validara los datos experimentales obtenidos para  $d_2$ .

Okada y Aki (1955) en un intento por encontrar la longitud más corta sobre la cual se generase un resalto hidráulico en pendiente adversa, llevaron a cabo varios experimentos de resaltos, con números de Froude a la entrada del resalto que se encontraban en un intervalo de 9 a 13; sin embargo, estos números de Froude estaban por fuera del intervalo de diseño, que según Chow (1982) varía entre 4 y 9. Abdul y Rajagopal (1972), estudiaron el resalto hidráulico en canales con pendiente adversa controlado por medio de compuertas deslizantes a la entrada y salida del resalto.

Al igual que en estudios anteriores estos investigadores aplican la ecuación de conservación de movimiento para un resalto formado completamente en la pendiente adversa y llegan a la siguiente expresión para la relación de profundidad secuente:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2} \left( 1 + 8G^2 - 1 \right) \quad (3)$$

Con G dado por:

$$G = \frac{F_1^*}{\cos \theta_s + \frac{KL_r \operatorname{sen} \theta_s}{d_2 - d_1}} \quad (4)$$

Donde K es el factor de corrección por forma del volumen de control.

Rajaratnam (1966) clasificó los resaltos sobre pendiente adversa como tipo F y concluyó que era casi imposible mantener estable este tipo de resalto. Ohtsu y Yasuda

(1991), propusieron ecuaciones experimentales para profundidades secuentes y longitud de los resaltos tipo B y D, según la clasificación de Kinsvater.

McCorquodale y Mohamed (1994) llevaron a cabo un análisis teórico y experimental del resalto hidráulico formado totalmente sobre la pendiente adversa en un canal rectangular y prismático. Los autores plantean una solución para la relación de profundidades secuentes similar a la de Abdul y Rajagopal (1972), teniendo en cuenta el peso del fluido y la fuerza de fricción incluidos en el factor G, así:

$$G_a^2 = \frac{\beta_1 F_1^2}{1 + \frac{KL_r \tan \theta_s}{d_2 - d_1} + \frac{2F_f}{\gamma(d_2 - d_1)}} \quad (5)$$

Donde  $F_1$  se define como:

$$F_1 = \frac{U}{gd_1 \cos \theta} \quad (6)$$

El montaje experimental realizado por McCorquodale, utiliza compuertas planas aguas arriba y abajo del resalto hidráulico, de manera que se puede mantener el volumen de control *estabilizado* en la pendiente adversa.

Pagliara y Peruginelli (2000), realizaron un análisis teórico y experimental del resalto formado sobre pendiente adversa, utilizando obstáculos de diferente altura como controles aguas abajo del resalto. Estos autores proponen una ecuación similar a la de McCorquodale y sólo varían el parámetro G así:

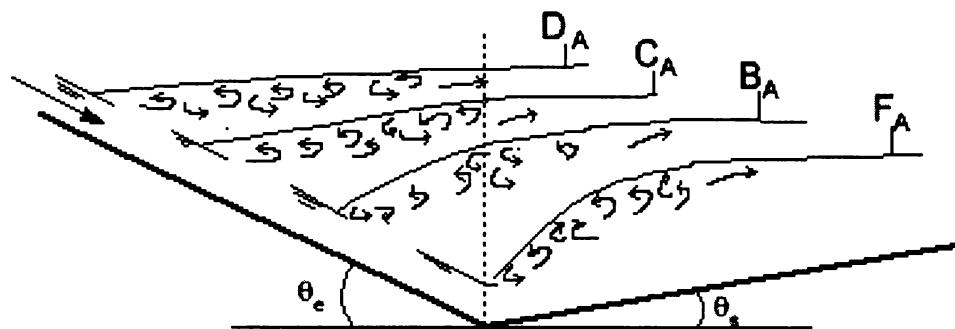
$$G_s^2 = \frac{F_1^2}{\cos \theta_s - \frac{KL_r \operatorname{sen} \theta_s d_1}{d_1 \left( \frac{d_2}{d_1} - 1 \right)} - C_d \frac{s_s F_1^2}{d_1 \left( 1 + \frac{d_2^2}{d_1^2} \right)}} \quad (7)$$

Donde:

$C_d$  = Coeficiente de dragado.

$s_s$  = Altura del obstáculo.

En este trabajo se realiza una clasificación del tipo de resalto en función de la posición relativa del inicio del mismo con respecto a la conjunción de las pendientes, tal como lo presentado por Kinsvater (1944) y Rajaratnam (1966) para el caso de resaltos en pendiente.



**FIGURA 2.**  
Clasificación de los resaltos en pendiente adversa.

La clasificación es la siguiente:

$F_A$ : Todo el resalto formado en la pendiente adversa  $B_A$ : El inicio del resalto en la pendiente de entrada y el final en la pendiente adversa  $C_A$ : El final del resalto esta en la conjunción de las pendientes  $D_A$ : Todo el resalto en la pendiente de entrada.

Con el propósito de profundizar en el estudio de los resaltos hidráulicos en cambios de pendiente, se pretende presentar un modelo hidráulico teórico, planteado a partir de la ecuación de conservación de movimiento y con el cual es posible encontrar la profundidad secuente  $d_2$ . El modelo teórico será validado por medio de los resultados obtenidos de un modelo experimental, tal como se presenta a continuación.

### 3. TRABAJO EXPERIMENTAL

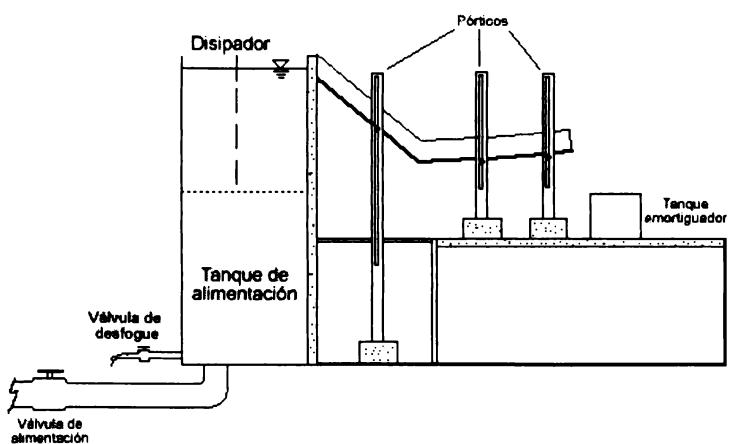
Con el propósito de encontrar un modelo óptimo que permitiese visualizar el comportamiento de resaltos hidráulicos en cambios de pendiente y familiarizarse con ellos, se procedió a la realización de un montaje a pequeña escala (prediseño), constituido por dos canales prismáticos formando un cambio de pendiente. En el prediseño se pudieron observar las características propias del resalto y evaluar los parámetros que gobernarían en un modelo hidráulico definitivo, esto es fundamental para el desarrollo de ecuaciones que representasen un resalto hidráulico en estas condiciones.

El modelo hidráulico se construyó en el Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Minas, Universidad Nacional –Sede Medellín, Colombia (Figura 3). Las características son las siguientes:

El canal de entrada tiene una longitud de 1.40 m con sección rectangular de 0.15 m de ancho y 0.40 m de

altura; a su vez, el canal de salida de 2.00 m de longitud tiene una sección rectangular de 0.16 m de ancho y 0.40 m de altura. El canal de salida, siempre dispuesto en pendiente adversa, hace las veces de control, y la descarga al final del canal es libre. Los canales constan de un fondo construido totalmente en madera y las paredes están conformadas por láminas de acrílico transparente. La regulación del caudal se realiza por medio de dos válvulas de compuerta y es medido en un vertedero triangular.

La medición de las presiones sobre el fondo de los canales se realiza por medio de 30 piezómetros, 9 a la entrada y 21 a la salida, los cuales se ubican longitudinalmente sobre el eje central de cada canal. Las aberturas de las tomas piezométricas son de 3 mm de diámetro y para cada una de ellas se acopla un tubo pequeño de cobre de 5 mm de diámetro, al cual se le conecta una manguera de 5.2 mm de diámetro, que es llevada a un tablero manométrico.



**FIGURA 3.**  
Esquema del montaje experimental.

Las profundidades secuentes se miden con limnímetro. Las longitudes del resalto a la entrada y la salida ( $L_e$  y  $L_s$ ) se miden, desde la conjunción, con una regla dispuesta sobre la base de cada canal. El perfil del resalto se mide por medio de una cuadrícula dispuesta en una de las paredes del canal; ésta permite tener una precisión en la lectura al centímetro. El tablero manométrico permite realizar lecturas con una precisión de milímetro.

Para ubicar la posición donde se asume finaliza el remolino o turbulencia y donde se toma  $d_2$ , se ubica el punto donde las burbujas emergen desde el fondo hacia la superficie y claramente comienzan a viajar hacia aguas abajo del canal. La longitud del remolino  $L_r$ , se asume como la suma de las proyecciones horizontales de  $L_e$  y  $L_s$ . Esto es:

$$L_r = L_e \cos \theta_e + L_s \cos \theta_s \quad (8)$$

#### 4. ANALISIS TEORICO

La deducción del modelo aquí propuesto se desarrolla tomando como punto de partida el principio de conservación de la cantidad de movimiento. Éste tiene en cuenta todas las fuerzas externas que actúan sobre el volumen de control, representado en la figura 4. Las hipótesis que se tienen en cuenta para la deducción del modelo son las siguientes:

- La distribución de presiones es hidrostática al inicio y final del resalto.
- La distribución de velocidades en las secciones inicial y final del resalto es uniforme.
- Las profundidades secuentes  $d_1$  y  $d_2$  se toman perpendicularmente al fondo del canal y se considera además que las líneas de corriente en ambas secciones son paralelas al lecho del canal.
- Se desprecia la fuerza debida al aire.
- Se considera líquido incompresible y libre de sedimentos.

Aplicando la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en la dirección X sobre el volumen de control, representado en la figura 4, se obtiene:

$$\begin{aligned} P_{1x} - P_{2x} - F_{fx} - F_a + N_{ex} - N_{sx} \\ = \rho A_2 U_2 U_{2x} - \rho A_1 U_1 U_{1x} \end{aligned} \quad (9)$$

Donde  $U_{1x}$ ,  $U_{2x}$  son las componentes de la velocidad media en dirección X, es decir:

$$U_{1x} = U_1 \cos \theta_e, \quad U_{2x} = U_2 \cos \theta_s \quad (10a,b)$$

$P_{1x}$ ,  $P_{2x}$  son las fuerzas debidas a la presión hidrostática que actúan al comienzo y final del volumen de control.

$$P_{1x} = \frac{1}{2} \gamma d_1^2 B \cos^2 \theta_e, \quad P_{2x} = \frac{1}{2} \gamma d_2^2 B \cos^2 \theta_s \quad (11a,b)$$

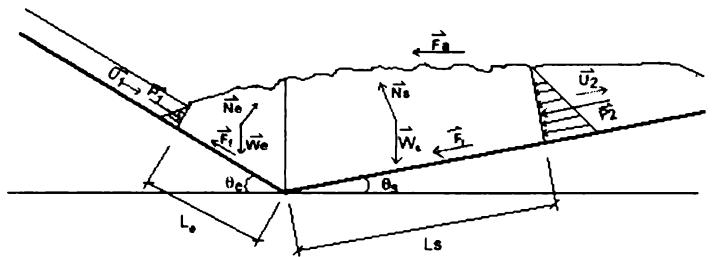


FIGURA 4.

Volumen de control para un resalto en cambios de pendiente.

$N_{ex}$ ,  $N_{sx}$  son las componentes en dirección X de las fuerzas normales en el fondo, debidas al peso de los volúmenes de control a la entrada y salida respectivamente.

$$N_e = W_e \cos \theta_e \rightarrow N_{ex} = W_e \cos \theta_e \sin \theta_e \quad (12)$$

$$N_s = W_s \cos \theta_s \rightarrow N_{sx} = W_s \cos \theta_s \sin \theta_s \quad (13)$$

Reemplazando las ecuaciones (10a,b), (11a,b), (12) y (13) en (9):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma B (d_1^2 \cos^2 \theta_e - d_2^2 \cos^2 \theta_s) + W_e \cos \theta_e \sin \theta_e \\ - W_s \cos \theta_s \sin \theta_s - F_{fx} = \rho Q (U_2 \cos \theta_s - U_1 \cos \theta_e) \end{aligned} \quad (14)$$

En (14)  $d_1$  y  $d_2$  son las profundidades normales al fondo del canal al comienzo y final del resalto;  $W_e$  y  $W_s$  son magnitudes totales para las componentes del peso en los canales de aproximación y salida respectivamente;  $U_1$  y  $U_2$  las velocidades medias;  $\theta_e$  y  $\theta_s$  los ángulos del fondo de los canales de entrada y adverso respectivamente;  $\rho$  es la densidad del fluido y  $F_{fx}$  la fricción de fondo.

En la figura 4 se muestra el volumen de control dividido por una línea vertical que se traza desde la conjunción hasta la superficie libre del resalto, de este modo se tiene

un volumen de entrada ( $V_e$ ) y un volumen de salida ( $V_s$ ), que multiplicados por el peso específico del agua ( $\gamma$ ) y por coeficientes experimentales de corrección por forma y por impacto,  $k_e$  y  $k_s$ , permiten corregir las aproximaciones realizadas en el cálculo de los volúmenes de entrada y de salida.

Introduciendo  $W_e = k_e \gamma V_e$  y  $W_s = k_s \gamma V_s$  y simplificando la Ecuación (14) se obtiene:

$$\begin{aligned} & 1 \left( d_1^2 - d_2^2 \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos^2 \theta_e} \right) + \frac{k_e}{B} V_e \operatorname{sen} \theta_e - \frac{k_s}{B} V_s \operatorname{sen} \theta_s \frac{\cos \theta_s}{\cos \theta_e} \\ & = F_1^2 \frac{d_1^2}{d_2^2} (d_1 \cos \theta_s - d_2 \cos \theta_e) \end{aligned} \quad (15)$$

con:

$$F_1 = \frac{U_1}{g d_1 \cos \theta_e} \quad (16)$$

En la ecuación (15) se involucran todas las condiciones geométricas del modelo y el número de Froude al comienzo del resalto. Con esta ecuación es posible calcular el valor de la profundidad secuente  $d_2$ , por medio de la utilización de un método numérico.

#### 4.1. Coeficientes de corrección $K_e$ Y $K_s$

Los coeficientes  $k_e$  y  $k_s$  se utilizan para hacer corrección de las fuerzas de fondo, por forma y por impacto, en la ecuación (15); dichas fuerzas son función del peso de los volúmenes  $V_e$  y  $V_s$ . Los valores de  $k_e$  y  $k_s$ , se determinan en forma experimental, comparando las fuerzas normales  $N_{e(p)}$  y  $N_{s(p)}$ , medidas mediante piezómetros instalados en el fondo del canal; con las fuerzas normales  $N_{e(Ve)}$  y  $N_{s(Vs)}$ , resultantes de multiplicar los volúmenes  $V_e$  y  $V_s$  por el peso específico del fluido ( $\gamma$ ). Así:  $k_e = N_{e(p)} / N_{e(Ve)}$ ;  $k_s = N_{s(p)} / N_{s(Vs)}$

De acuerdo a lo anterior, las fuerzas normales obtenidas con los volúmenes son:

$$N_{e(Ve)} = \gamma V_e \cos \theta_e$$

$$N_{s(Vs)} = \gamma V_s \cos \theta_s$$

Para calcular las fuerzas normales medidas con piezómetros, es necesario multiplicar la lectura piezométrica  $h_i$  por el peso específico del agua y por el área de influencia del piezómetro ( $a_i * B_i$ ). Se asume esta

consideración porque hay una suficiente cantidad de piezómetros instalados en los canales, y la sumatoria de estas fuerzas normales en cada piezómetro permite obtener la fuerza resultante que se aplica en el centroide del volumen de control. Así las fuerzas normales medidas están dadas por:

$$N_{e(Ve)} = \sum_{V_e} h_i \cdot a_i \cdot B_i, \quad N_{s(Vs)} = \sum_{V_s} h_i \cdot a_i \cdot B_i \quad (17a,b)$$

Donde  $a_i$  es el ancho del área de influencia del piezómetro  $i$ ;  $B$  el ancho del canal y  $h_i$ , la lectura piezométrica en el piezómetro  $i$ . Los coeficientes de corrección para calcular en cada uno de los resaltos estudiados son:

$$k_e = \frac{\sum_{V_e} h_i \cdot a_i \cdot B_i}{\sum_{V_e} \cos \theta_e}, \quad N_{s(Vs)} = \sum_{V_s} h_i \cdot a_i \cdot B_i \quad (18a,b)$$

Para cada uno de los resaltos en estudio se hallan los valores  $k_e$  y  $k_s$ , y se analiza la dependencia de éstos con otros parámetros como  $F_1$ ,  $\theta_e$  y  $\theta_s$ .

#### 4.2. Cálculo de los volúmenes $V_e$ Y $V_s$

Como puede verse en la ecuación (15), es necesario encontrar una aproximación para cada uno de los volúmenes  $V_e$  y  $V_s$ . En este estudio se analizan dos posibilidades para estimar estos volúmenes, con el propósito de validar la importancia de los coeficientes de corrección obtenidos. En la primera aproximación ( $A_1$ ) se elabora un esquema detallado que permite aproximar el perfil real visto en el procedimiento experimental, (Figura 5). La segunda aproximación ( $A_2$ ) simplifica a ( $A_1$ ) de tal manera que se pueda reducir el manejo de términos en (15) y buscar que el procedimiento iterativo converja más rápido, (Figura 6).

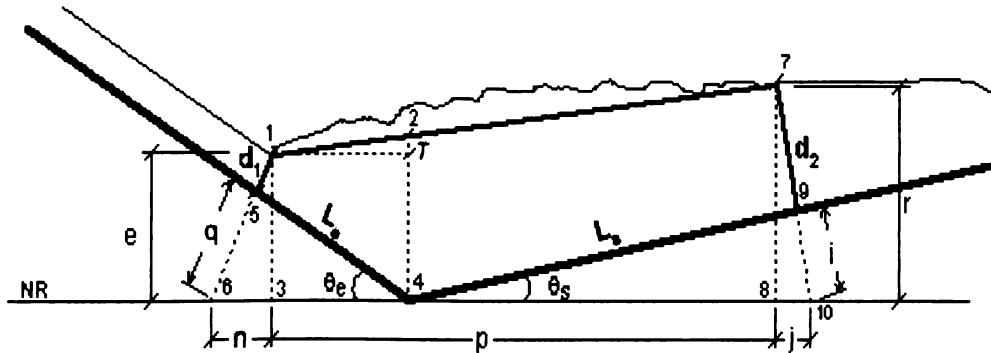
##### Aproximación $A_1$ :

En este caso  $V_e$  = cuadrilátero (1,2,4,5) y  $V_s$  = cuadrilátero (2,4,7,9) en la Figura 4. Los parámetros que se definen en la figura son:

$$T = \frac{(L_e \cos \theta_e - (d_1 + L_e \tan \theta_e) \sin \theta_e) \cdot (d_2 + L_s \tan \theta_s) \cos \theta_s - (d_1 + L_e \tan \theta_e) \cos \theta_e}{L_e \cos \theta_e + L_s \cos \theta_s - d_1 \sin \theta_e - d_2 \sin \theta_s}$$

$$e = (d_1 + L_e \tan \theta_e) \cos \theta_e, \quad r = (d_2 + L_s \tan \theta_s) \cos \theta_s, \quad j = (d_2 + L_s \tan \theta_s) \sin \theta_s, \quad q = L_e \tan \theta_e$$

$$i = L_s \tan \theta_s, \quad n = (d_1 + L_e \tan \theta_e) \sin \theta_e, \quad p = L_e \cos \theta_e + L_s \cos \theta_s - d_1 \sin \theta_e - d_2 \sin \theta_s$$



**FIGURA 5.**  
Aproximación (A1) geométrica para el cálculo de volúmenes.

El cálculo de los volúmenes depende de las áreas multiplicadas por el ancho del canal. Así:

$$V_e = \left[ [(d_1 + L_e \tan \theta_e) \cos \theta_e + (d_1 + L_e \tan \theta_e) \cos \theta_e + T] \cdot \frac{1}{2} (L_e \cos \theta_e - (d_1 + L_e \tan \theta_e) \sin \theta_e) + \frac{1}{2} (d_1 + L_e \tan \theta_e) \sin \theta_e \cdot (d_1 + L_e \tan \theta_e) \cos \theta_e - \frac{1}{2} L_e^2 \tan \theta_e \right] \cdot B \quad (19)$$

$$V_s = \left[ [(d_2 + L_s \tan \theta_s) \cos \theta_s + (d_1 + L_e \tan \theta_e) \cos \theta_e + T] \cdot \frac{1}{2} (L_s \cos \theta_s - (d_2 + L_s \tan \theta_s) \sin \theta_s) + \frac{1}{2} (d_2 + L_s \tan \theta_s) \sin \theta_s \cdot (d_2 + L_s \tan \theta_s) \cos \theta_s - \frac{1}{2} L_s^2 \tan \theta_s \right] \cdot B \quad (20)$$

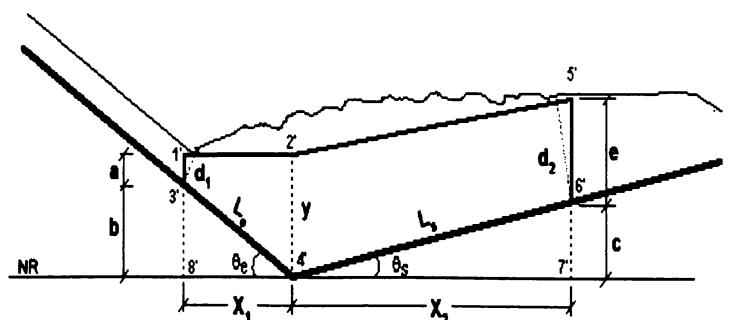
#### Aproximación A<sub>2</sub>:

En este caso  $V_e = \text{Cuadrilátero}(1', 2', 3', 4')$  y  $V_s = \text{Cuadrilátero}(2', 4', 5', 6')$ ; en la Figura 6. Los parámetros geométricos necesarios para el cálculo de volúmenes son:

$$a = d_1 \cos \theta_e, \quad b = L_e \sin \theta_e, \quad c = L_s \sin \theta_s$$

$$x_1 = L_e \cos \theta_e, \quad x_2 = L_s \cos \theta_s$$

$$y = d_1 \cos \theta_e + L_e \sin \theta_e$$



**FIGURA 6.**  
Aproximación (A2) geométrica para el cálculo de volúmenes.

Los volúmenes quedan definidos como:

$$V_e = L_e \cos \theta_e \left( d_1 \cos \theta_e - \frac{L_e}{2} \sin \theta_e \right) \cdot B \quad (21)$$

$$V_s = \frac{1}{2} L_s \cos \theta_s (d_1 \cos \theta_e + L_e \sin \theta_e + d_2 \cos \theta_s) \cdot B \quad (22)$$

Comparando las ecuaciones (19) y (20) con (21) y (22), se observa que son estas últimas mucho más simples, y la aproximación A<sub>2</sub> permite una más fácil manipulación de la ecuación (15).

#### 4.3. Pérdidas de energía

Para evaluar las pérdidas de energía en el modelo estudiado, es necesario tomar un nivel de referencia horizontal y de este modo aplicar el principio de Bernoulli al inicio y final del resalto. Siguiendo un análisis

algebraico detallado y despreciando el efecto de la fricción en el fondo del canal y en las paredes, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Delta E = \frac{F_1^2 d_1 \cos(\theta_e)}{2} \left( \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_2^2} \right) + d_1 \cos \theta_e - d_2 \cos \theta_s - L_s \sin \theta_s + L_e \sin \theta_e \quad (23)$$

La ecuación (23), permite calcular las pérdidas de energía en el resalto, en función del número de Froude y de sus parámetros geométricos.

### 5. RESULTADOS Y ANALISIS

En la tabla 1 se representan los valores extremos de F<sub>1</sub> (mínimos y máximos) obtenidos en la fase experimental para cada una de las pendientes θ<sub>e</sub> analizadas. La franja delimitada representa el rango de trabajo en el que fue posible la medición, un valor por fuera de este rango no permite la formación del resalto.

CONFIGURACIÓN DE PENDIENTES	INTERVALOS DE F <sub>1</sub>	CONFIGURACIÓN DE PENDIENTES	INTERVALOS DE F <sub>1</sub>
45° : 2°	14.5 – 16.7	15° : 1°	5.7 – 7.5
45° : 4°	11.5 – 16.2	15° : 2°	7.6 – 7.9
45° : 6°	9.30 – 15.2	15° : 3°	5.4 – 8.2
45° : 8°	8.10 – 15.2	15° : 4°	5.0 – 7.5
45° : 10°	6.20 – 11.0	15° : 6°	4.9 – 7.8
35° : 2°	10.1 – 11.9	10° : 1°	7.0 – 7.2
35° : 4°	7.51 – 9.5	10° : 2°	6.1 – 7.0
35° : 6°	6.50 – 12.7	10° : 3°	4.0 – 6.6
35° : 8°	5.40 – 10.8	10° : 4°	3.2 – 6.1
25° : 2°	8.10 – 11.0	5° : 1	4.4 – 4.9
25° : 4°	6.20 – 8.30	5° : 2	2.9 – 4.7
25° : 6°	5.00 – 6.80	5° : 3	2.4 – 4.0
25° : 8°	5.00 – 11.1		

Se puede observar que a medida que se disminuye q<sub>e</sub> se disminuye la magnitud F<sub>1</sub>, esto es, por ejemplo: para una pendiente θ e de 10° no es posible obtener F<sub>1</sub> tan altos como los de una pendiente qe de 45°.

#### 5.1. Factores k<sub>e</sub> y k<sub>s</sub>

Los factores k<sub>e</sub> y k<sub>s</sub> permiten realizar una corrección por la suposición del volumen de control y por impacto del chorro de fondo. Para cada uno de los resaltos en

estudio se hallan los valores k<sub>e</sub>, k<sub>s</sub> y se analiza la dependencia de éstos con otros parámetros como F<sub>1</sub>, q<sub>e</sub> y q<sub>s</sub>. Se llega a que estos no presentan alguna tendencia clara y con base al estudio estadístico realizado para k<sub>e</sub> y k<sub>s</sub> se encuentra que cumplen con la hipótesis de distribución normal y se puede hallar un valor promedio para k<sub>e</sub> y k<sub>s</sub>; estos valores se resumen en la tabla 2. Los valores k<sub>e</sub> y k<sub>s</sub> se calculan para las dos aproximaciones A<sub>1</sub> y A<sub>2</sub>. Además, se hallan valores de éstos coeficientes para dos intervalos de pendientes de entrada, pendientes fuertes (45°-25°) y pendientes suaves (25°-5°).

**TABLA 1.**  
Intervalos de F<sub>1</sub> obtenidos experimentalmente para cada configuración de pendiente.

$\theta_E$	Aproximación (A <sub>1</sub> )		Aproximación (A <sub>2</sub> )	
	$k_e$	$k_s$	$k_e$	$k_s$
45° - 25°	1.31 ± 0.12	0.9 ± 0.02	1.39 ± 0.13	0.94 ± 0.02
25° - 5°	0.96 ± 0.03	1.05 ± 0.02	1.27 ± 0.1	1.2 ± 0.03

## 5.2. Relaciones adimensionales

Para cada uno de los resaltos en estudio se hallan las relaciones adimensionales  $L_e/d_1$ ,  $L_s/d_1$  y  $d_2/d_1$  y se analiza la variación de éstos con  $F_1$ ,  $\theta_E$  y  $\theta_S$ .

Un parámetro de gran relevancia es la longitud de entrada ( $L_e$ ); se observa en todas las combinaciones de pendiente que a medida que aumenta  $F_1$ , la relación  $L_e/d_1$  también aumenta, bajo la misma consideración expuesta para  $L_e$ , otro de los grupos adimensionales importante, esta relacionado con la longitud de salida ( $L_s$ ): la relación  $L_s/d_1$  permitió establecer una zona de transición para el rango de pendientes entre (15°- 25°), ya que a partir de estas pendientes el comportamiento de  $F_1$  con respecto a  $L_s/d_1$  se invertía y pasaba de ser directamente proporcional para pendientes altas (45° - 25°), es decir, a medida que aumenta  $F_1$ , la relación  $L_s/d_1$  también aumenta; a ser inversamente proporcional para pendientes bajas (15° - 5°), es decir, a medida que aumenta  $F_1$ , la relación  $L_s/d_1$  disminuye. Con respecto a la relación de profundidades se observa en todos los casos que a medida que  $F_1$  aumenta, la relación de ( $d_2/d_1$ ) también aumenta.

Como resultado de esto se proponen regresiones donde las variables dependientes  $L_e/d_1$ ,  $L_s/d_1$  y  $d_2/d_1$  se expresan en función de las variables representativas  $F_1$ ,  $\tan\theta_E$  y  $\tan\theta_S$ . Con base a la linealidad de las curvas experimentales se escoge un modelo de regresión lineal, que permite obtener buenos ajustes y así minimizar el

**TABLA 2.**

Valores de  $k_e$  y  $k_s$  para aproximaciones A<sub>1</sub> y A<sub>2</sub>.

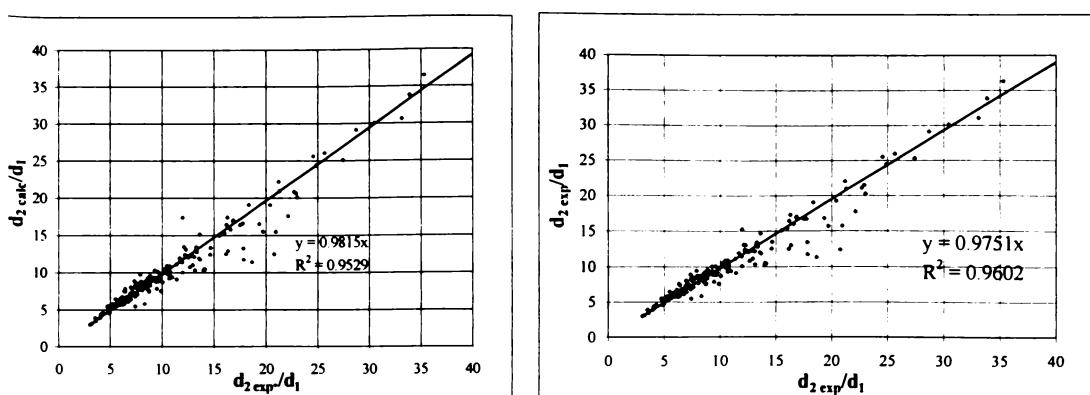
error. La ecuación lineal general es:

$$\hat{Y} = \hat{\alpha}X + \hat{\beta} + \varepsilon_i \quad (24)$$

Donde  $\varepsilon_i$  es el residuo y representa la componente del error aleatorio. (Jiménez, 2001). Para medir el grado de bondad del ajuste se utiliza el coeficiente de determinación  $R^2$  que indica la proporción de varianza explicada por la regresión lineal.

## 5.3. Aproximaciones A<sub>1</sub> y A<sub>2</sub>

Los resultados obtenidos al calcular la profundidad secuente mediante las ecuaciones A<sub>1</sub> y A<sub>2</sub>, se comparan con los resultados experimentales. En la Figura 7 se ilustra la variación de  $d_2/\text{calculado}/d_1$  Vs.  $d_2/\text{experimental}/d_1$  utilizando A<sub>1</sub> y A<sub>2</sub>. En ambos casos puede observarse que la línea de tendencia tiene una pendiente muy cercana a uno y un coeficiente de determinación alto; lo cual permite concluir que los valores de  $d_2$  calculados con la ecuación (15) son muy cercanos a los valores de  $d_2$  registrados en la fase experimental. La diferencia entre A<sub>1</sub> y A<sub>2</sub>, radica en la aproximación que se hace del volumen de entrada  $V_e$  y el volumen de salida  $V_s$ . Las expresiones para los volúmenes en el caso A<sub>1</sub>, son demasiado complicadas y por el contrario, el volumen asumido en A<sub>2</sub> conduce a expresiones mucho más resumidas de  $V_e$  y  $V_s$ .



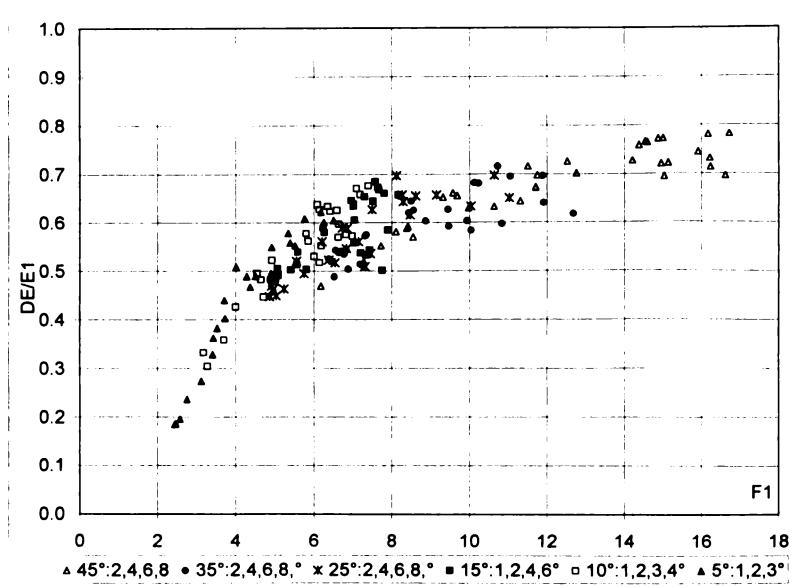
**FIGURA 7.**  
d<sub>2</sub> calculado./d<sub>1</sub> Vs. d<sub>2</sub> experimental./d<sub>1</sub>. (Aproximación A<sub>1</sub> Y A<sub>2</sub>)

La comparación de  $A_1$  y  $A_2$  para el cálculo de la profundidad  $d_2$  demuestra la importancia de los factores  $k_e$  y  $k_s$  planteados en la solución del modelo teórico. Las estadísticas de errores obtenidos al aplicar las aproximaciones  $A_1$  y  $A_2$  a los resaltos analizados son que 88% de los datos pronosticados con la Ecuación (15) están por debajo del 20% de error relativo; lo cual es considerado bajo en modelaciones de este tipo. El restante 12% está entre el 20% y 40% de error relativo, que de acuerdo a los resultados experimentales corresponde a pendientes de entrada fuertes.

#### 5.4. Disipación de energía

En la Figura 8 se presenta la disipación de energía de 176 resaltos estudiados. Puede observarse que a medida

que  $F_1$  aumenta la disipación de energía también lo hace. La mayoría de los resaltos presentan un porcentaje de disipación entre el 50 y 70 %. La máxima disipación que se alcanza es del 78.2 % y se presenta para un  $\theta_e = 45^\circ$  y  $\theta_s = 2^\circ$ , y la mínima disipación es del 18%, dada para  $\theta_e = 5^\circ$  y  $\theta_s = 3^\circ$ . De acuerdo a esto, la máxima disipación se presenta cuando se tiene una pendiente de entrada alta combinada con una pendiente adversa baja. Caso contrario se presenta para una combinación de pendientes bajas, donde la disipación de energía no es tan considerable. Esto está en concordancia con lo observado por Hager (1992) en resaltos tipo B (Kindsvater), quien asevera que mientras más cerca esté el resalto del fondo horizontal, mayor es la eficiencia. En este estudio, a menor pendiente adversa, el resalto tiende a ser más del tipo  $F_A$  alcanzando mayor eficiencia.



**FIGURA 8.**  
DE/E1 vs. F1 para  $\theta_e$  fijas y variando  $\theta_s$

La eficiencia como disipador de energía del resalto es mayor a medida que se tenga un mayor valor de  $F_1$ . Esto implica que a menor caudal mayor eficiencia. Cuando se habla de eficiencia, se hace referencia únicamente a la disipación de energía con relación a la energía inicial, y no se debe confundir con el remolino y su capacidad mezcladora, debido a que al aumentar el caudal la capacidad de mezcla también aumenta.

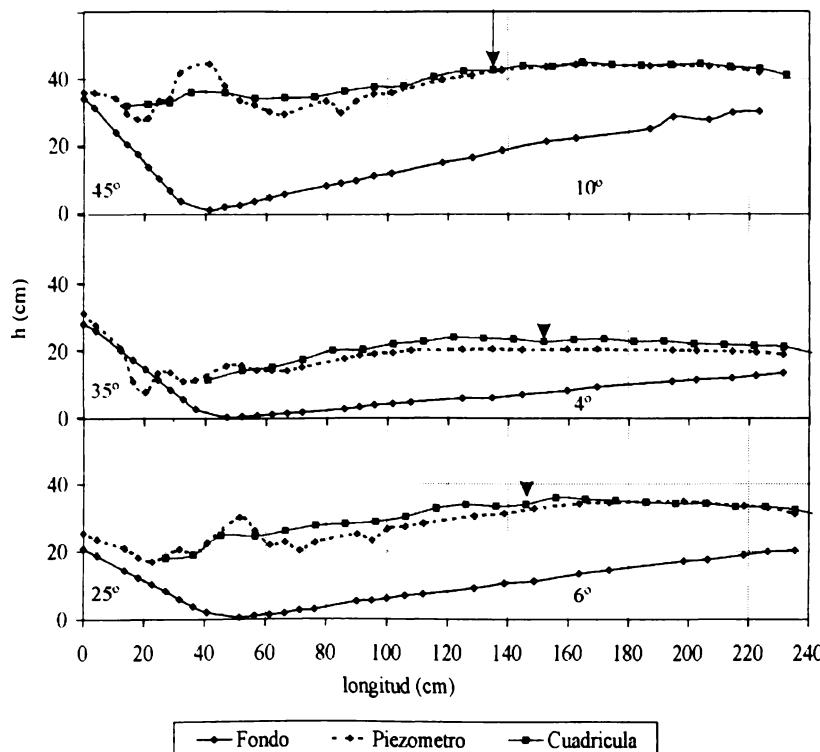
#### 5.5. Perfiles de flujo

El perfil de flujo de cada uno de los resaltos, registrado con los piezómetros, se comparó con el perfil observado

a través de la cuadrícula, la cual permitía tomar la profundidad normal al lecho de cada canal en intervalos de 0.1 m. Ambos perfiles se grafican con respecto a un eje horizontal, la profundidad medida en la cuadrícula se multiplica por  $\cos\theta_1$ , con el objetivo de corregir el efecto de la pendiente sobre la distribución de presión, así:

$$h = d \cos\theta \quad (25)$$

En la figura 9, se presentan algunos de estos perfiles, que pueden considerarse casos típicos.

**FIGURA 9.**

Comparación del perfil registrado con cuadrícula y el registrado con piezómetros para  $\theta_e$  de  $45^\circ$ ,  $35^\circ$  y  $25^\circ$

Los perfiles en la figura corresponden a pendientes altas, la flecha indica el punto donde se asume termina el resalto, tomado como el final del remolino o turbulencia y la línea que representa el fondo, es la lectura piezométrica en ausencia de flujo. Se observa cómo, a partir de este punto, los perfiles prácticamente son los mismos, indicando que la alta turbulencia provocada por el chorro de fondo se está disipando, y que las burbujas de aire emergen hacia la superficie; así, la suposición del final del remolino se puede considerar que fue bien identificada en la mayoría de los resaltos experimentados. También se nota cómo los piezómetros registran el impacto del chorro de fondo sobre la conjunción, situación que no ocurre con los registros de cuadrícula, debido a que éstos solo permiten tomar el valor de la profundidad media normal en esa zona. Esto muestra que el uso de piezómetros dentro de la fase experimental permite obtener valores de los coeficientes de corrección para resaltos donde el impacto del chorro de fondo sea notable, es decir, para el caso de pendiente a la entrada mayor de  $25^\circ$ .

## 6. CONCLUSIONES

Este trabajo tuvo por objetivo el estudio de resaltos hidráulicos en cambios de pendiente, y a diferencia de

otras investigaciones relacionadas con el tema, se hizo una variación de la pendiente de entrada y de la pendiente adversa para 25 combinaciones. La formación del flujo supercrítico se logra por medio de una descarga libre en el canal de aproximación. En los resaltos obtenidos no se forzó de ninguna manera su posición, y el único control aguas abajo fue la pendiente adversa, en la cual se desarrolló una descarga libre.

Con la experimentación se valida un nuevo modelo hidráulico para resaltos en cambios de pendiente, con el cual es posible calcular la profundidad  $d_2$  utilizando aproximaciones geométricas para el volumen de control, hallando valores de corrección experimentales por forma e impacto  $k_e$  y  $k_s$  (tabla 2), los cuales tienen valores constantes y diferentes para pendientes de entrada fuertes ( $45^\circ, 35^\circ, 25^\circ$ ) y otro para suaves ( $25^\circ, 15^\circ, 10^\circ, 5^\circ$ ) según este estudio.

Al aplicar dos volúmenes de control diferentes  $A_1$  y  $A_2$ , en la ecuación de momentum, se obtienen buenos resultados en la estimación de la profundidad  $d_2$ , pero por simplicidad en sus términos se recomienda la aproximación  $A_2$ . Además, la utilización de  $A_1$  y  $A_2$  justifica la importancia de utilizar los factores  $k_e$  y  $k_s$  y su relevancia en la ecuación 15, ya que un valor

inapropiado de éstos, se ve reflejado en un fuerte incremento de los errores. Se proponen regresiones experimentales para  $L_e/d_1$  y  $L_s/d_1$ , necesarias en la ecuación (15) y validas únicamente en este tipo de modelo. Los factores de corrección  $k_e$  y  $k_s$  encontrados son cercanos a la unidad, lo que permite concluir que la suposición del perfil del resalto como lineal es satisfactoria en el momento de idealizar el volumen de control.

El comportamiento de  $F_1$ , con respecto a la profundidad, discrepa con el propuesto para resaltos hidráulicos controlados en pendientes suaves o en fondo horizontal. En este estudio, el  $F_1$  se genera a partir de una descarga libre, para la cual se observa que a medida que la  $d_1$  aumenta el  $F_1$  disminuye, de aquí que a diferencia de otros modelos, los resaltos incipientes o débiles presenten un  $F_1$  alto y los resaltos fuertes (turbulentos y oscilantes) un  $F_1$  bajo. Además los intervalos de  $F_1$  presentados para cada configuración de pendientes son diferentes y esto hace complicado establecer una clasificación a partir de este parámetro

La eficiencia para la mayoría de los resaltos estudiados estuvo entre el 40% y el 70%. A medida que la pendiente adversa disminuye la eficiencia aumenta y a mayor pendiente de entrada, mejora la disipación.

Obtener un resalto formado completamente en la pendiente adversa y que permaneciera estable, no fue posible bajo las condiciones de este estudio, pues se requiere de un control aguas arriba y aguas abajo del resalto.

## 7. BIBLIOGRAFIA

- Argyropulos, A. 1962. General solution of the hydraulic jump in sloping channels. *Journal of the Hydraulics Division. Proc. ASCE*, 88(HY4): 61-75.
- Gunal, M. y Narayanan, R. 1996. Hydraulic jump in sloping channels. *Journal of hydraulic Engineering, ASCE*, 436-442.
- Haan, C.T. 1977. Statistical Methods in Hydrology. Ioaw State University Press. 376 p
- Hager, W. H. 1992. Energy dissipators and hydraulic jump. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Khader, A. y Rajagopal S. 1972. Hydraulic jump in adverse channel slope. *Irrigation and Power. India*. 29(1): 77-82.
- Kindsvater, C. 1944. The hydraulic jump in sloping channels. *Trans. ASCE*, 109: 1107-1120.
- Maccorcuodale, J.A. y Mohamed, M.S. 1994. Hydraulic jumps on adverse slopes channel. *Journal of Hydraulic Research, ASCE*, 32(1): 119-130.
- Ohtsu, I. y Yasuda, Y. 1991. Hydraulic jump in sloping channels. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 117(7): 905-921.
- Okada, A. y Aki, S. 1956. Experimental studies of hydraulic jump on reversed slope channel. Technical Laboratory Central Research Institute of Electric power Industry, Tokyo 5(6): 161-174.
- Pagliara, S. y Peruginelli, A. 2000. Limiting and sill-controlled adverse slope hydraulic jump. *Journal of the Hydraulic Engineering, ASCE*, 126(11): 847-851.
- Rajaratnam, N. 1967. The hydraulics jumps in sloping channels. *Irrigation and Power, ASCE*, I23(2)
- Rouse, H. 1938. Fluid Mechanics for hydraulic Engineers. Published by Mc Graw Hill Book Co. Inc, New york, N.Y, 301 p.
- Stevens, J.C. 1944. Discussion of the paper by Carl E. Kindsvater "Hydraulic jump in sloping channels. *Transactions, ASCE*, 109(2228): 1107-1120