

PRONÓSTICO DE PERCENTILES DE EXCEDENCIA DE AFLUENCIAS A EMBALSES HIDROELÉCTRICOS

Efraín Antonio Domínguez Calle

Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales - IDEAM

Bogotá - Colombia

edoc@ideam.gov.co

Recibido para evaluación: 24 de Julio de 2004 / Aceptación: 03 de Septiembre de 2004 / Recibida versión final: 13 de Septiembre de 2004

RESUMEN

En la gestión de embalses hidroeléctricos es necesario proveer el funcionamiento del sistema en condiciones de altos y bajos aportes de agua. Estas dos condiciones extremas se constituyen en las fuentes de falla para la producción de energía, las afluencias máximas amenazan la existencia de los embalses, mientras que las mínimas los afectan funcionalmente. El análisis de caudales máximos es clave para el diseño de la presa, y define en un principio sus características físicas, de forma y geometría. A su vez el conocimiento de los caudales mínimos prima en la optimización de las reglas de operación del sistema. Las nociones de caudales máximos y mínimos están asociadas en el imaginario común con los nominativos de abundancia y escasez pero en forma objetiva la comunidad científica las expresa en términos de probabilidades. La teoría de toma de decisiones dispone de procedimientos que utilizan la probabilidad de los factores limitantes como elemento fundamental en la formulación de las estrategias y reglas de operación, por ello la información de caudales extremos está siempre acompañada de sus correspondientes valores de probabilidad. Debido a que la operación de los embalses transcurre en el tiempo y a que las fallas de funcionamiento en condiciones de bajos aportes se presenta no con la aparición aislada de un evento mínimo sino con la perduración del mismo en un intervalo continuo de tiempo el análisis probabilístico de caudales mínimos debe ser realizado en términos de probabilidades condicionadas, lo que obliga a tomar en cuenta la física del proceso lluvia-escorrentía en la evaluación de los percentiles de excedencia de los caudales. Esto se debe a la autocorrelación y señales de no estacionariedad que presentan los caudales diarios y mensuales. En este artículo se presenta una metodología de evaluación y pronóstico de percentiles de excedencia de caudales basada en la teoría de procesos estocásticos no estacionarios y que aplica la ecuación de Fokker-Plank-Kolmogorov para la simulación de la evolución, en el tiempo, de la curva de densidad probabilística de las afluencias.

PALABRAS CLAVES: Hidrología, Afluentes, Ecuación de Fokker-Plank-Kolmogorov

ABSTRACT

In the management of hidropower reservoirs it is necessary to define the system operation in low and high flow conditions. These two extreme flow conditions constitute the sources of energy production failure. The high flows threaten the reservoir existence and the low flows its functionality. The analysis of low flows is a main issue in dam design and to define its initial physical, and form and geometric characteristics. The knowledge of low flows is the main factor in the system operational rule optimization. System failure in low flow conditions are due not with an isolated low condition but with the duration of that condition during a time interval, the probabilistic analysis of low flows has then to be represented by conditional probabilities. This forces to take into account the physics of the rainfall - runoff process in the evaluation of the stream flow exceedance quantiles. This is due to the autocorrelation and non stationarity signals that are present in daily and monthly stream flows. In this paper a evaluation and prediction methodology of stream flow exceedence quantiles is presented based in the non stationary stochastic theory that applies the Fokker-Plank-Kolmogorov equations for the simulation of the time evolution of the stream flows probability densities.

KEY WORDS: Hidrology, Streamflows, Quantiles, Equations of Fokker-Plank-Kolmogorov.

1. INTRODUCCIÓN

Gracias a la alta variabilidad temporal del régimen hidrológico de las corrientes que aportan agua a los embalses hidroeléctricos, la gestión de los mismos transcurre en condiciones de riesgo o incertidumbre. En este caso la formulación de reglas de operación óptimas va acompañada del uso de procedimientos estocásticos para la toma de decisiones (Taha 1998), los cuales exigen la descripción probabilística de las factores limitantes de la generación. En la optimización de la generación garantizada de energía, la definición de los escenarios críticos de afluencias mínimas juega un papel esencial. Cuando existen señales de no estacionariedad en el régimen de las afluencias y/o se cuenta con niveles de autocorrelación estadísticamente significativos estas afluencias y sus probabilidades de excedencia no deben ser descritas en el marco de probabilidades calculadas con base en la información precedente a la toma de decisiones (probabilidades apriori) sino utilizando probabilidades bayesianas o «aposteriori» que son

aquellas que caracterizan al proceso en un marco ulterior al momento de la toma de decisiones (Bierman, Bonini & Hausman 1996). Este tipo de probabilidades condicionadas no se evalúan a través de las técnicas estadísticas habituales que utilizan las nociones de variables aleatorias independientes como objeto central de estudio, su cálculo se basa en la teoría de funciones aleatorias y procesos estocásticos no estacionarios. En realidad la noción de proceso estocástico o función aleatoria generaliza el concepto de variable aleatoria, el corte de un proceso estocástico en un momento de tiempo dado $t = t_0$ arroja como resultado una variable aleatoria. Expresado de otra forma, la variable aleatoria constituye el argumento del proceso estocástico. Este a su vez representa un proceso que aunque transcurra en condiciones de entorno similares sus realizaciones difieren entre sí. Un ejemplo de proceso estocástico está constituido por los hidrogramas anuales de afluencias, $Q(t)$, los cuales presentan distinta forma cada año, sin importar que la órbita de la esfera terrestre con respecto al sol no cambie significativamente de año a año (Figura 1).

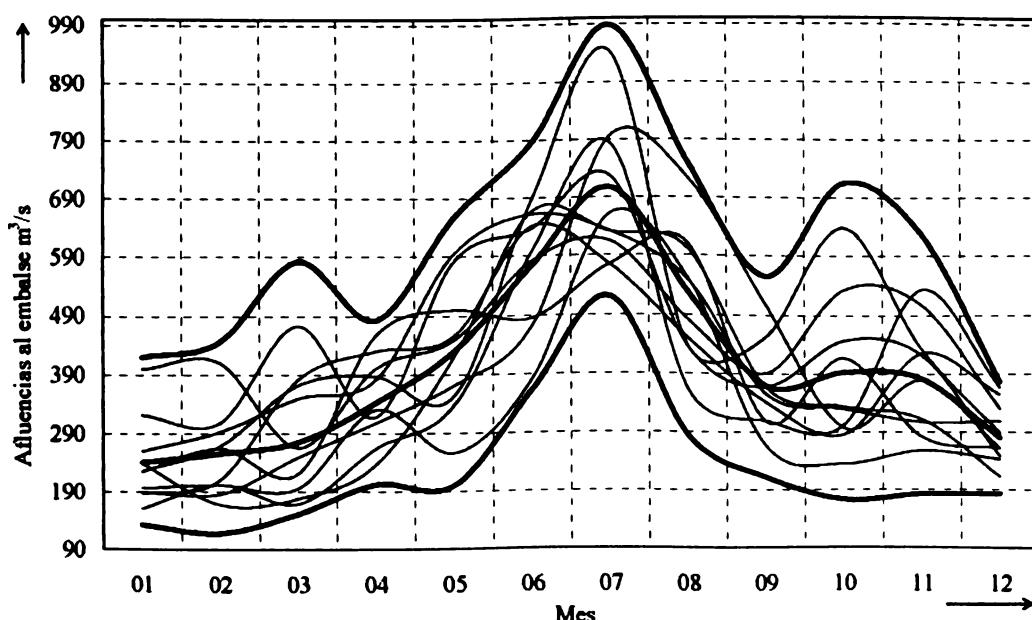


FIGURA 1. Realizaciones de las afluencias al embalse de Betania

Para representar una variable aleatoria basta con conocer la curva de densidad probabilística (CDP) que la describe, por ello para saber lo que sucede en un instante de tiempo con un proceso como el presentado en la Figura 1 basta con caracterizar la variable de estado, en este caso la afluencia $Q(t)$ cuando $t = t_0$, en términos de su densidad probabilística $p(Q)$. Si las ordenadas del proceso

estocástico son independientes entre sí entonces el proceso se denomina de ruido blanco y puede ser descrito por las CDP unidimensionales de todas sus ordenadas

$$p(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = \prod_{i=1}^n p(Q_i) \quad (1)$$

En la naturaleza no existen procesos de ruido blanco, gracias a la inercia de los procesos naturales, las ordenadas de los mismos se encuentran correlacionadas, esto significa que no son independientes y por ende no pueden ser descritos por la Ecuación (1). Por lo general el estado de las afluencias en el futuro, depende del estado en que se encuentren en el presente. Esto quiere decir que la CDP de las afluencias en el futuro depende de la CDP que las caracteriza en el presente y de ningún modo de las CDP observadas en el pasado. Matemáticamente, estos se expresa a través de las CDP condicionadas de forma que:

$$p(Q_k/Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-i}) = p(Q_k/Q_{k-i}) \quad (2)$$

Este tipo de procesos son denominados «markovianos» - exactamente «makovianos simples»- en honor al matemático ruso A.A. Markov.

Si el proceso es estacionario, las CDP condicionadas pueden ser definidas con base en las realizaciones del proceso que fueron observadas en el pasado (Campos, 2001; Box y Jenkins, 1974). De lo contrario el proceso se estudia como compuesto por dos elementos: a) una componente determinista y b) una aleatoria con ordenadas independientes δ -correlacionadas. En la Figura 2 se presenta esta descomposición. A la componente determinista se le asigna un operador matemático que la simule adecuadamente. Usualmente este operador se obtiene a partir de preceptos físicos concernientes al proceso en estudio. Por su parte, los ruidos blancos pueden ser descritos a través, de la Ecuación 1 y por medio de sus intensidades.

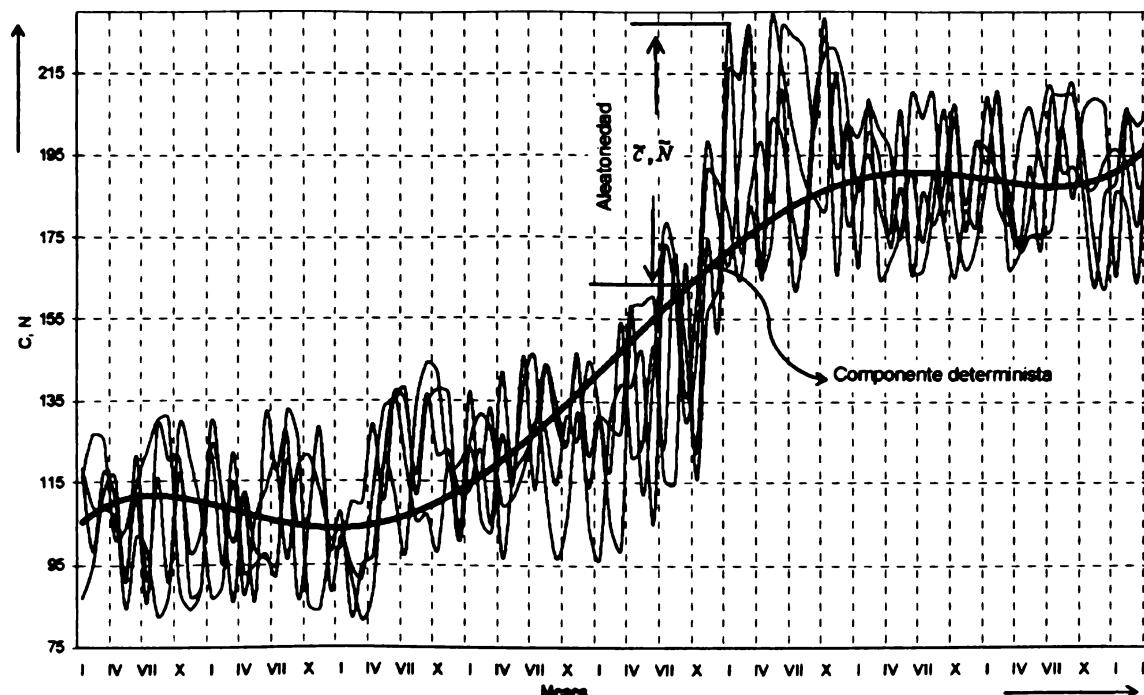


FIGURA 2. Descomposición de un proceso estocástico

Para el caso de las afluencias, el componente determinista se establece a partir del modelo de flujo bidimensional de Saint Venant y la componente aleatoria resulta de la introducción de incertidumbre en la definición de las precipitaciones y en los parámetros del modelo lluvia-escorrentía.

2. NUCLEO DETERMINISTA PARA EL PRONÓSTICO DE AFLUENCIAS

La idea principal para la simulación de la evolución de las CDP de las afluencias consiste en que las perturbaciones ocasionadas por los cambios en las precipitaciones y en los parámetros inherentes al área aferente que produce la afluencia perturban el estado de

la CDP, haciéndola evolucionar a una nueva condición. Para ello es necesario que la generalización estocástica se realice a partir de una relación causa - efecto que puede ser aproximada por un operador matemático conocido. En el caso del proceso lluvia escorrentía se parte de la ecuación bidimensional de flujo inestable de Saint Venant (Kovalenko, 1993; DHI Water and Environment, 2000; Domínguez, 2000), en la forma:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = \dot{X} \quad (3)$$

$$q_x = Ch^{\frac{3}{2}} \frac{i_x}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}} \quad (4)$$

$$q_y = Ch^{\frac{3}{2}} \frac{i_y}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}} \quad (5)$$

Donde:

- h - lámina de agua;
- q_x - caudal elemental en la dirección x;
- q_y - caudal elemental en la dirección y;
- \dot{X} - Intensidad de las precipitaciones;
- C - coeficiente de Chezy;
- i_x - pendiente del terreno en la dirección x;
- i_y - pendiente del terreno en la dirección y.

Integrando la Ecuación (3) en las direcciones x y y se puede deducir el siguiente operador matemático de primer orden:

$$\tau \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{1}{k} Q(t) = \dot{X}(t) \quad (6)$$

En el cual:

- τ - Tiempo de relajamiento - T;
- Q - afluencia - L^3/T ;
- t - coordenada temporal - T;
- k - coeficiente de escorrentía
- X - precipitaciones - L^3/T .

La ecuación (1) se soluciona utilizando el siguiente esquema implícito:

$$\frac{\tau}{\Delta t} = (Q'^{+\Delta t} - Q') + \frac{Q'^{+\Delta t}}{k} = X'^{+\Delta t} \quad (7)$$

El esquema (7) se parametriza con base en la información

histórica utilizando el método del gradiente generalizado. Esta técnica de optimización no lineal se inicializa asumiendo como primera aproximación de la afluencia $Q'^{+\Delta t}$ el valor:

$$Q'^{+\Delta t*} = \frac{X'^{+\Delta t}}{2} \quad (8)$$

Como índices de desempeño del operador matemático (7) se aplican los criterios S/σ_4 (ANNONOB, KANI/IHMH y KOWIAPOB, 1974) y Bayesiano de información «BIS» (NOAA/NWS, 1999). Para el periodo de parametrización estos criterios de desempeño deben cumplir con las siguientes condiciones:

$$S/\sigma_4 \leq 0,80 \quad (9)$$

$$BIS \geq 0,80 \quad (10)$$

La comparación de la rigurosidad de estos dos criterios demostró que trabajan con un nivel de eficiencia muy cercano. El criterio S/σ_4 cuenta con más de 50 años de estar siendo aplicado en el Centro Hidrometeorológico de Rusia, por ello y debido a su sencillez de cálculo fue seleccionado como criterio de desempeño en este trabajo. Si se simboliza a las afluencias reales como Q_i^r y a las modeladas con Q_i^m , entonces es posible simbolizar los incrementos de las afluencias al embalse como:

$$\Delta_i = Q_i^r + Q_{i-1}^r \quad (11)$$

El error medio se define como:

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i \quad (12)$$

Aquí n - representa el número de pronósticos. A su vez la desviación estándar de los incrementos de la afluencia σ_4 se determina con la ecuación:

$$\sigma_4 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{n-1}} \quad (13)$$

La desviación estándar de los errores de los pronósticos se establece de la siguiente forma:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_i^r - Q_i^m)^2}{n-1}} \quad (14)$$

Observando las ecuaciones (11), (12), (13) y (14) se deduce que el criterio S/σ_4 relaciona la desviación estándar de los incrementos de la magnitud pronosticada con la desviación de los errores de pronóstico, exigiendo que la variabilidad de los errores cometidos en los pronósticos no supere la variabilidad de los incrementos de las afluencias. En conclusión, la relación S/σ_4 mide la habilidad que tiene la metodología de pronóstico para superar al «pronóstico por inercia», de ningún modo describe el nivel de error que se pueda cometer en los pronósticos. Por esto, adicionalmente se evalúa el porcentaje mínimo de pronósticos acertados, el cual debe ser igual o mayor al 80% de todos los pronósticos emitidos. Para este efecto el error máximo Δ_{\max} permitido para cada pronóstico se puede definir como:

$$\Delta_{\max} = 0,674\sigma_4$$

Este Δ_{\max} fue propuesto por el Centro Hidrometeorológico de Rusia (CHR), pero el Δ_{\max} también puede ser dictado por las necesidades del sector usuario que requiere de los pronósticos hidrológicos. De este modo, el Subcomité Hidrológico y de Plantas Eléctricas (SHPE) establece que el error máximo permitido para los pronósticos de afluencias mensuales no debe superar el 30% (ISA, 2001).

3. INTRODUCCIÓN DE INCERTIDUMBRE, ECUACIÓN DE FOKKER-PLANK-KOLMOGOROV

Retomando el objetivo principal, el pronóstico de la curva de densidad probabilística de las afluencias, es necesario resaltar que aún en condiciones semejantes las cuencas pueden responder en forma disímil a un mismo impulso de precipitaciones. Esto se debe a la forma imprecisa en que trabajan los sistemas de monitoreo, o tal vez sea una cualidad intrínseca de los procesos naturales. Sin intentar discernir sobre las cualidades ontológicas de la noción de probabilidades, utilizando sólo sus indiscutibles propiedades epistemológicas (Kolmogorov, 1930/31), es posible introducir incertidumbre en el operador (6) si se asume que: $-l/k\tau \equiv c(t)$ y $X/\tau \equiv N(t)$. En donde $c(t) = \bar{c}(t) + \tilde{c}(t)$ y $N(t) = N(t) + \tilde{N}(t)$ son funciones aleatorias con componentes de ruido blanco $\tilde{c}(t)$ y $\tilde{N}(t)$ «δ-correlacionadas» (Figura 2) caracterizadas por las intensidades G_c , G_N , $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$. De esta manera la ecuación (6) se puede llevara la forma de la ecuación de Fokker-Plank-Kolmogorov (FPK):

$$\frac{\delta p(t,Q)}{\delta t} + \frac{\delta [A(t,Q)p(t,Q)]}{\delta Q} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2 [B(t,Q)p(t,Q)]}{\delta Q^2} = 0 \quad (15)$$

Donde $A(t,Q)$ y $B(t,Q)$ son funciones deterministas que definen las particularidades del proceso markoviano en estudio. $p(t,Q)$ representa la curva de densidad probabilística de las afluencias mensuales. La ecuación (15) describe la evolución en el tiempo de la densidad de probabilidades que caracteriza a un proceso markoviano. Para resolver esta ecuación se aplica la siguiente aproximación numérica:

$$\begin{aligned} \frac{p_j^{i+1} - p_j^i}{\Delta t} &= - \left\{ \sigma \left(\frac{\varphi_R(A_{j-1}^{i+1}p_{j+1}^{i+1} - A_j^{i+1}p_j^{i+1})}{\Delta Q} + \frac{\varphi_L(A_j^{i+1}p_j^{i+1} - A_{j-1}^{i+1}p_{j-1}^{i+1})}{\Delta Q} \right) + (1-\sigma) \left(\frac{\varphi_R(A_{j-1}^i p_{j+1}^i - A_j^i p_j^i)}{\Delta Q} + \frac{\varphi_L(A_j^i p_j^i - A_{j-1}^i p_{j-1}^i)}{\Delta Q} \right) \right\} + \\ &\quad \left\{ \sigma \left[\frac{1}{2} \frac{(B_{j+1}^{i+1}p_{j+1}^{i+1} - 2B_j^{i+1}p_j^{i+1} + B_{j-1}^{i+1}p_{j-1}^{i+1})}{\Delta Q^2} \right] + (1-\sigma) \left[\frac{1}{2} \frac{(B_{j+1}^i p_{j+1}^i - 2B_j^i p_j^i + B_{j-1}^i p_{j-1}^i)}{\Delta Q^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

Donde los coeficientes φ_R , φ_L son los coeficientes de diferencias direccionales y σ el coeficiente de peso de las capas de tiempo. Cuando $\sigma = 1$ la ecuación (16) se convierte en un esquema totalmente implícito y si $\sigma = 0$ en uno explícito, en cuyo caso es necesario cumplir la condición de Courant-Frederich-Levi de tal modo qué:

$$\max(B(\tau, Q)) \frac{\Delta t}{\Delta Q^2} < \frac{1}{2} \quad (17)$$

La ecuación FPK expresa la ley de conservación de la densidad de distribución probabilística. Durante la evolución del proceso estocástico la densidad de distribución probabilística se transforma en el tiempo y se traslada en el espacio de la ordenada Q . Si no existe absorción ni renovación del proceso, la cantidad de probabilidad debe mantenerse constante. Si la ordenada Q del proceso se extiende desde la frontera α hasta la frontera β , para cumplir la condición de normalización, es necesario exigir que en los puntos fronterizos $\{\alpha, \beta\}$ se cumpla la siguiente igualdad:

$$\left(A(\tau, Q)p(t, Q) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [B(t, Q)p(t, Q)]}{\partial Q^2} \right)_{Q=\alpha=\beta} = 0 \quad (18)$$

Esta condición evita el flujo de probabilidades por los puntos fronterizos. Por ello la ecuación (18) es llamada condición de frontera reflejiva. Si por el contrario en los nudos fronterizos se cumple la igualdad:

$$p(\tau, Q)|_{Q=\alpha=\beta} = 0 \quad (19)$$

significa que en los puntos fronterizos existe «fuga de probabilidades», es decir no se cumple la condición de normalización. Al tipo de condiciones de frontera representados por la ecuación (19) se les denomina condiciones de frontera absorbente.

Dependiendo de la clase de problema que se esté resolviendo se recomienda uno u otro tipo de condición de fronteras. Incluso en algunos casos es pertinente la combinación de distintos tipos de condiciones de frontera para el mismo problema. Los tipos de condiciones de frontera no se limitan a los aquí presentados. Otras variantes de condiciones de frontera se pueden consultar en Gardiner (1985).

Para terminar de formalizar el problema propuesto es necesario definir las condiciones iniciales. Estas

condiciones se establecen de acuerdo a la naturaleza del problema en estudio. En general pueden ser derivadas de la teoría de errores o de las series de tiempo del proceso lluvia-escorrentía. Para validar el funcionamiento de la ecuación de FPK, en el presente trabajo, las condiciones iniciales fueron definidas a través de las series de tiempo, utilizando los datos de caudales medios diarios. Para ello inicialmente, bajo distintos niveles de significancia, aplicando el criterio de incrementos y disminuciones (Bendat y Pearsol, 1986), se evaluó el porcentaje de meses de la serie histórica para los que no se rechaza la hipótesis de independencia de los caudales diarios. Este análisis demostró que en el 93% de los casos, con un nivel de significancia del 5%, la hipótesis de independencia de los caudales diarios no se rechaza. Esto es suficiente, para con base en los caudales diarios construir las curvas empíricas de distribución probabilística de cada mes. También sería posible tomar como condiciones iniciales las CDP de cada mes, construidas con base en la agrupación de los valores medios de los mismos.

A las CDP empíricas se les ajustaron curvas teóricas del tipo gama de tres parámetros, representadas por la siguiente forma analítica:

$$p(Q, \lambda, \alpha) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} Q^{\alpha-1} e^{-\lambda Q} \quad (20)$$

Donde:

- λ - Parámetro de escala
- α - Parámetro de forma

Los parámetros de la ecuación (20) también se determinaron por métodos de optimización no lineal (gradiente conjugado y reducido), se utilizó la minimización de la suma de errores cuadráticos como función objetivo.

4. APLICACIÓN PRÁCTICA A CAUDALES MÍNIMOS, PRONÓSTICO DE PERCENTILES DE EXCEDENCIA DE LAS AFLUENCIAS AL EMBALSE DE BETANIA

Como objeto de evaluación piloto para la implementación del modelo de pronóstico de las CDP fue escogido el embalse de Betania. En calidad de puntos de control fueron seleccionadas las estaciones hidrológicas Paicol (2105706) y Puente Balseadero (2104701), ubicadas en

los cauces del río Páez y Magdalena. El promedio anual multianual de la afluencia fijada por estas dos estaciones alcanza un valor de 400 m³/s, lo que significa cerca del 93% de la afluencia total al embalse de Betania.

En el área aferente al embalse de Betania se cuenta con redes de monitoreo hidrológico y meteorológico bastante densas, sin embargo la matriz de correlación cruzada entre las series de tiempo de precipitaciones y caudales muestra que no todas las estaciones tienen un buen nivel de correlación con las estaciones hidrológicas que fueron elegidas como puntos de control. En general los coeficientes de correlación lineal no superan el valor de 0.70. La práctica demuestra que para obtener valores de S/σ₄ menores que 0.80 se requieren coeficientes de determinación mayores a 0.75. Por otro lado se detectó que las estaciones de precipitación con los códigos: 2101013, 2101014, 2103006, 2103502, 2105031, 2601005, 2601007 y 4401010 son los mejores predictores para las afluencias totales registradas en las estaciones hidrológicas 2401701 y 2501706.

La ecuación de FPK permite estudiar la evolución temporal de la CDP de las afluencias. Esto quiere decir que a disposición se encuentran todos los percentiles de la función de distribución ($p(Q < Q_i)$). Por ende este modelo permite pronosticar los percentiles de las afluencias, máximas, medias y mínimas. Para el pronóstico de las CDP es necesario definir las precipitaciones pronóstico que harán evolucionar a esta curva en el tiempo. En los problemas de optimización se pueden utilizar las series de precipitaciones obtenidas de los registros históricos. Para el pronóstico operativo (a nivel mensual) se pueden aplicar las siguientes opciones

de precipitación pronóstico $X^{\Delta t+1}$:

$$X^{\Delta t+1} = X_T^{\Delta t+1} \quad (21)$$

$$X^{\Delta t+1} = 0.5(X_T^{\Delta t} + X_T^{\Delta t+1}) \quad (22)$$

$$X^{\Delta t+1} = 0.25X_T^{\Delta t} + 0.25X_T^{\Delta t+1} + 0.5X_T^{\Delta t+1} \quad (23)$$

$$X^{\Delta t+1} = f\left(X_T^{\Delta t+1}, \frac{dX_T^{\Delta t+1}}{dt}, \frac{d^2X_T^{\Delta t+1}}{dt^2}\right) \quad (24)$$

$$X^{\Delta t+1} = f(X_T^{\Delta t+1}, X_T^{\Delta t-1}, X_T^{\Delta t}) \quad (25)$$

En estas ecuaciones:

$$X_T^{\Delta t+1} = \sum_{i=1..n} X_i^{\Delta t} \quad (26)$$

Además el símbolo \bar{X} representa al valor promedio mensual multianual correspondiente al mes indicado por el subíndice temporal j .

Para las distintas opciones de precipitación pronóstico, Ecuaciones (21) a la (25), se evaluó el desempeño del operador matemático (6). Los resultados consignados en la Tabla 1 muestran que las variantes más eficaces, descartando el uso de las precipitaciones reales, se definen utilizando las Ecuaciones (21) y (24), para las cuales el porcentaje de pronósticos acertados supera el 76% para el Δ_{max} del CHR y el 82% para el Δ_{max} establecido por el SHPE. Una comparación visual de resultados es ofrecida en la Figura 3. En esta se presentan las afluencias modeladas versus reales para los cálculos con las precipitaciones pronóstico definidas por la ecuación (25).

TABLA 1. Indicadores de desempeño para el modelo dinámico bajo diferentes variantes de $X^{\Delta t+1}$

Precipitaciones $X^{\Delta t+1}$	Método de parametrización					
	Iteraciones de Newton		Gradiente conjugado			
	$K_j = f(X_j, Q_j, Q_{j-1})$	$k = \text{const}$	S/σ ₄	% aciertos CHR	% aciertos SHPE	% aciertos CHR
Precipitación real	0.42	94	0.42	94	98	98
$X^{\Delta t+1} = X_T^{\Delta t+1}$	0.63	76	0.63	72	79	79
$X^{\Delta t+1} = 0.5(X_T^{\Delta t} + X_T^{\Delta t+1})$	0.67	72	0.68	74	79	79
$X^{\Delta t+1} = 0.25X_T^{\Delta t} + 0.25X_T^{\Delta t+1} + 0.5X_T^{\Delta t+1}$	0.76	71	0.73	74	76	76
$X^{\Delta t+1} = f\left(X_T^{\Delta t+1}, \frac{dX_T^{\Delta t+1}}{dt}, \frac{d^2X_T^{\Delta t+1}}{dt^2}\right)$	0.68	72	0.62	73	80	80
$X^{\Delta t+1} = f(X_T^{\Delta t+1}, X_T^{\Delta t-1}, X_T^{\Delta t})$	0.63	76	0.62	72	80	80

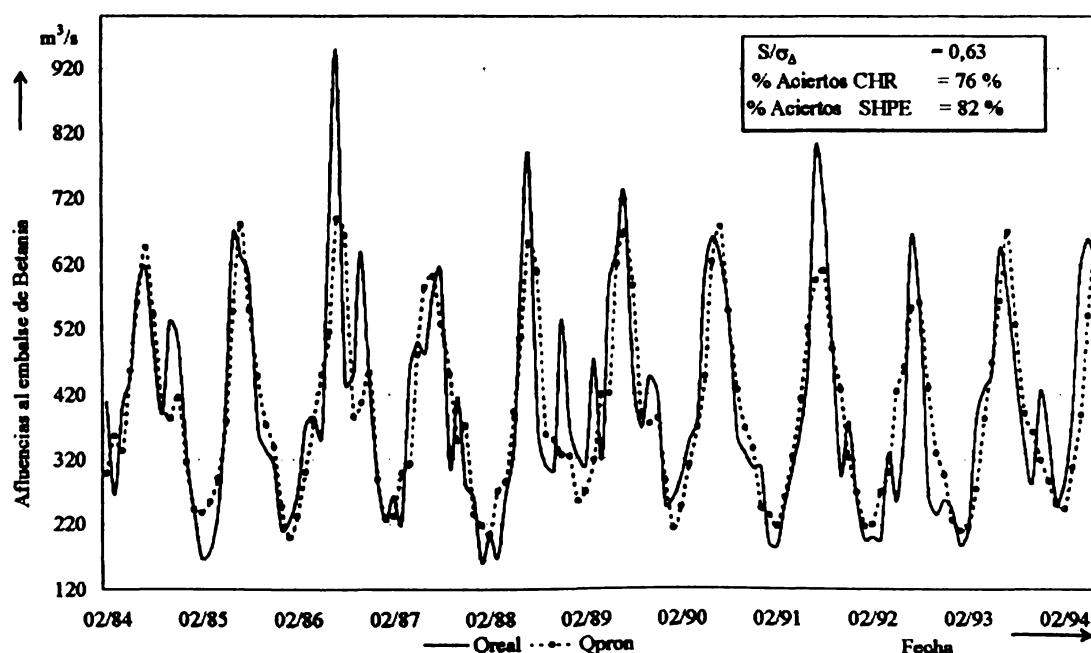


FIGURA 3. Afluencias reales versus modeladas (núcleo determinístico)

Antes de proseguir con el pronóstico mismo de las CDP de las afluencias a Betania, más concretamente de los percentiles de excedencia de caudales mínimos ($Q_{95\%}$) es necesario aclarar que los criterios de desempeño para la simulación o pronóstico de las CDP de las afluencias consisten en la verificación de la hipótesis estadística sobre la concordancia entre la CDP simulada y la observada. El rechazo o aceptación de esta hipótesis se realiza mediante la aplicación de los criterios de Smirnov (w^2), Kolmogorov (λ) y Pearson (x^2) que se suelen aplicar con niveles de significancia del 1, 5 y 10% (Bendat y Piersol, 1986).

Para el caso práctico de Betania, las condiciones iniciales se establecieron ajustando la ecuación (20) a la función

de distribución empírica de las afluencias diarias de cada mes (Figura 4). La parametrización del modelo se desarrolló para el periodo de 1970 a 2000. En un inicio la serie se dividió en dos partes, con la primera mitad (1970-1985) se determinaron los parámetros de la ecuación (7) y de la ecuación de FPK. Con la segunda mitad (1986-2000) se realizó la validación de los parámetros identificados. Para ello se evaluó el porcentaje de veces en que la hipótesis nula sobre la concordancia de las CDP observadas y simuladas no se rechazó. Los datos de la Tabla 2 muestran que los resultados son aceptables ya que para los criterios de Smirnov y Pearson se obtuvo más del 90% de aciertos.

TABLA 2. Evaluación del desempeño del pronóstico de la CDP de las afluencias a Betania

Técnica de definición de las precipitaciones pronóstico y de los parámetros de la ecuación FPK	Porcentaje de pronósticos acertados, %											
	Criterio de Smirnov w^2			Criterio de Kolmogorov λ			Criterio de Pearson x^2			Nivel de significancia α , %		
	1	5	10	1	5	10	1	5	10		1	5
X, k, G_R Reales	99	99	99	99	99	99	99	99	99			
$X^{Δt+1} = X_T^{Δt+1}$	93	71	68	39	36	36	99	99	99			
$k, G_R \text{ y } G_{on}$ Optimizados												

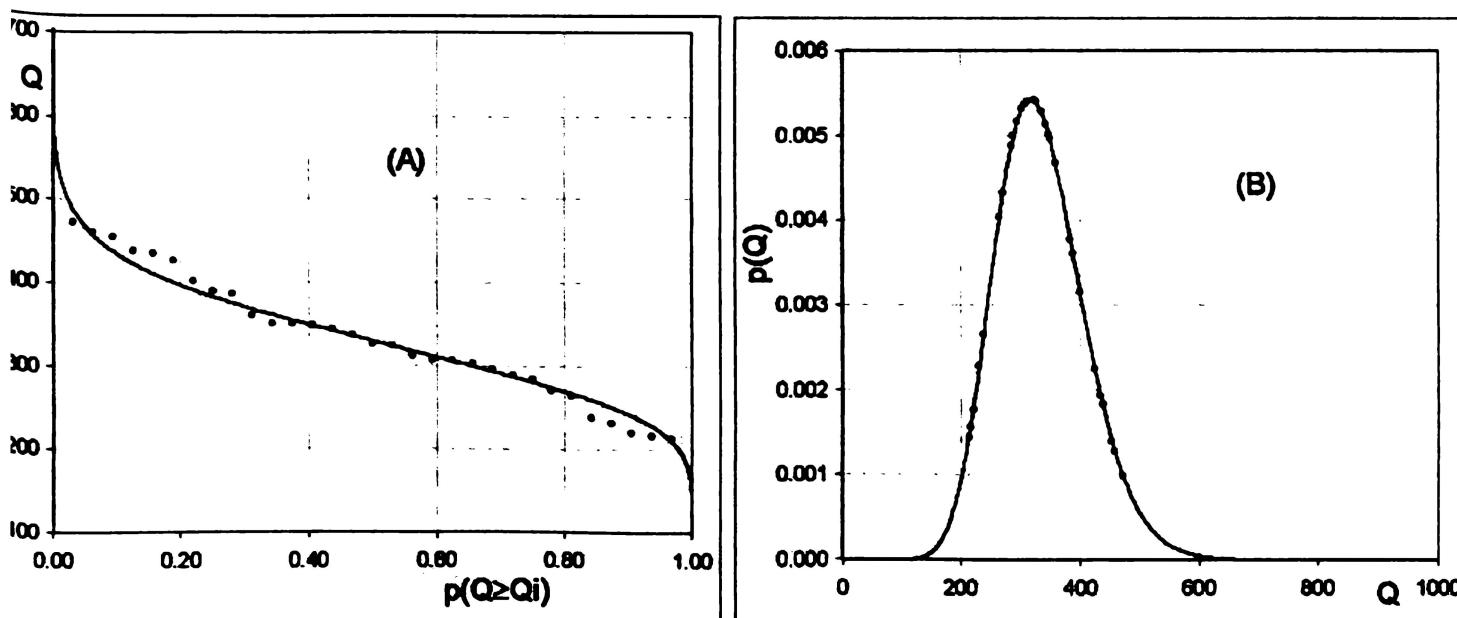


FIGURA 4. Ejemplo de condiciones iniciales para la ecuación de Fokker - Plank - Kolmogorov para octubre de 1985:
A) Función de distribución de las afluencias; B) Curva de densidad probabilística de las afluencias

El alto nivel de rechazo de la hipótesis nula por el criterio de Kolmogorov se debe a la alta sensibilidad de este parámetro a los errores de traslación de la CDP. Este tipo de errores estará presente en toda simulación ya que es imposible tener precipitaciones pronóstico infinitamente precisas. Por otra parte es ampliamente reconocido que la alta potencia del criterio de Kolmogorov lo induce a cometer errores de primer grado, rechazar la hipótesis nula cuando esta es verdadera (Haan, 2002). Al tomar un grueso promedio, sumando los resultados de todos los criterios, incluyendo los distintos niveles de significancia, se obtiene que en general el porcentaje promedio de aciertos supera el 70% de casos en que la hipótesis nula es aceptada. Estos resultados demuestran que la ecuación de FPK ha sido parametrizada adecuadamente y que está apropiadamente entrenada para simular la evolución de las CDP de las afluencias. Para el caso del pronóstico operativo sólo es necesario redefinir las precipitaciones pronóstico cada vez que se emita una nueva predicción. La optimización del funcionamiento de embalses hidroeléctricos es necesario tomar las precipitaciones del periodo de tiempo requerido y realizar la simulación para obtener las afluencias con el porcentaje de excedencia deseado.

Un ejemplo característico de ejercicios de optimización consiste en la simulación de la producción de energía en condiciones de hidrologías críticas. Este caso requiere

de las afluencias críticas mínimas, en calidad de las cuales usualmente es utilizada una serie sintética compuesta por los valores mínimos históricos de cada mes. Sin comentar el inconveniente que esta alternativa presenta en relación con la carencia de correspondencia física entre esta serie y los procesos que ocurren en la cuenca se puede señalar que goza de una gran sencillez, sin embargo cuenta con las siguientes deficiencias: 1) se aplica la misma serie independientemente de los niveles de humedad que estén gobernando los procesos de escurrimiento en la cuenca, 2) no puede tener en cuenta la intensificación de procesos antrópicos en la cuenca y 3) Si la serie de caudales registra solo un periodo de alta humedad, los mínimos seleccionados para construir la serie estarán sobreestimados o viceversa si el periodo observado corresponde a una fase de baja humedad en la serie de tiempo. La ecuación de FPK solventa estas deficiencias, para corroborarlo se simuló para Betania una serie compuesta por las afluencias del 95% de probabilidad de excedencia. Para obtener esta serie se utilizaron los parámetros obtenidos en la calibración de la ecuación de FPK con toda la serie histórica. Para simular estas afluencias mínimas ($Q_{95\%}$) se utilizaron las precipitaciones extraídas de periodos de baja y alta humedad. Para Betania estas precipitaciones se registraron en los años de 1985 y 1999, respectivamente. Los valores de las precipitaciones mensuales de estos años están consignados en la Tabla 3. Las cifras presentadas en esta

Tabla reflejan la suma de las precipitaciones totales mensuales de las ocho estaciones de precipitación seleccionadas anteriormente.

TABLA 3. Precipitaciones (mm) registradas en años de baja y alta humedad en la el área aferente al Embalse de Betania

Año	Meses											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	X	X	XI	XII
1985	843	449	794	1117	1875	2024	2049	2237	1187	1112	1079	661
1999	1508	1515	4124	3128	1640	1719	2001	1793	1793	1424	1243	1507

Como condiciones iniciales se utilizaron las CDP de las afluencias del mes de diciembre del año inmediatamente anterior. La ecuación de FPK ofrece como resultado de la simulación la CDP de la afluencia del mes para el que se realiza el pronóstico, esta a su vez se integra para producir la función de distribución de la cual se extrae un percentil dado de probabilidad de excedencia. Para el caso de los caudales mínimos se suele tomar el caudal

con el 95% de probabilidad de excedencia. En la Figura 5 se esquematiza el procedimiento de extracción de los caudales con esta probabilidad de excedencia. Los caudales obtenidos para todos los meses del periodo de simulación se presentan en la Tabla 4. Allí también se encuentra incluida la serie sintética de afluencias mensuales mínimas que resulta de seleccionar los mínimos históricos de cada mes.

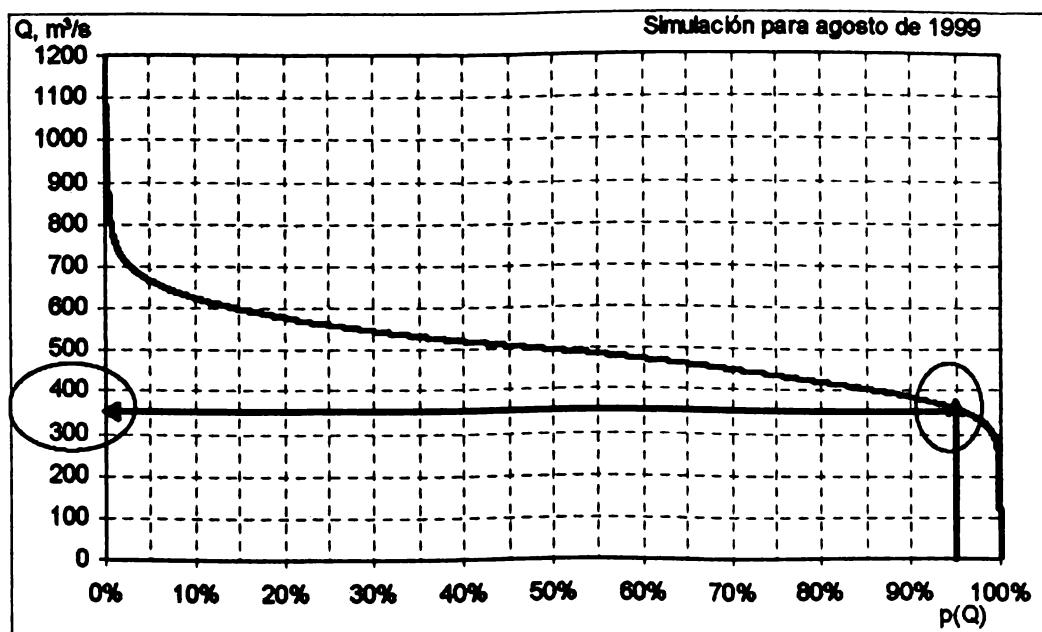


FIGURA 5. Procedimiento de extracción de afluencias mínimas (probabilidad de excedencia del 95%)

TABLA 3. Afluencias mensuales (m^3/s) con probabilidad de excedencia del 95% para Betania

Año	Meses											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1985	133	100	125	13	338	350	355	363	210	200	205	125
1999	360	370	260	6030	450	430	5030	260	430	350	300	360
Serie Sintética	132	141	168	237	256	340	429	346	266	235	236	212

Como se puede observar en la Tabla 4. Las afluencias críticas mínimas simuladas con la ecuación de FPK presentan la flexibilidad de tomar en cuenta los niveles de humedad antecedentes y predominantes en el periodo de simulación. Es por ello que los caudales $Q_{95\%}$, obtenidos para años de alta y baja humedad se diferencian significativamente. La serie sintética de mínimos mensuales no presenta esta flexibilidad, por ello su utilización puede producir reglas de despacho que conduzcan a una operación sobresegura en los años de altas precipitaciones. Por otro lado, ya que el mínimo histórico observado no concuerda con la afluencia $Q_{95\%}$, es muy probable que en algunos años de intensa sequía, los caudales de la serie sintética sobreestimen los mínimos $Q_{95\%}$. En las regiones donde el régimen hidrológico se encuentra influenciado por su climatología propia y la de las áreas aledañas, la serie sintética es insensible a los cambios de la influencia climatológica dominante. Por el contrario, la ecuación de FPK en este caso, debido a su núcleo determinístico, realizará una simulación obediente a la dinámica de la influencia climatológica dominante. Las trayectorias con una probabilidad de excedencia dada, como las presentadas en la Tabla 3, representan las condiciones más críticas en que puede transcurrir el proceso estocástico, pero esta criticidad está integrada en el marco de las condiciones climatológicas reinantes, ya que la evolución de las CDP de afluencias es ocasionada por los cambios en las precipitaciones y por el estado de la CDP antecedente. Esto permite a los procedimientos de toma de decisiones contar con la información de entorno necesaria para producir estrategias de operación conducentes a la maximización de la producción de energía sin riesgo para las premisas de abastecimiento seguro.

5. CONCLUSIONES

La generalización estocástica del modelo determinista lluvia-escorrentía de la ecuación (6), y su solución mediante la aplicación de la ecuación de Fokker-Plank-Kolmogorov son la continuación lógica del paradigma probabilístico reinante en la hidrología. Como una de las características más relevantes de la ecuación de FPK cabe destacar que su negación dialéctica del determinismo produce una conciliación de las posturas antagónicas de hidrología puramente determinista y puramente aleatoria. Epistemológicamente, la FPK anexa un sentido físico a las probabilidades abriendo la oportunidad de construir una nueva línea de análisis en los campos de simulación

y pronóstico. El ejemplo de simulación de afluencias mínimas ($Q_{95\%}$) para Betania evidenció los problemas que puede acarrear la utilización de series sintéticas en la optimización de la operación de embalses. Entre estos se destaca que la poca coherencia física de las series sintéticas puede conducir a una operación «sobresegura» del embalse o a la sobreestimación de las afluencias mínimas. La ecuación de FPK supera estas deficiencias ya que no abandona la relación causa -efecto y cuenta con los mecanismos necesarios para evaluar la influencia de las actividades antrópicas en los regímenes de valores extremos de las afluencias consolidándose en la herramienta clave para la solución de problemas inversos en la gestión de embalses y de otras estructuras de aprovechamiento hidráulico.

6. BIBLIOGRAFIA

- Bendat J.S. y Piersol A.G., 1986. Random data analysis and measurements procedures. 540 p. John Wiley y Sons, New York.
- Bierman H., Bonini Ch. y Husman W., 1996. Análisis cuantitativo para la toma de decisiones. 756 p. Irwin, España.
- Box G.E.P. y Jenkins G. M., 1976. Time series analysis. Forecasting and control. Holden Day.
- Campos T., 2001. Problemario de pronósticos para la toma de decisiones. 191 p. Thomson Learning, México.
- DHI Water and Environment/DHI - Institut for Vand y Miljø. 2000. Mike She water movement user manual. 160 p. DHI, Copenhagen.
- Domínguez E., 2000. Diferentes aproximaciones de las estructuras para el modelo hidrológico en la evaluación de escenarios de escorrentía. 50 p. IDEAM, Bogotá.
- Gardiner C., 1985. Handbook of stochastic methods. 442 p. Springer-Verlag, Berlin. Haan T.C. 2002 Statistical methods in hydrology. 378 p. Iowa state press, Iowa.
- ISA. 2001. Información soporte para la elaboración del pronóstico hidrológico periodo enero - diciembre 2002: Acta 114. 9 p. CND, Medellín.
- Kolmogorov A., 1930/31. Über die analytischen methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Math. Ann.,104. P 415-458.

Taha H., 1998. Investigación de operaciones una introducción. 944 p. Prentice Hall, México.

U.S. Department of Commerce, NOAA/NWS. The modernized end to end forecast process for quantitative precipitation information: Hydrometeorological requirements, scientific issues, and service concepts. 189 p. NWS, SilverSpring MD.