

## PRONÓSTICO PROBABILÍSTICO DE AFLUENCIAS PARA LA EVALUACIÓN DE RIESGOS EN EMBALSES HIDROELÉCTRICOS

***Efraín A. Domínguez***

*Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales – IDEAM*  
*edc@ideam.gov.co*

Recibido para evaluación: 08 de Junio de 2005 / Aceptación: 25 de Agosto de 2005 / Recibida versión final: 30 de Agosto de 2005.

### RESUMEN

En la actualidad, la teoría del riesgo para embalses utiliza curvas de densidad probabilística (CDP) no condicionadas para evaluar la amenaza de falla en su funcionamiento. La incertidumbre del régimen hidrológico es la mayor fuente de riesgo para las represas. El cambio climático y la fuerte auto-correlación de las afluencias diarias representan un obstáculo para evaluar el riesgo con base en probabilidades no condicionadas. La aplicación de la ecuación de Fokker – Planck – Kolmogorov permite el pronóstico de evolución de la CDP en el tiempo, aún para procesos auto-correlacionados, esta propiedad permite formular un nuevo enfoque para la evaluación de fenómenos hidrológicos en términos de CDP condicionadas y no estacionarias. Este artículo presenta las posibilidades y dificultades de esta propuesta que replantea la evaluación del riesgo para represas afectadas por régimen hidrológico no estacionario.

**PALABRAS CLAVES:** Teoría del Riesgo, Modelación Hidrológica, Procesos Estocásticos, Ecuación de Fokker – Planck – Kolmogorov.

### ABSTRACT

Nowadays risk theory for dams uses unconditioned probabilities density curves (PDC) when it is necessary to evaluate the potential of a threat to become in a failure of dam operation. The uncertainty of hydrological regime is the main source of risk for dam safety, climate change conditions and high auto-correlation level of daily affluences offers a serious obstacle to evaluate such risk using unconditioned probabilities. The application of Fokker – Planck – Kolmogorov Equation allows forecasting of PDC evolution in time even when the process is auto-correlated, so this feature opens a new frame for risk assessment looking for a safety dam operation. This paper present a proposal for risk assessment of water related phenomena in terms of non-stationary conditioned probabilities; strengths and weaknesses of this proposal are touched upon.

**KEY WORDS:** Risk Theory, Hydrologic Modelling, Stochastic Processes, Fokker – Planck – Kolmogorov Equation.

## 1. INTRODUCCIÓN

Entorno al agua se desarrollan las actividades sociales y económicas de la humanidad, también ligado a esta es que emerge la estabilidad de la biocenosis de los distintos ecosistemas de cada cuenca hidrológica. En la actualidad la mayoría de cuencas hidrológicas se encuentran intervenidas y no pueden ser analizadas como sistemas en estado estrictamente natural. El hombre, también elemento de la naturaleza, la esta transformando y por ello en la actualidad cobra vigencia el término introducido por Bernadsky "Noosfera" (Vernadsky, 2004) en la cual se entrelazan relictos de sistemas naturales y los dispositivos urbanos y de producción creados por el hombre. En un afán por cumplir metas de sostenibilidad han aparecido nuevos paradigmas que pretenden orientar la gestión de los sistemas productivos, en especial de aquellos cuya producción depende del agua aportada por corrientes superficiales, lagos o reservorios. Entre estos paradigmas tenemos la ecohidrología e hidroinformática, disciplinas que penetradas y unidas por la modelación matemática y elementos de la teoría de decisiones conforman los cimientos de una *Hidrología Económica*, la cual ofrece las herramientas necesarias para apoyar integralmente la toma de decisiones de los sectores productivos. En esta forma los dispositivos de gestión del recurso hídrico pueden ser optimizados utilizando variables hidráulicas e hidrológicas, prerrogativas ambientales en su función objetivo y procedimientos cuantitativos para la toma de decisiones. La producción hidroenergética es uno de los campos donde esta tarea de optimización cobra vigencia por la intensidad con que las represas influyen sobre el medio físico y por su sensibilidad ante la variabilidad hidrológica de las corrientes superficiales que les abastecen de agua. Si se introduce la función de producción de un embalse hidroeléctrico como:

$$\mathcal{O} = 9.81(\eta_1\eta_2\eta_3\ldots\eta_{n-1}\eta_n\ldots)Q_T DHT \quad (1)$$

Donde:

$\mathcal{O}$	[kWh]	—	Energía generada;
$\eta_i$	[-]	—	Factores limitantes y restricciones por régimen ambiental de caudales;
$Q_T$	[m³/s]	—	Caudal turbinado;
DH	[m]	—	Cabeza hidráulica neta;
T	[s]	—	Intervalo de ponderación;

sin olvidar las prerrogativas ambientales se formula el siguiente ejercicio de optimización lineal:

$$9.81 \sum_{i=0}^k (\eta_1\eta_2\eta_3\ldots\eta_{n-1}\eta_n\ldots)Q_m DHT \rightarrow \max; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} Q_m + Q_{exc} &\leq Q_{rcm} \\ Q_m + Q_{exc} &> Q_{eco} \\ W - \Delta W &> W_{crit} \end{aligned}$$

Donde:

$Q_{exc}$	[m³/s]:	Caudal de exceso;
$Q_{rcm}$	[m³/s]:	Restricción por caudal máximo;
$Q_{eco}$	[m³/s]:	Restricción por régimen ambiental de caudales;
$W$	[m³]:	Volumen almacenado en el reservorio;
$\Delta W$	[m³]:	Cambios de almacenamiento durante el intervalo de ponderación;
$W_{crit}$	[m³]:	Volumen de reserva para la época de estiaje.

La ecuación (2) es el operador que optimiza las reglas de despacho y como es evidente estas reglas dependen de los pronósticos de afluencias (diarias, decadales, mensuales, anuales y por periodos) al embalse. En este punto comienza a jugar un papel muy importante la variabilidad del régimen hidrológico de las corrientes que aportan las afluencias. La incertidumbre introducida por la variabilidad hidrológica de las fuentes de agua puede inducir dos tipos de riesgo para las represas hidroeléctricas<sup>1</sup>: 1) Daños estructurales 2) Fallas en la funcionalidad. Una métrica objetiva para estos dos tipos de riesgos es su probabilidad de ocurrencia. Tradicionalmente en la etapa de construcción de las represas esta métrica es el factor clave de diseño ya que las dimensiones estructurales de la presa dependen de la magnitud de las afluencias de percentil probabilístico de excedencia del 1%<sup>2</sup>. Para el riesgo de fallas en la funcionalidad de la represa, se utiliza la misma métrica pero esta se evalúa con base en simulaciones autoregresivas acopladas con el método de Montecarlo. En condiciones de régimen hidrológico estacionario estas evaluaciones no presentan complejidad alguna, sin

1. Y para cualquier otro sector productivo que dependa del agua como medio de producción o materia prima

2. En algunos casos puede ser el del 5% o 10% de excedencia depende de la inversión de capital en la construcción de la presa

embargo, el supuesto de estacionariedad para cuencas con alta intervención humana y bajo la influencia del cambio climático global no se cumple, por ello emerge el interrogante sobre como evaluar la probabilidad de falla en tales condiciones. La respuesta a este interrogante es el tema a tratar en lo sucesivo.

## 2. EVALUACIÓN DEL RIESGO EN CONDICIONES ESTACIONARIAS

Para poder proponer una técnica de evaluación de la probabilidad de falla en una represa hidroeléctrica en condiciones no estacionarias es necesario basarse en como esta se evalúa para condiciones estacionarias.

Como base de la evaluación del riesgo en condiciones estacionarias se utiliza la noción de proceso estocástico (Kartvelishvili, 1967). Esto quiere decir que la evolución de las afluencias al embalse se asume como un proceso que arroja diferentes realizaciones aún cuando el vector de estado de la cuenca se mantenga constante. Matemáticamente un proceso estocástico (o función aleatoria)  $\xi(t, Q)$  se define como la imagen del espacio de sucesos elementales  $\Omega$  en  $\mathfrak{R}^n$  ( $\xi: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ) cuando los sucesos elementales  $\omega$  dependen del parámetro  $t^3$ .

Describir  $\xi(t, Q)$  significa definir su función de distribución N-dimensional  $F_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n | t_1, t_2, \dots, t_n)$  la cual puede ser expresada como (Kazakievich, 1989):

$$F_\xi(Q_1, Q_2, \dots, Q_n | t_1, t_2, \dots, t_n) = P[\xi(t_k, Q) < x_k, k = \overline{1, N}]$$

$$= \int_{-\infty}^{x_{(1)}} \int_{-\infty}^{x_{(2)}} \dots \int_{-\infty}^{x_{(N)}} p(Q_{(1)}, Q_{(2)}, \dots, Q_{(N)} | t_1, t_2, \dots, t_n) dQ_{(1)} dQ_{(2)} \dots dQ_{(N)} \quad (3)$$

De modo que su densidad de probabilidades N-dimensional se expresa como:

$$\frac{\partial^N F_\xi(Q_1, Q_2, \dots, Q_n | t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial Q_1 \partial Q_2 \dots \partial Q_N} =$$

$$p(Q'_{(1)}, Q'_{(2)}, \dots, Q'_{(N)} | t_1, t_2, \dots, t_N) \quad (4)$$

3. t en este caso representa al tiempo, pero puede representar cualquier otra variable independiente.

De forma más sencilla, se puede indicar que el proceso  $\xi(t, Q)$  se encuentra definido si se conoce la función de distribución (o la densidad probabilística) de cada una de sus secciones en  $t = t_k, k = \overline{1, N}$ . Cada una de estas secciones representa una variable aleatoria y si estas son independientes e idénticamente distribuidas (variables IID) entonces las ecuaciones (3) y (4) se transforman en:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p(Q) dQ \quad (5)$$

$$\frac{\partial F_\xi(x)}{\partial x} = p(Q) \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) se utilizan, bajo régimen estacionario, para establecer la probabilidad de falla estructural o de funcionamiento de una represa hidroeléctrica. De este modo si (5) ó (6) son conocidas, la probabilidad de falla se calcula integrando las probabilidades de las afluencias que se encuentran en la región de avería establecida por el diseño de la presa y por las prerrogativas ambientales, de modo que si el régimen de afluencias esta compuesto por un proceso  $\xi(t, Q)^4$  como se presenta en la figura 1 y su zona de fallas se presenta por los rectángulos allí iluminados entonces la probabilidad de fallas de una represa hidroeléctrica alimentada por estas afluencias se expresa como:

$$p(Q_{\text{critico}}^{\text{Max}} < Q(t) < Q_{\text{critico}}^{\text{Min}}) =$$

$$\int_{Q_{\text{critico}}^{\text{Max}}}^{\infty} p(Q, t) dQ + \int_0^{Q_{\text{critico}}^{\text{Min}}} p(Q, t) dQ \quad (7)$$

Donde:

$Q(t)$  [m<sup>3</sup>]: Afluencia en el momento t;

$Q_{\text{critico}}^{\text{Min}}$  [m<sup>3</sup>]: Afluencia crítica por valores mínimos;

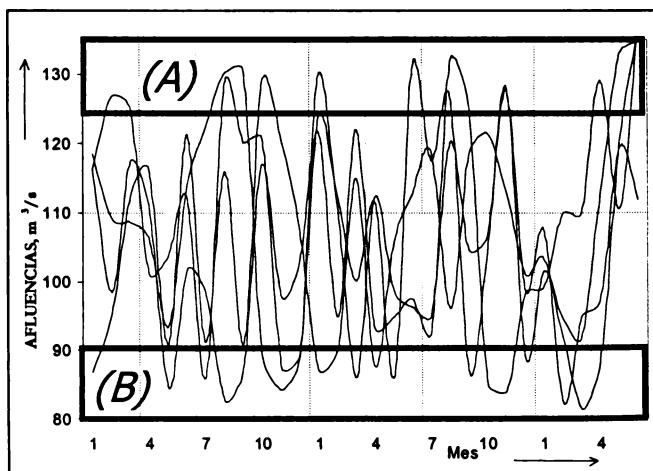
$Q_{\text{critico}}^{\text{Max}}$  [m<sup>3</sup>]: Afluencia crítica por valores máximos;

4. Hay que mantener presente que  $\xi(t, Q)$  para este caso es tratado como un vector de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas (variables aleatorias IID).

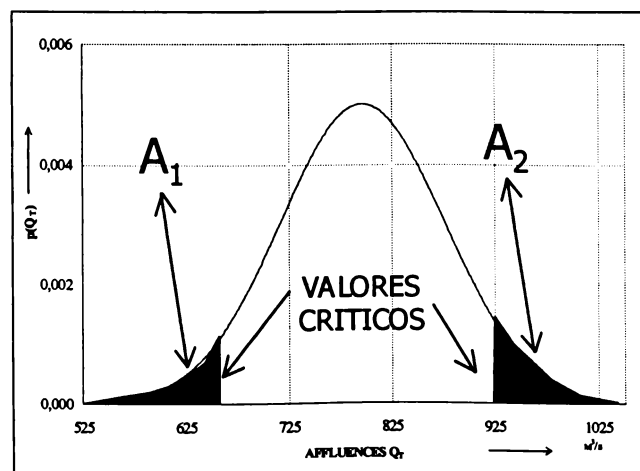
La ecuación (7), geoméricamente, representa la suma de las áreas bajo la curva de densidad probabilística  $p(Q)$

limitadas por los valores de las afluencias críticas  $Q_{\text{crítico}}^{\text{Min}}$

y  $Q_{\text{crítico}}^{\text{Max}}$  (véase Figura 2).



**FIGURA 1.** Zona de fallas para afluencias representadas como un vector de variables aleatorias IID (A) y (B) – zonas de falla.



**FIGURA 2.** Interpretación geométrica de la probabilidad de fallas de un embalse hidroeléctrico bajo régimen estacionario de sus afluencias.

### 3. EVALUACIÓN DEL RIESGO EN CONDICIONES NO ESTACIONARIAS

En la actualidad, debido a la fuerte intervención humana en las cuencas hidrológicas y gracias a los efectos del cambio climático global (MA, IDEAM, PNUD; 2001) sobre la hidrología continental es difícil asumir que el régimen de las afluencias a embalses hidroeléctricos sea estacionario. Bajo condiciones de no estacionariedad, el método de evaluación de la probabilidad de falla presentado en el párrafo anterior debe ser perfeccionado para poder tomar en cuenta la no independencia y no estacionariedad de las afluencias. Si el proceso  $\xi(t, Q)$  no es estacionario las curvas de densidad probabilística que describen a sus ordenadas en los distintos momentos de tiempo  $t$  cambian y además se encuentran en dependencia unas con otras de tal modo que la probabilidad de falla de la represa debe ser evaluada para cada instante de tiempo. La probabilidad total de falla en un intervalo de tiempo que va desde  $t=0$  hasta  $t=T$  se obtiene integrando las probabilidades parciales de falla, evaluadas con la ecuación (7), de 0 a  $T$  del siguiente modo:

$$PTF = \int_{t=0}^T p(Q_{\text{crítico}}^{\text{max}} < Q(t) > Q_{\text{crítico}}^{\text{min}}) dt \quad (8)$$

La ecuación (8) en su sentido geométrico explica la suma de las áreas que durante la evolución de la curva  $p(Q|t)$  caen en las ventanas de falla como esto se observa en la Figura 3, esto quiere decir que la probabilidad total de falla representa la suma del área de las porciones de curva de densidad probabilística que en los momentos  $T = t_1, t_2, \dots, T_n$  penetraron en los rectángulos de la zona de fallas.

Para la aplicación de la ecuación 8 es necesario contar con un mecanismo que permita la simulación del comportamiento de la curva  $p(Q_{(1)}, Q_{(2)}, \dots, Q_{(N)} | t_1, t_2, \dots, t_N)$ .

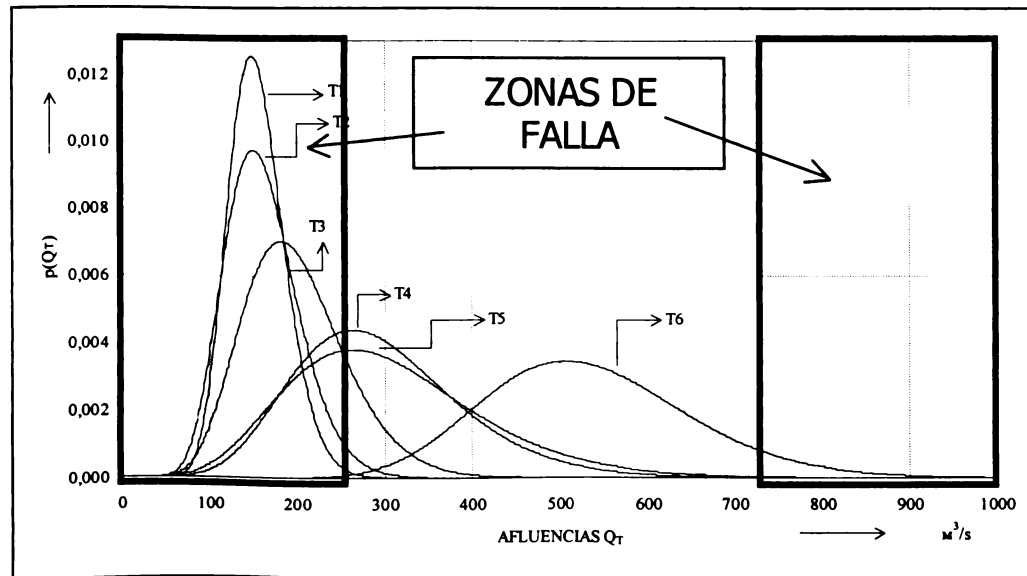
Si el proceso  $\xi(t, Q)$  posee características de markovianidad, para solucionar esta tarea la evolución en el tiempo de las afluencias se representa como un proceso de dos componentes: una determinista y otra aleatoria (véase Figura 4). La componente aleatoria se considera  $\delta$ - correlacionada (ruido blanco), para la componente determinista se establece un núcleo que se expresa como:

$$\tau \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{k} Q(t) = X(t) \quad (9)$$

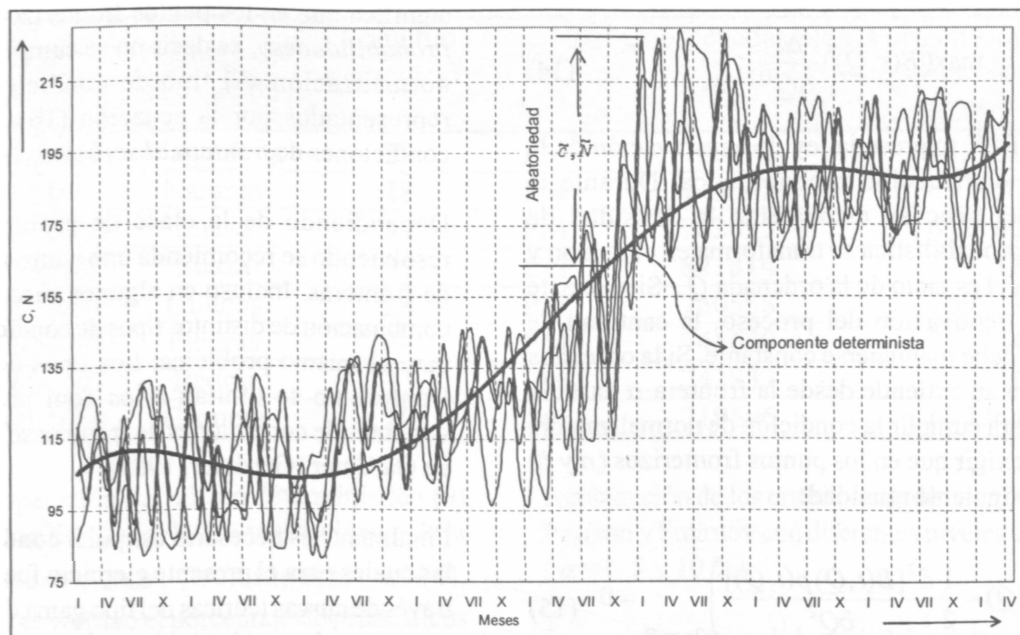
En el cual:

$\tau$  [s]: Tiempo de relajamiento;  
 $Q$  [m<sup>3</sup>/s]: Afluencia;  
 $t$  [s]: coordenada temporal;  
 $k$  [-]: coeficiente de escorrentía;  
 $X$  [m<sup>3</sup>/s]: Precipitaciones.

Se introduce incertidumbre en el operador (9) si se asume que:  $-1/k\tau \equiv c(t)$  y  $X/\tau \equiv N(t)$ . En donde  $c(t) = \bar{c}(t) + \tilde{c}(t)$  y  $N(t) = \bar{N}(t) + \tilde{N}(t)$  son funciones aleatorias con componentes de ruido blanco  $\tilde{c}(t)$  y  $\tilde{N}(t)$  “ $\delta$ -correlacionadas” (Figura 4) caracterizadas por las intensidades  $G_{\tilde{c}}$ ,  $G_{\tilde{N}}$  y  $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ .



**FIGURA 3.** Explicación geométrica de la probabilidad total de fallas



**FIGURA 4.** Descomposición de un proceso en dos componentes

De esta manera la ecuación (9) se puede llevar a la forma de la ecuación de Fokker–Plank–Kolmogorov (FPK) para un proceso markoviano simple (Kovalenko, 1993):

$$\frac{\partial p(t, Q)}{\partial t} + \frac{\partial [A(t, Q)p(t, Q)]}{\partial Q} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [B(t, Q)p(t, Q)]}{\partial Q^2} = 0 \quad (10)$$

Donde  $A(t, Q)$  y  $B(t, Q)$  son funciones deterministas que

definen las particularidades del proceso  $\xi(t, Q)$  las cuales a su vez se expresan como:

$$A(t, Q) = (\tau + 0.5G_\tau)Q - 0.5G_{\tau N} + N \quad (11)$$

$$B(t, Q) = G_\tau Q^2 - 2G_{\tau N}Q + G_N \quad (12)$$

La ecuación (10) describe la evolución en el tiempo de la densidad de probabilidades  $p(Q|t)$ . Para resolver esta ecuación se aplica la siguiente aproximación numérica:

$$\begin{aligned} \frac{p_j^{i+1} - p_j^i}{\Delta t} = & - \left\{ \sigma \left( \frac{\varphi_R(A_{j+1}^{i+1}p_{j+1}^{i+1} - A_j^{i+1}p_j^{i+1})}{\Delta Q} + \frac{\varphi_L(A_j^{i+1}p_j^{i+1} - A_{j-1}^{i+1}p_{j-1}^{i+1})}{\Delta Q} \right) + \right. \\ & \left. (1 - \sigma) \left( \frac{\varphi_R(A_{j+1}^i p_{j+1}^i - A_j^i p_j^i)}{\Delta Q} + \frac{\varphi_L(A_j^i p_j^i - A_{j-1}^i p_{j-1}^i)}{\Delta Q} \right) \right\} + \\ & \left\{ \sigma \left[ \frac{1}{2} \frac{(B_{j+1}^{i+1}p_{j+1}^{i+1} - 2B_j^{i+1}p_j^{i+1} + B_{j-1}^{i+1}p_{j-1}^{i+1})}{\Delta Q^2} \right] + (1 - \sigma) \left[ \frac{1}{2} \frac{(B_{j+1}^i p_{j+1}^i - 2B_j^i p_j^i + B_{j-1}^i p_{j-1}^i)}{\Delta Q^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Donde los coeficientes  $\varphi_R$ ,  $\varphi_L$  son coeficientes de diferencias direccionales y  $\sigma$  el coeficiente de peso de las capas de tiempo. Cuando  $\sigma = 1$  la ecuación (13) se convierte en un esquema totalmente implícito y si  $\sigma = 0$  en uno explícito, en cuyo caso es necesario cumplir la condición de Courant–Frederich–Levi de tal modo que:

$$\max(|B(\tau, Q)|) \frac{\Delta t}{\Delta Q^2} < \frac{1}{2} \quad (14)$$

La ecuación FPK expresa la ley de conservación de la densidad de distribución probabilística. Durante la evolución del proceso estocástico la densidad de distribución probabilística se transforma en el tiempo y se traslada en el espacio de la ordenada  $Q$ . Si no existe absorción ni renovación del proceso, la cantidad de probabilidad debe mantenerse constante. Si la ordenada  $Q$  del proceso se extiende desde la frontera  $\alpha$  hasta la frontera  $\beta$ , para cumplir la condición de normalización, es necesario exigir que en los puntos fronterizos ( $\alpha$  y  $\beta$ ) se cumpla la siguiente igualdad:

$$\left( A(\tau, Q)p(t, Q) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [B(t, Q)p(t, Q)]}{\partial Q^2} \right)_{Q=\alpha=\beta} = 0 \quad (15)$$

Esta condición evita el flujo de probabilidades por los puntos fronterizos. Por ello la ecuación (15) es llamada *condición de frontera reflectiva*. Si por el contrario en los nudos fronterizos se cumple la igualdad:

$$p(\tau, Q)|_{Q=\alpha=\beta} = 0 \quad (16)$$

significa que en los puntos fronterizos existe «fuga de probabilidades», es decir no se cumple la condición de normalización. Al tipo de condiciones de frontera representados por la ecuación (16) se les denomina condiciones de *frontera absorbente*.

Dependiendo de la clase de problema que se esté resolviendo se recomienda uno u otro tipo de condición de fronteras. Incluso en algunos casos es pertinente la combinación de distintos tipos de condiciones de frontera para el mismo problema. Los tipos de condiciones de frontera no se limitan a los aquí presentados. Otras variantes de condiciones de frontera se pueden consultar en Gardiner (Gardiner, 1985).

Finalmente es necesario estipular condiciones iniciales, las cuales para el presente ejercicio fueron formuladas a través de curvas teóricas del tipo gama de tres parámetros, representadas por la siguiente forma analítica:

$$p(Q, \lambda, \alpha) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} Q^{\alpha-1} e^{-\lambda Q} \tag{17}$$

Donde:

- $\lambda$ : Parámetro de escala
- $\alpha$ : Parámetro de forma

Las ecuaciones de la (9) a la (17) cierran el sistema de ecuaciones necesario para simular la evolución en el tiempo de la distribución  $p(Q_{(1)}, Q_{(2)}, \dots, Q_{(N)} | t_1, t_2, \dots, t_N)$  cuando esta es igual a  $p(Q_{(1)} | t_1)$  o sea para un proceso markoviano de cadena simple. Para los casos en que el proceso  $\xi(t, Q)$  es markoviano complejo entonces son necesarios algunos ajustes, entre ellos, (a) un núcleo determinístico de mayor orden (ecuación 18):

$$a_n \frac{d^n Q(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} Q(t-1)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 Q(t-n) = X(t) \tag{18}$$

y (b) la implementación de la ecuación de FPK multivariada (ecuación 19):

$$\frac{\partial p(t, \vec{Q})}{\partial t} + \sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial p(t, \vec{Q})}{\partial Q_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m B_{ij} \frac{\partial^2 p(t, \vec{Q})}{\partial Q_i \partial Q_j} = 0 \tag{19}$$

4. IMPLEMENTACIÓN PRACTICA DE LA ECUACIÓN DE FOKKER – PLANCK – KOLMOGOROV

El aparato teórico desarrollado en el párrafo anterior fue implementado para modelar la evolución de la curva de densidad probabilística de las afluencias al embalse de Betania en la Republica de Colombia. Este embalse se encuentra ubicado en la parte alta del río Magdalena, tiene un área aferente de 14000 kms² y una afluencia media de 450 m³/s. El noventa por ciento de su afluencia es controlado por las estaciones hidrométricas Puente Balseadero (código - 2104701) y Paicol (código 2105706), las cuales son operadas por el Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales – IDEAM. En el área aferente al embalse de Betania se encuentran instaladas 200 estaciones meteorológicas y 40 hidrométricas. En calidad de estaciones de soporte para la precipitación de entrada fueron seleccionadas las siguientes (Tabla 1):

TABLA 1. Estaciones soporte para las precipitaciones del núcleo determinístico (ecuación 9)

No	Código	Nombre de la estación	Longitud del registro en años	Tipo	Coordenadas planas origen Bogotá (X <sub>Bogotá</sub> =1000000; Y <sub>Bogotá</sub> =1000000)	
					X	Y
1	2101013	Magdalena	28	PM	760443	688781
2	2101014	Naranjo	28	PM	745652	697950
3	2103006	Suaza	39	PM	782695	672160
4	2103502	Suaza	32	CO	821814	741212
5	2105031	Ullucos	28	PM	760558	769928
6	2601005	Piedras	34	PM	745689	753354
7	2601007	Bedon	33	PM	743837	755201
8	4401010	Caquetá	20	PG	719595	677764

Para validar la operación del núcleo determinístico (9) se utilizó el criterio del Centro Hidrometeorológico de la Federación Rusa  $S/\sigma_\Delta$  (Domínguez, 2004). Adicionalmente se verificó el porcentaje de pronósticos acertados (PPA) y para verificar la validez de las curvas de densidad probabilística pronosticadas se aplicó una

combinación de los criterios estadísticos de Kolmogorov, Pearson y Smirnov con diferentes niveles de significancia ( $\alpha=1, 5$  y  $10\%$ ).

Las pruebas de validación del núcleo determinístico arrojaron resultados positivos, los valores del criterio

$S/\sigma_{\Delta}$  alcanzaron las cifras de 0,42 y 0.63 y la condición de validación exige que este sea menor o igual a 0,80. Las afluencias pronosticadas dependen de las precipitaciones utilizadas como entrada del modelo (9), por esto, para entender el efecto de los posibles errores de las precipitaciones pronosticadas sobre la predicción

de afluencias el desempeño del núcleo determinístico fue validado usando precipitaciones reales y pronosticadas, los resultados de esta validación se presentan en la Tabla 2.

Los resultados de validación del pronóstico de curvas de densidad probabilísticas para las afluencias mensuales de Betania fueron los presentados en la Tabla 3.

TABLA 2. Resultados de la validación del núcleo determinista - ecuación (9)

Precipitaciones utilizadas en la validación	Método de parametrización					
	Iteraciones de Newton			Método del gradiente reducido $k = \text{const}$		
	$S/\sigma_{\Delta}$	PPA (1)	PPA (2)	$S/\sigma_{\Delta}$	PPA (1)	PPA (2)
Precipitaciones reales	0.42	94	98	0.42	94	98
Precipitaciones pronosticadas	0.63	76	82	0.63	72	79

TABLA 3. Resultados de la validación de los pronósticos de curvas de densidad probabilística para las afluencias mensuales de Betania.

Precipitaciones utilizadas en la validación	Porcentaje de pronósticos acertados (PPA), %								
	Smirnov $\omega^2$			Kolmogorov $\lambda$			Pearson $\chi^2$		
	Nivel de significancia $\alpha$ , %								
	1	5	10	1	5	10	1	5	10
Precipitación real	99	99	99	99	99	99	99	99	99
Precipitación pronosticada	93	71	68	39	36	36	99	99	96

El proceso de validación demostró la viabilidad para el pronóstico de las curvas de densidad probabilística para afluencias a embalses hidroeléctricos (véase Figura 5). Tal pronóstico tiene utilidad en las tareas de optimización

de reglas de despacho. A continuación se presenta un sencillo ejemplo de cómo este tipo de pronóstico puede ser acoplado a los procedimientos de toma de decisiones.

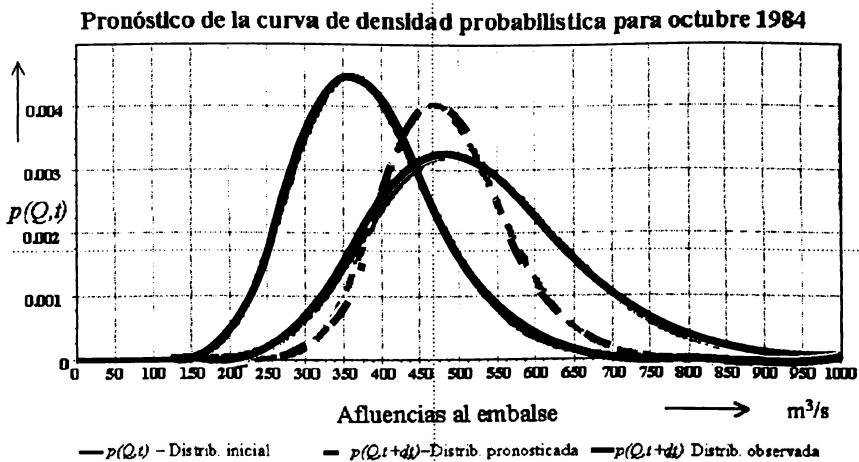


FIGURA 5. Ejemplo del pronóstico de curvas de densidad probabilística para Betania

La tecnología presentada fue implementada utilizando programación orientada a objetos en el entorno de desarrollo Delphi 6. Como resultado se obtuvo una aplicación cuya interfase se presenta en la siguiente Figura:

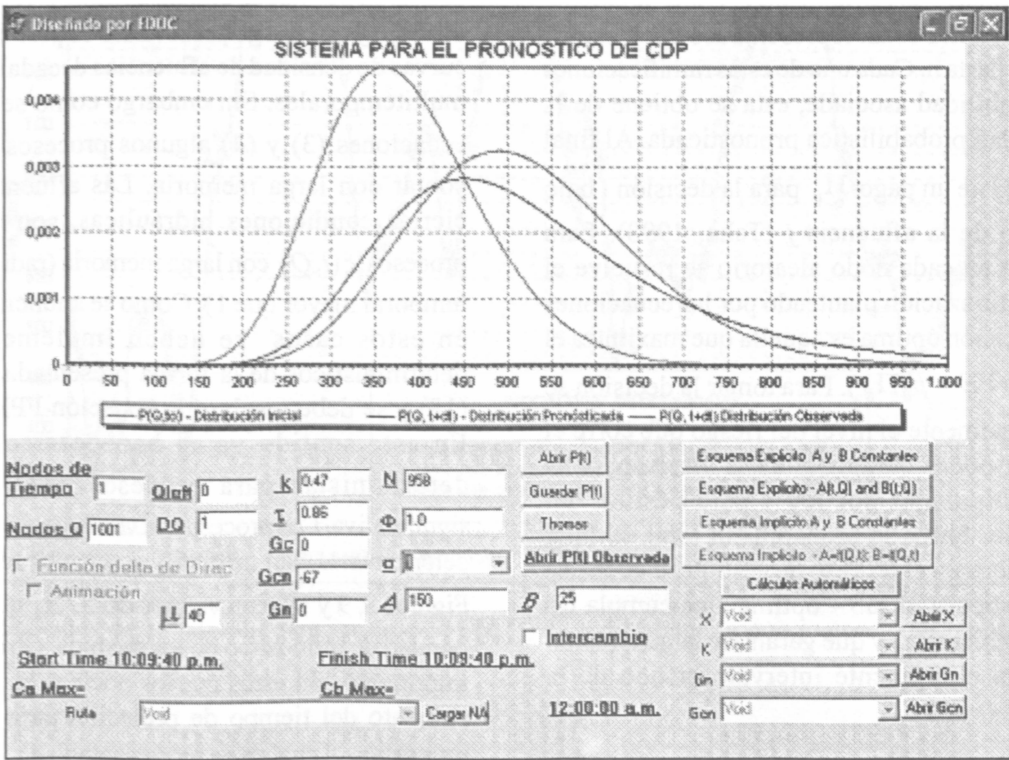


FIGURA 6. Ventana principal de la aplicación “FPK – Equation solver”

5. PAPEL DE LOS PRONÓSTICOS DE CURVAS DE DENSIDAD PROBABILÍSTICA EN LA TOMA DE DECISIONES

Para un embalse hidroeléctrico el proceso de toma de decisiones para la generación de las reglas de despacho

se basa en la maximización de sus utilidades observando las restricciones impuestas por las prerrogativas ambientales de tal modo que para tomar la decisión sobre el precio a ofertar en la bolsa de energía es necesario implementar un árbol de decisiones como el siguiente:

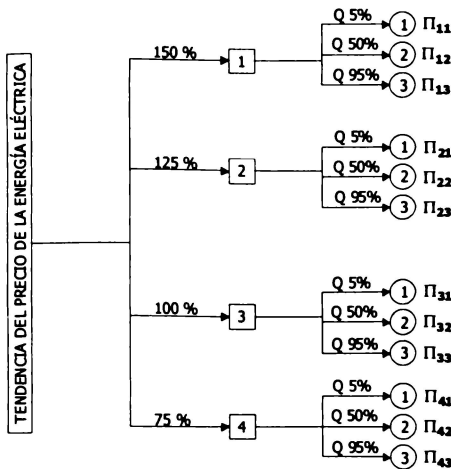


FIGURA 7. Árbol estocástico de decisiones

En este árbol (Figura 7) para cada variante de decisiones (cuadrados 1...4) existen ramificaciones de posibles realizaciones de la variable aleatoria que no esta bajo control (en este caso las afluencias). Estos nodos de posibles realizaciones están representados por círculos numerados de 1 hasta n. Cada una de estas ramificaciones tiene una probabilidad asociada, esta se obtiene de la curva de densidad probabilística pronosticada. Al final de cada nodo existe un pago  $\Pi_{ij}$  para la decisión i bajo la eventualidad de la afluencia j (Taha, 1998). Para obtener el pago en cada nodo aleatorio se resuelve el problema de optimización planteado por las ecuaciones (1) y (2). La decisión óptima es aquella que maximiza el valor esperado ( $VE = p_{ij}\Pi_{ij}$ ). Para tomar la decisión se analiza, adicionalmente el nivel del riesgo que corre el embalse de no poder cumplir con las prerrogativas ambientales estipuladas por ley y para gestión del embalse. De esta forma la probabilidad total de falla (PTF) puede inferir en el proceso de gestión del embalse induciendo una decisión sub – óptima que cumpla las restricciones ambientales y que garantice la generación de energía para el siguiente intervalo crítico de la planificación.

## 6. FUTURAS INNOVACIONES

La metodología aquí descrita fue desarrollada para apoyar la gestión de embalses hidroeléctricos en marcos de largo y ultralargo plazo. Esto es para el pronóstico de curvas de densidad de afluencias decadales, mensuales y multitemporales. Sin embargo como se deduce de las ecuaciones (3) y (4) algunos procesos  $\xi(t, Q)$  pueden contar con larga memoria. Las afluencias diarias, en ciertas condiciones hidráulicas, son un ejemplo de procesos  $\xi(t, Q)$  con larga memoria (radio de correlación temporal mayor que 1). Como se anunció anteriormente en estos casos se deben implementar núcleos determinísticos de la forma presentada en la ecuación (18) y se debe resolver la ecuación FPK multivariada. En este sentido ya se han desarrollado núcleos deterministas para procesos  $\xi(t, Q)$  con memoria significativa. Los procesos de verificación de estos núcleos deterministas han arrojado excelentes resultados (véase Figuras 8, 9 y 10) con valores de  $S/\sigma_\Delta$  que garantizan la bondad de pronóstico de los mismos. Otro resultado muy importante con estos nuevos núcleos es que permiten el aumento del tiempo de prelación para la emisión del pronóstico el cual se ha incrementado de  $1 \Delta t$  a  $3 \Delta t$ , para ríos de montaña y hasta  $15 \Delta t$  para corrientes en planicies.

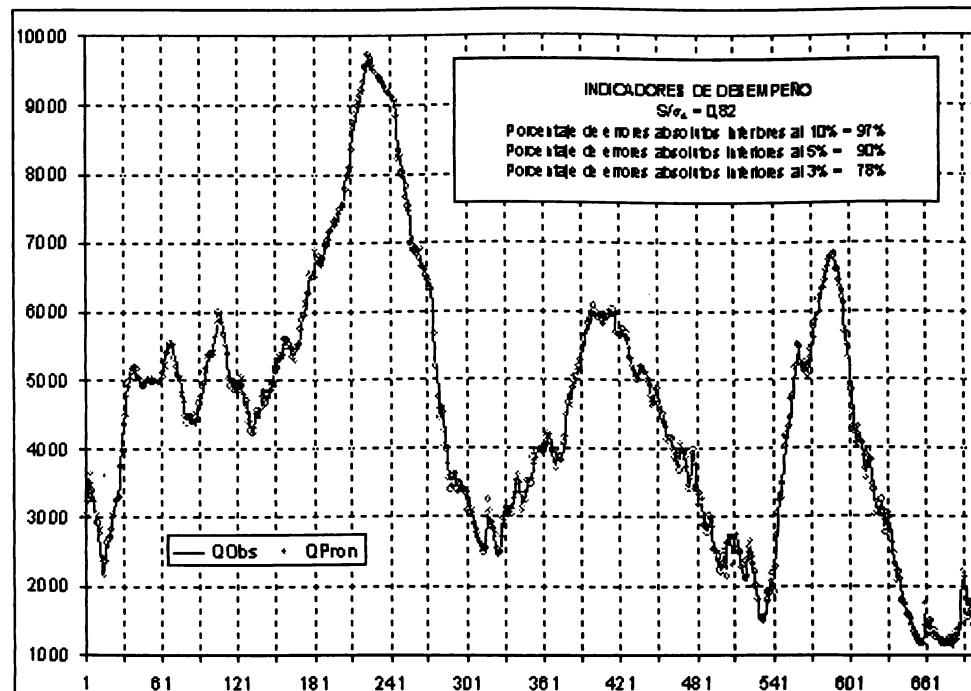


FIGURA 8. Resultados de simulación para un proceso  $\xi(t, Q)$  de larga memoria con prelación de predicción de  $1 \Delta t$  (Caudales estación el Banco – Río Magdalena).

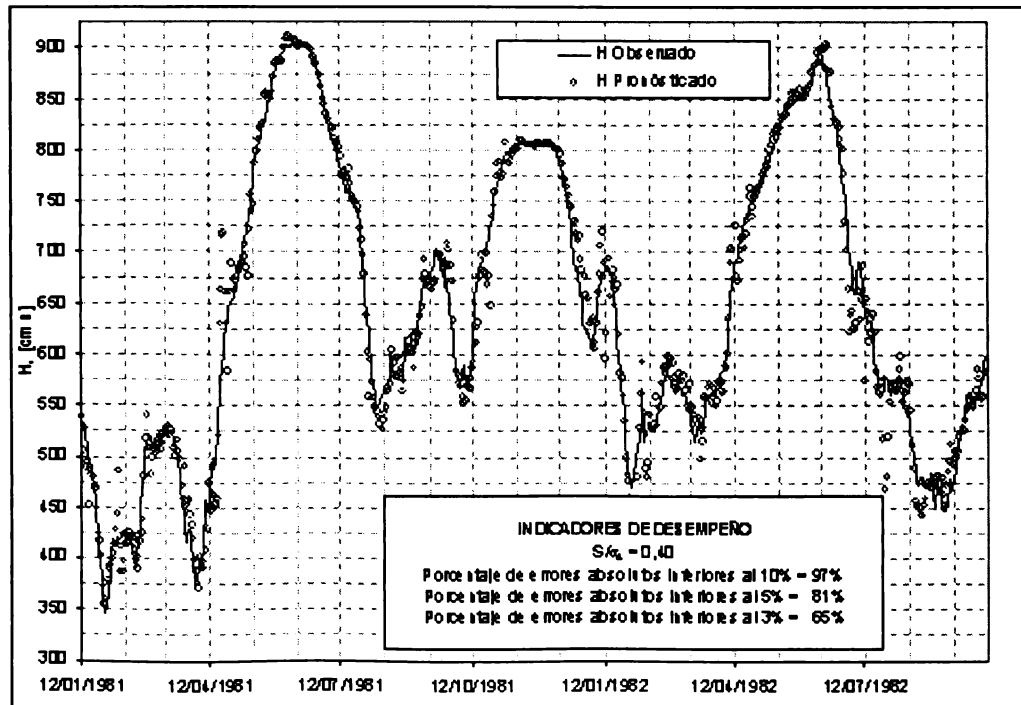


FIGURA 9. Resultados de simulación para un proceso  $\xi(t, Q)$  de larga memoria con prelación de predicción de 30 días (Niveles estación el Banco – Río Magdalena).

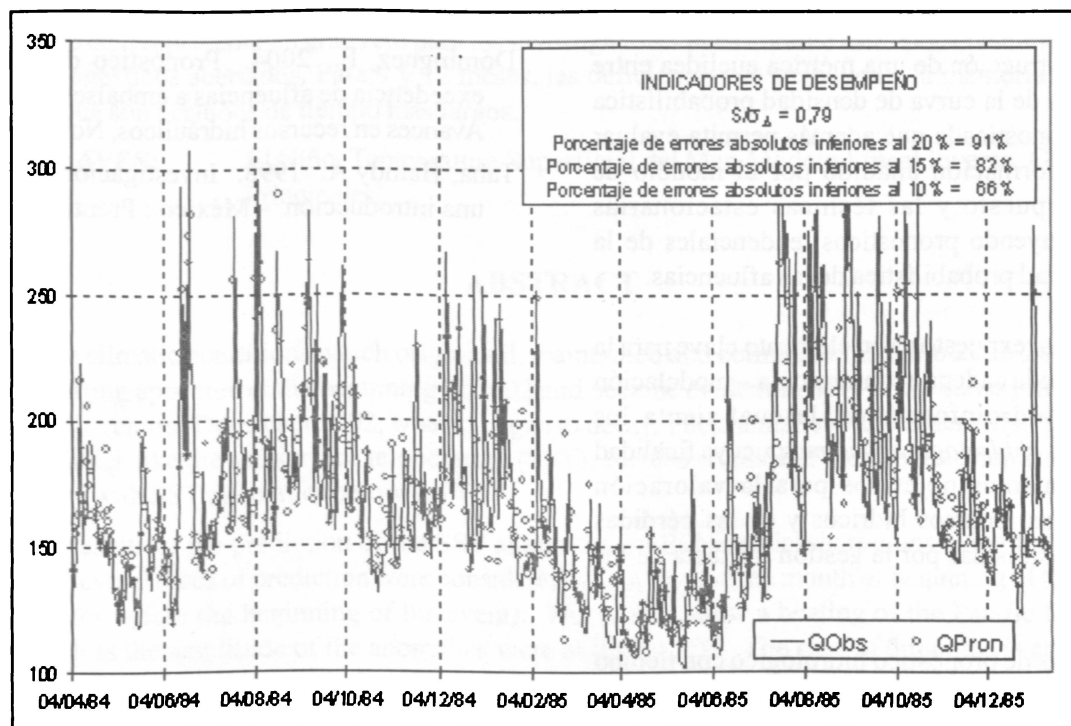


FIGURA 10. Resultados de simulación para un proceso  $\xi(t, Q)$  de larga memoria con prelación de predicción de 3 días (Afluencias diarias al embalse de Betania en el río Magdalena).

De acuerdo con lo anterior ya existe lo básico para empezar las investigaciones requeridas para la implementación numérica de la ecuación FPK multivariada (ecuación 19). De llegar a buen término se podrá ampliar el papel del pronóstico de curvas de densidad probabilística en los procesos de toma de decisiones, especialmente en aquellos en los que interviene la teoría del juego. Esta representaría un avance para los inicios de tareas de optimización con prerrogativas ambientales para cascadas de represas hidroeléctricas. Los logros con los núcleos deterministas de larga memoria ya permiten realizar pronósticos hidrológicos con mayor tiempo de prelación para la emisión de los pronósticos, esto es muy relevante para tareas de prevención de emergencias.

## 7. CONCLUSIONES

La ecuación de FPK permite el pronóstico de curvas de densidad probabilística para afluencias bajo régimen no estacionario. La plataforma tecnológica desarrollada esta lista para su utilización operativa, sin embargo quedan algunos elementos por desarrollar como lo son el desarrollo de criterios de validación que tomen en cuenta la inercia natural de los procesos (del mismo modo que lo realiza el criterio  $S/\sigma_{\Delta}$ ). Como una alternativa se propone la construcción de una métrica euclídea entre las coordenadas de la curva de densidad probabilística observada y pronosticada que además permita evaluar el grado de información añadido por el modelo de pronóstico propuesto y las técnicas estacionarias existentes, incluyendo pronósticos tendenciales de la curva de densidad probabilística de las afluencias.

El desarrollo aquí expuesto es un elemento clave para la consolidación de la cadena ecohidrología – modelación matemática – hidroinformática, la cual sienta los cimientos de una «hidrología económica» cuya finalidad es crear mecanismos objetivos para la valoración económica de los recursos hídricos y de las pérdidas económicas ocasionadas por la gestión inexacta de los mismos.

Las herramientas de pronóstico hidrológico con tiempo de prelación de predicción ampliado, aún sin la ecuación de Fokker – Planck – Kolmogorov multivariada, constituyen una herramienta de gestión del recurso hídrico, no sólo en embalses hidroeléctricos, sino también

en otros sectores productivos, especialmente en el sector de prevención y atención de desastres naturales por agua. Los indicadores de desempeño arrojados por la validación de los núcleos determinísticos de alto orden permiten abordar la compleja tarea de expandir los horizontes de pronóstico incluso en las zonas de alta montaña.

## 8. BIBLIOGRAFÍA

- Vernadsky V.I., 2004. Biosfera y noosfera, Moscú, Airis-Press, p. 576.
- Kartvelishvili N.A. 1967. Teoría de procesos probabilísticos en hidrología y regulación de la escorrentía, Leningrado, Gudrometeoizdat, p. 291.
- Kazakievich D.I. 1989. Nociones de teoría de funciones aleatorias para problemas hidrometeorológicos, Leningrado, Guidrometeoizdat, p. 230.
- MA, IDEAM, PNUD. 2001. Colombia primera comunicación nacional ante la Convención Marco de las Naciones Unidas.- Bogotá: Servigráficas, p. 271.
- Kovalenko V.V. 1993. Modelación de procesos hidrológicos, San Petersburgo, Gudrometeoizdat, p. 256.
- Gardiner C.W. 1985. Handbook of stochastic methods, Berlin: Springer-Verlag, p. 442.
- Domínguez, E. 2004. Pronóstico de percentiles de excedencia de afluencias a embalses hidroeléctricos. Avances en recursos hidráulicos, No 11 pp. 103 – 114.
- Taha, Hamdy A. 1998. Investigación de operaciones una introducción. – México.: Prentice Hall, p. 944.