

## TRÁNSITO DE LA ONDA DE CHOQUE EN CANALES DE ALTA PENDIENTE

*Juan David Montoya V., Mauricio Toro B., Luis Fernando Carvajal S. & Jaime Ignacio Vélez U.*  
*Posgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos, Universidad Nacional de Colombia, Medellín*  
*jdmonto5@unal.edu.co, lfcarvaj@unal.edu.co*

Recibido para evaluación: 13 de Marzo de 2006 / Aceptación: 30 de Junio de 2006 / Versión final: 06 de Julio de 2006

### RESUMEN

El presente trabajo investiga la aplicación del tránsito de la onda cinemática con ajuste de la onda de choque en el caso del tránsito hidráulico (unidimensional) en canales de alta pendiente; se considera éste como un primer acercamiento al tema del tránsito de ondas o hidrógrafas de rápido crecimiento, asociadas al rompimiento de presas o a eventos hidrológicos extremos. Bajo esta premisa se pretende implementar una teoría hidráulica que aproxime una solución numérica al tránsito de flujo no permanente, apoyada en el método de las características. Para cumplir con este objetivo se realiza una extensiva revisión del estado del arte en el tema y se comparan diferentes esquemas numéricos (1D), ampliamente usados en casos de aplicación en cuencas de montaña. En este trabajo no se realiza una validación del modelo numérico planteado a partir de la ecuación de conservación de movimiento, sin embargo se proponen una serie de comparaciones en casos con solución analítica, los cuales muestran la importancia de usar ecuaciones de Saint-Venant simplificadas en este tipo de sistemas.

Se concluye que la teoría de las *soluciones débiles* y el uso del método de las características permiten definir un modelo matemático que se puede aproximar de mejor manera al problema físico.

**PALABRAS CLAVES:** Ondas de Choque, Transitorios Hidráulicos, Ecuaciones de Saint-Venant, Método de las Características, Modelos Numéricos, Onda Cinemática

### ABSTRACT

In this study, the flow routing in sloping channels acting as a principal flow control has been analyzed. The main focus of the research is characterized by the study of one dimensional system. A state-of-the-art review of transient flow routing, the theoretical development of the main models for high slope channels without backwater effects, the numerical scheme representation, and the application in cases with theoretical solution are presented. In this study a numerical method based in the kinematic wave routing is developed to solve the Saint-Venant equations for high slope conditions. In this case, the method of characteristics is particularly suitable for the representation of the solution with high slope condition. A previous validation of the theoretical model shows that if a shock wave can be generated in a river, the complete Saint-Venant equations are not valid near to the discontinuity. As a result, the weak solutions theory and the use of the method of characteristics allow defining a mathematical model that can be approximated to the physical reality of the phenomenon.

**KEY WORDS:** Shock Wave; Hydraulic Transients, Saint-Venant Equations, Method of the Characteristics, Numerical Models, Kinematic Wave.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería (hidrológica e hidráulica) los modelos de tránsito de onda han permitido obtener una buena descripción de la propagación de hidrógrafas en aguas pandas tales como ríos, flujo por el terreno, redes hídricas; y adicionalmente determinar la altura requerida para estructuras de control tales como puentes, diques, vertederos y obras de protección.

En la práctica se utilizan modelos capaces de simular una corriente unidimensional en condiciones de flujo permanente a través de la ecuación de la energía y para régimen no permanente, aplicando las ecuaciones de Saint-Venant completas (ejemplo programas como HEC-RAS y DAMBRK). En el tránsito en alta pendiente (pendiente del terreno  $So > 5\%$ ), los modelos de régimen no permanente producen soluciones inestables por la alta acumulación de errores (Singh, 2002<sup>b</sup>, Tsai, 2003); en estos casos la aproximación de la onda cinemática permite obtener resultados satisfactorios en cuanto a la estabilidad de los modelos (normalmente presentados en diferencias finitas explícitas); pero al no tener en cuenta el desarrollo de la onda de choque (Shock wave) al interior de la solución, la masa transportada por el hidrograma se distribuye de acuerdo al uso del modelo numérico y a la malla numérica empleada, es así como en el caso del método de la onda cinemática se observan los efectos de atenuación del hidrograma (Chow, 1988).

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un modelo numérico que resuelva las ecuaciones de Saint-Venant para condiciones de alta pendiente, donde la onda cinemática (propuesta para un sin número de aplicaciones, no solo a nivel hidráulico, sino también de la hidrología, la acústica, los problemas de tránsito vehicular, entre otros) representa el mejor acercamiento a la solución de las ecuaciones completas (Chow, 1988, Tsai, 2003). Asociado a esto, se propone el acoplamiento de un modelo simple de onda de choque (Whitham, 1974) para la solución de la discontinuidad matemática producida por el rompimiento de la superficie libre de flujo, teoría que se fundamenta en las ondas no lineales y la solución de las líneas características. El modelo propuesto se aplicará en algunos casos de simple validación y luego en un caso asociado al tránsito de la hidrógrafa climática en un tramo de la quebrada Piedras Blancas (Antioquia, Colombia).

## 2. ESTADO DEL ARTE

A través del tránsito de avenidas se determinan caudales, niveles y velocidades de flujo a medida que una onda transita por el canal (HEC, 1997; Singh, 1998), donde el término canal incluye ríos, corrientes, quebradas, canales artificiales, túneles, cauces, etc. Existen básicamente dos tipos de tránsito: agregado y distribuido; el primero enfocado a la determinación de la hidrógrafa de respuesta del canal aguas abajo del sistema, usando relaciones caudal-almacenamiento variables, del cual Chow (1988) y Singh (1988) dan un completo tratamiento teórico; el segundo tipo es desarrollado para conocer, en cada punto del espacio y del tiempo ( $x, t$ ), las propiedades hidráulicas básicas tales como caudales y niveles.

En el tránsito distribuido se aplican los métodos hidráulicos, los cuales efectúan el cálculo simultáneo de dos variables, permitiendo al modelo aproximarse en mejor forma a las condiciones reales de flujo no permanente que ocurren durante la propagación de crecidas, esto mediante el establecimiento de una malla numérica coherente.

En aplicaciones en alta pendiente se considera que las variaciones espaciales de velocidad a lo ancho del canal y con respecto a la profundidad pueden ignorarse, de tal manera que el proceso de flujo puede aproximarse como si variara solamente en una dirección o dimensión espacial, en nuestro caso la dirección de flujo (Macchione, 2003; Tsai, 2003). El desplazamiento de la onda, en régimen no permanente y flujo unidimensional, se define a partir del uso las ecuaciones de conservación de la masa y de cantidad de movimiento, propuestas por Barre de Saint-Venant en 1871 (Cunge, 1980; Chow, 1988) y que se presentan a continuación.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0 \quad (1)$$

En la Ecuación 1 de conservación de masa, el primer término se asocia a la variación de la masa al interior del volumen de control, el segundo término incluye la variación del caudal a lo largo de la dirección de flujo y el tercer término es el flujo lateral (precipitación, infiltración, etc), el cual se puede ignorar, si se compara con el caudal que circula por el canal principal (Cunge, 1980; Singh, 1996).

$$S_f = S_0 - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2)$$

con

$$\frac{\partial y}{\partial x} + S_0 = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3)$$

La Ecuación 2 de conservación de cantidad de movimiento en su forma no conservativa permite identificar a  $\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t}$  como el término de aceleración local;

$\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x}$  la aceleración convectiva;  $\frac{\partial y}{\partial x}$  la presión diferencial;  $S_0$  la pendiente del fondo (efectos gravitacionales); y  $S_f$  la pendiente de fricción (fuerzas friccionales). Según la Ecuación 3 los métodos simplificados de la ecuación de Saint-Venant se clasifican como:

1. **Tránsito de la onda cinemática**, recomendada en zonas con alta pendiente donde se asume que el flujo es gradualmente variado y se desprecian efectos hacia aguas arriba del canal, como curvas de remanso (Chow, 1988; Vélez, 1989; Singh, 2001; Tsai, 2003; Macchione, 2003). Su aplicabilidad no solo es en tránsito de canales, sino también en hidrología de zonas urbanas (alcantarillados, acueductos, sistemas de riego), flujo por la ladera, rompimiento de presas, entre otros (Whitham, 1974; Singh, 2002). Este trabajo busca acoplar un modelo de onda de choque, resuelto con base en la teoría de los choques débiles (*weak solution*), a la onda cinemática.

2. **Flujo no uniforme permanente, aproximación de la onda difusiva**. (*Non-inertial wave*); se limita a hidrógrafas moderadas y no es aplicable al caso de rompimiento de presas (Singh, 1996; UCUENCA, 2002). Se pueden incluir los efectos aguas arriba en el tránsito (*back-water effects*).

3. **Flujo no uniforme permanente, aproximación de onda dinámica cuasi-permanente**. (*Quasi-Steady Dynamic wave*); en general esta simplificación de las ecuaciones no se usa en el

tránsito no permanente, debido a que al introducir solo el término de aceleraciones convectivas en la Ecuación 3 se generan errores numéricos (USACE, 1994; Singh, 1996; Tsai, 2003).

4. **Flujo no uniforme no-permanente, onda difusiva completa**. (*Dinamic Wave*); en caso de ríos de baja pendiente, con efectos importantes de almacenamiento del canal y efectos de remanso no despreciables, las fuerzas inerciales se hacen importantes y por ende es necesario el tránsito de la onda dinámica. Esta proporciona las soluciones más aproximadas a través del uso de diferentes esquemas numéricos (Chow, 1988; USACE, 1994; Singh, 1996; Bustamante et al, 2005), y en algunos casos con la inclusión del método de las características (Strelkoff, 1970).

Varios trabajos (Ponce, 1978; USACE, 1994; Singh, 1996; Tsai, 2003) presentan diferentes criterios para definir cual modelo (simplificado o completo) se debe usar en un caso en particular, permitiendo disminuir la incertidumbre en el caso de aplicaciones prácticas en la ingeniería. Otros autores como (Moramarco et al., 2000) presentan una solución linealizada de las ecuaciones de onda y la definición de la región donde se puede aplicar cada uno de los métodos mencionados.

Con respecto al problema del tránsito de crecientes con el acople de la onda de choque, se estudia la liberación súbita de una masa de fluido que se desplaza hacia aguas abajo en forma de un frente de onda, problema que se conoce como "*DAMBREAK*" (Chow, 1988; Toro, 2000). Este problema se asocia a la apertura súbita de una compuerta, el deslizamiento de una masa sólida dentro de un embalse o cuando ocurre una lluvia extraordinariamente intensa. Vélez (1989), presenta una revisión de los primeros trabajos experimentales y sus respectivas soluciones, llegando a la conclusión de que la propuesta llevada a cabo por Whitham (Whitham, 1974) puede ser aplicada en el caso de canales pendientes mediante la onda cinemática. A partir de este trabajo se considera necesario formular un modelo simplificado de tránsito para la alta pendiente, que funcione para secciones no prismáticas (naturales) y que se acople a un mecanismo de ajuste de choque (*shock fitting*).

Un caso similar al de las ondas de choque es la presencia de las ondas rodantes “*roll waves*”, las cuales no son muy comunes en ríos pero sí en canales largos y pendientes. Los trenes de ondas (“*Undular waves train*”) son estudiados por Favre (citado por Frazao y Zech, 2002) con el ánimo de investigar los problemas de navegación y erosión de bancas. En este trabajo no se estudiará el problema de las ondas rodantes, sólo el fenómeno de las ondas de choque y los problemas causados al aplicar metodologías de tránsito de crecientes en canales de alta pendiente. Se buscará solucionar el problema de los choques a través de una metodología denominada “soluciones débiles”, que tiene su base en la teoría de los gases y que será explicado con detalle a continuación.

### 3. MARCO TEÓRICO

La modelación de ondas sigue dos categorías: la primera es la formulación matemática en términos de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas. La segunda clase no puede ser caracterizada fácilmente y es denominada dispersiva, su definición se basa en un tipo de solución (Whitham, 1974).

El prototipo de la onda hiperbólica se toma generalmente como la ecuación de onda, la cual se usa en problemas de acústica, elasticidad y electromagnetismo y su forma general se representa como  $\varphi_{tt} = c_o^2 \nabla^2 \varphi$ , que en el caso más simple (una sola onda) se puede representar como:

$$\varphi_t + c_o \varphi_x = 0 \quad (4)$$

Con  $c_o$  constante.

Numerosos problemas de propagación de ondas conllevan

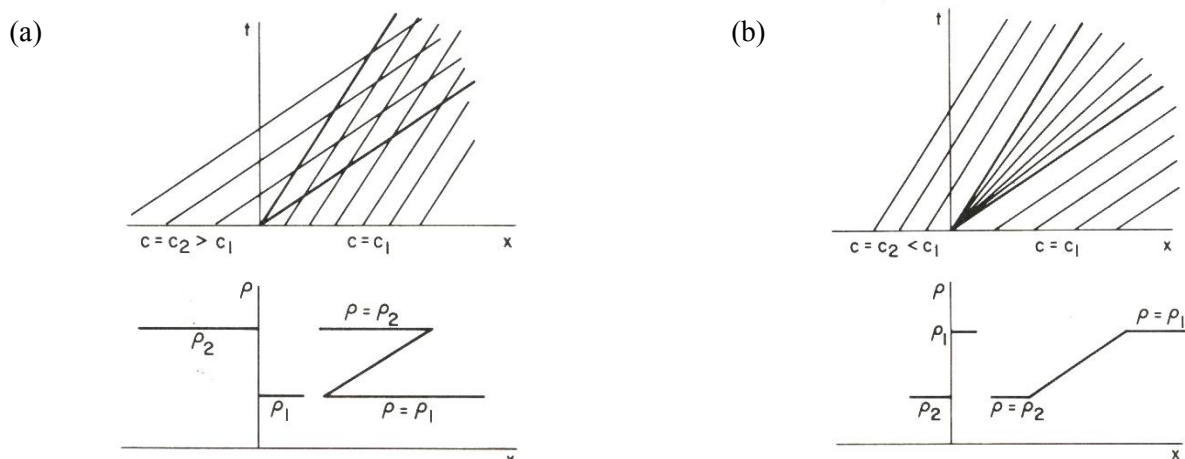
a formas de la ecuación de onda no tan triviales, con la inclusión de términos que proporcionan la *no linealidad* y que se pueden asociar a la onda cinemática. Para esto convertimos la Ecuación 4 en la ecuación no lineal más simple o ecuación cuasilineal (Whitham, 1974):

$$\rho_t + c(\rho) \rho_x = 0 \quad (5)$$

Donde la velocidad de propagación es función de la perturbación local  $r$ . La principal característica de la no-linealidad es el rompimiento de las ondas en ondas de choque, “*shock waves*”, referida a cambios abruptos en la presión, densidad y velocidad. En el caso de este tipo de expresión, las soluciones pueden ser muy variadas y una aproximación consiste en considerar la función  $r(x,t)$  en cada punto del plano  $(x,t)$ , donde  $\rho_t + c(\rho) \rho_x$  es la derivada total de  $\rho$ , a lo largo de la curva, la cual tiene pendiente:

$$c(\rho) = \frac{dx}{dt} \quad (6)$$

La solución consiste en encontrar la curva  $c(r)$  en el plano  $(x,y)$  que satisfaga la Ecuación 6, la cual para este caso es realmente una línea recta. Estas líneas usadas en la construcción de la solución se denominan *curvas características*, y juegan un papel importante en todos los problemas que incluyen ecuaciones diferenciales hiperbólicas. El comportamiento de la solución en una curva característica corresponde a la idea que la información es transportada por la onda y es válida hasta el momento en el cual se produzca la intersección de dos o más líneas características, punto a partir del cual se genera una *discontinuidad*. Un ejemplo de esto se presenta en la Figura 1.



**Figura 1.** Dos casos extremos (a) Rompimiento – La onda aguas arriba tiene mayor velocidad y mayor profundidad, lo que produce una solución discontinua. (b) Onda de expansión – La solución es continua. (Tomado de Whitham, 1974).

En la Figura 1-a,  $c'(\rho) > 0$ , es decir, la celeridad aumenta con la perturbación  $\rho$  y  $\rho_2 > \rho_1$ . Aquí las líneas características se agrupan en la zona en la cual las derivadas son discontinuas y donde se presentan múltiples soluciones. Lo anterior se puede traducir en valores de  $\rho$  que avanzan más rápido que otros, induciendo al *rompimiento*. Cuando la onda rompe, se encuentra una triple solución “doblez” para  $\rho(x, t)$ , sobre cualquiera de las características. El otro caso (Figura 1-b) corresponde a la función de paso  $\rho_1 > \rho_2$  y  $c_1 < c_2$ , para el cual existirá una solución continua enmarcada en una onda de expansión (rarefacción); se observa la formación de un abanico de soluciones, sin discontinuidad.

La aproximación de la onda cinemática se deduce a partir de las ecuaciones de Saint-Venant para un volumen de control definido, donde las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento se reducen a:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dQ}{dx} - q = 0 \quad (7)$$

$$(S_o - S_f) = 0 \quad (8)$$

Como se mencionó anteriormente, en algunos casos típicos de tránsito de crecientes, en la Ecuación 7, de continuidad se desprecia el caudal lateral ya que la hidrógrafa de entrada es de varios órdenes de magnitud mayor que el caudal base de la cuenca, aportes por infiltración, etc. La Ecuación 8 resulta de suponer que los gradientes de energía debido, a las aceleraciones locales y convectivas, son muy pequeños con respecto a los efectos gravitacionales y de fricción. Además en ríos con una pendiente lo suficientemente grande y sin efectos aguas arriba, el término de presión  $dy/dx$  en la Ecuación 3, de conservación de momentum es muy pequeño comparado con  $dh/dx$ .

De esta manera existe una relación única entre el área mojada y el caudal para un punto  $x=x_p$ , la cual puede ser válida para obtener resultados como velocidades de propagación y perfiles de onda durante el tránsito de la onda cinemática (Cunge et al., 1980; Chow, 1988), ver Figura 2.

A partir de la suposición anterior, la ecuación de conservación de momentum se puede expresar a través de una ley de resistencia al flujo (Manning, Chezy, etc.), de la siguiente manera:

$$Q = \alpha_2 A^{\beta_2} \quad (9)$$

Donde  $\alpha_2$  y  $\beta_2$  se relacionan con la geometría y la rugosidad para flujo uniforme (Chow, 1988, Singh, 2002). Diferenciando la Ecuación 9 respecto al tiempo y reemplazándola en la ecuación de conservación de masa, Ecuación 7 se tiene:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \alpha_2 \beta_2 A^{(\beta_2-1)} \frac{\partial A}{\partial x} = q \quad (10)$$

La cual presenta la misma forma que la Ecuación 5 si asumimos  $q=0$ . Obsérvese que si en la Ecuación 5  $\rho$  se reemplaza por el área de la sección transversal del canal,  $A$ , la Ecuación 10 presenta la forma de una ecuación hiperbólica con la solución dada por las líneas características.

La Ecuación 10 es la que gobierna la onda cinemática y se resuelve normalmente por diferencias finitas implícitas o explícitas (Cunge, 1980, Chow, 1988). De igual manera, la ley de resistencia se puede expresar en términos del caudal:

$$A = \alpha Q^{\beta} \quad (11)$$

Aplicando la derivada temporal y reemplazando en la ecuación de conservación de masa, se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha \beta Q^{\beta-1} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right) = q \quad (12)$$

La solución analítica del conjunto de Ecuaciones 9 y 10 ó 11 y 12 se puede obtener mediante la aplicación de las ecuaciones características; las cuales representan la celeridad de la onda cinemática ( $c_k$ ) y en consecuencia, el parámetro no lineal que varía a lo largo del canal y que depende de la geometría del mismo. Las ecuaciones características se presentan a continuación:

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha \beta Q^{\beta-1}} \quad (13)$$

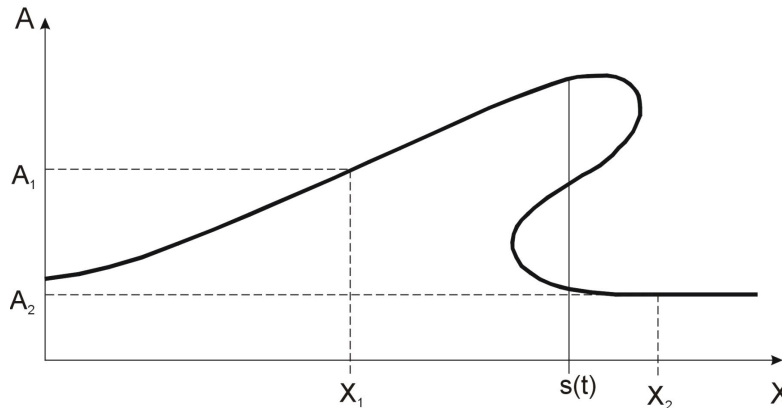
$$c_k = \frac{dx}{dt} = \frac{dQ}{dA} \quad (14)$$

En el caso de canales de alta pendiente la solución numérica de las ecuaciones completas de Saint-Venant genera oscilaciones numéricas inducidas por el método de solución (Tsai, 2003). Éste es un problema asociado a la no linealidad del flujo, que tiene explicación desde el punto de vista matemático (pendiente infinita, varias soluciones, discontinuidades como el “bore” y la onda

de choque) y físico (transporte de masa y continuidad de la misma).

Whitham (1955) y Borah et al., (1980) analizan la forma de la onda de choque debida al comportamiento no lineal

de flujo. Aquí, la física del problema se tiene en cuenta y permite, a través de esquemas lineales simples, proponer el manejo del frente de onda mediante la solución débil (*Weak solution*).



**Figura 2.** Esquema de un volumen de control, antes y después del choque. (Adaptado de Whitham, 1974)

Cuando el rompimiento ocurre,  $Q$  y  $A$  no son diferenciables en la Ecuación 7, luego para poder aplicar la ecuación de conservación de masa se asume (volumen de control de la Figura 2) una discontinuidad o choque en un punto  $x=s(t)$  entre  $x_1$  y  $x_2$ , tal que  $x_2 > s(t) > x_1$ . Que a través de un proceso matemático simple (Whitham, 1974), se convierte en:

$$Q_1 - Q_2 = U(A_1 - A_2) \quad \text{ó} \quad U = \frac{Q_1 - Q_2}{A_1 - A_2} \quad (15)$$

La Ecuación 15 cumple con la ecuación de continuidad de la masa y es conocida como la condición de *Rankine-Hugoniot* el cual expresa la velocidad del punto de rompimiento en función de la velocidad de grupo  $U$  o velocidad de la onda de choque.

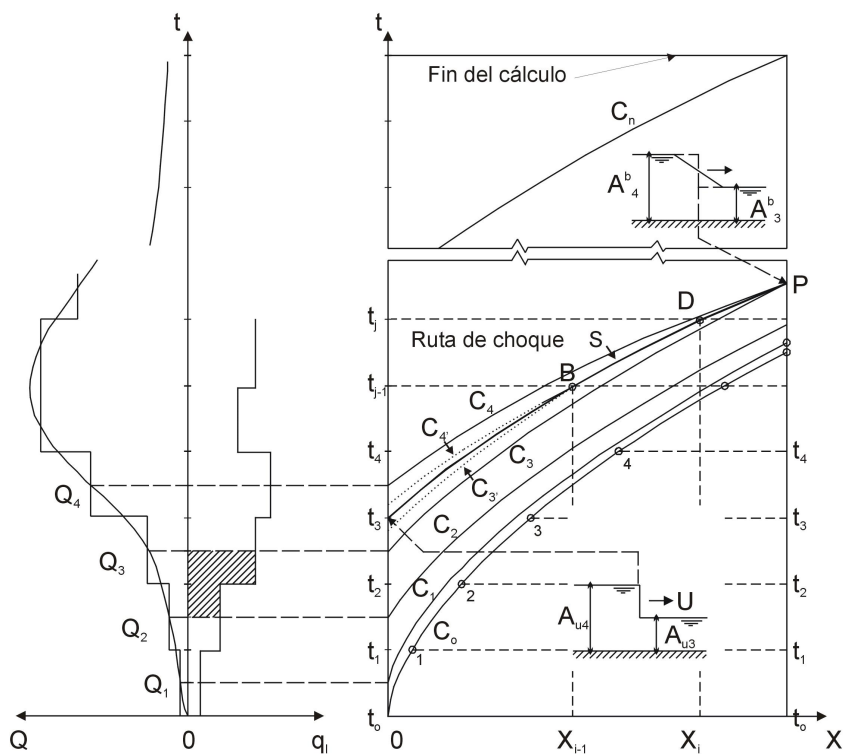
El proceso de solución de la onda cinemática mediante el ajuste de onda de choque "*shock fitting*" (Whitham, 1974; Borah et al., 1980; Toro, 2000) consiste en "trazar" los choques en el plano característico y determinar el punto exacto en el cual dos líneas características se interceptan. Históricamente esto se conoce como el "problema de los tres puntos" (Borah et al., 1980) y requiere la solución simultánea de las Ecuaciones características 13 y 14 y la expresión para la velocidad del choque, Ecuación 15. La alternativa de solución, desarrollada en este trabajo,

consiste en restringir los choques a choques artificiales de pequeñas amplitudes de onda (*choques débiles*). Esto significa (Figura 3) que un posible choque formado por las características  $c_3$  y  $c_4$  (punto P) no debe ser muy diferente (en lo que respecta a su trayectoria hasta el final del elemento de cascada) al choque formado por las características  $c_3'$  y  $c_4'$  (punto B); lo anterior debido a que las áreas de flujo adelante del choque, llevadas por  $c_3$  y  $c_3'$ , o las áreas de flujo que viajan atrás del choque, llevadas por  $c_4$  y  $c_4'$  no difieren mucho entre sí. Si esto se cumple, se puede postular, a partir de la teoría de los choques débiles, que los choques en los puntos P y B no difieren significativamente, lo que permitirá establecer un modelo numérico más eficiente.

Para cumplir con lo anterior la condición necesaria y suficiente para que se produzca el rompimiento (Figura 3) es:

$$c_1 > U > c_2 \quad (16)$$

Luego la onda de choque, que viaja con velocidad de grupo  $U$ , no es más rápida que la celeridad de la onda aguas arriba, ni menor que la celeridad de la onda aguas abajo. Con el establecimiento de la Ecuación 16, se tienen las ecuaciones necesarias para el desarrollo del método de las características con ajuste de la onda de choque y su solución numérica.



**Figura 3.** Solución por el método de las características con ajuste de la onda de choque. (Adaptado de Borah et al., 1980).

#### 4. MODELO NUMÉRICO

Las soluciones numéricas de las ecuaciones de onda cinemática y onda dinámica a través del método de diferencias finitas se resumen en Montoya, (2005) y Bustamante et al., (2005). A continuación se presenta el modelo numérico para la solución de la ecuación de la onda de choque.

El procedimiento para la solución consiste en trazar inicialmente las líneas características asociadas al hidrograma de creciente, el cual es discretizado en una malla numérica que cumple con la condición de Courant. Las líneas características son trasladadas al interior de un elemento de cascada (Kibler y Woolhiser, 1970), para el cual las propiedades del canal permanecen constantes. La metodología propuesta es presentada en (Borah et al., 1980) y consiste en trasladar las ecuaciones de las líneas características y acoplarlas con los parámetros no lineales de la ecuación de momentum, como se presenta a continuación.

$$\frac{dA}{dt} = q \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = \alpha_2 \beta_2 A^{\beta_2 - 1} \quad (17)$$

donde  $\alpha_2$  y  $\beta_2$  son los parámetros no lineales (Montoya, 2005).

$$\alpha_2 = \left( \frac{\phi a_1^{2/3} (S_o)^{1/2}}{n} \right) \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{2b_1 + 3}{3} \quad (18)$$

Cuando se presenta un caudal lateral constante, las curvas características corresponden a líneas curvas (Borah et al., 1980). Si no se tiene en cuenta el caudal lateral, el área de flujo y el caudal a lo largo de una línea características, son constantes.

Para la solución de la onda cinemática por medio de las ecuaciones características se discretiza el canal en tramos donde se considera la sección constante a lo largo del mismo (cascada cinemática). El primer tramo presenta las condiciones iniciales (hidrograma de caudales o niveles), este hidrograma se transita a través de la aplicación de las ecuaciones características para llevar la onda cinemática a través de cada elemento de cascada. A continuación se presentan las Ecuaciones 13 y 17 en diferencias finitas, de la siguiente forma:

$$A_{j+1}^{j+1} = A_j^j + q_j^j \Delta t^j \quad (19a)$$

$$A_{i+1}^{j+1} = \left[ (A_i^j)^{\beta_2} + \frac{q_l^j}{\alpha_2} \Delta x_i \right]^{1/\beta_2} \quad (19b)$$

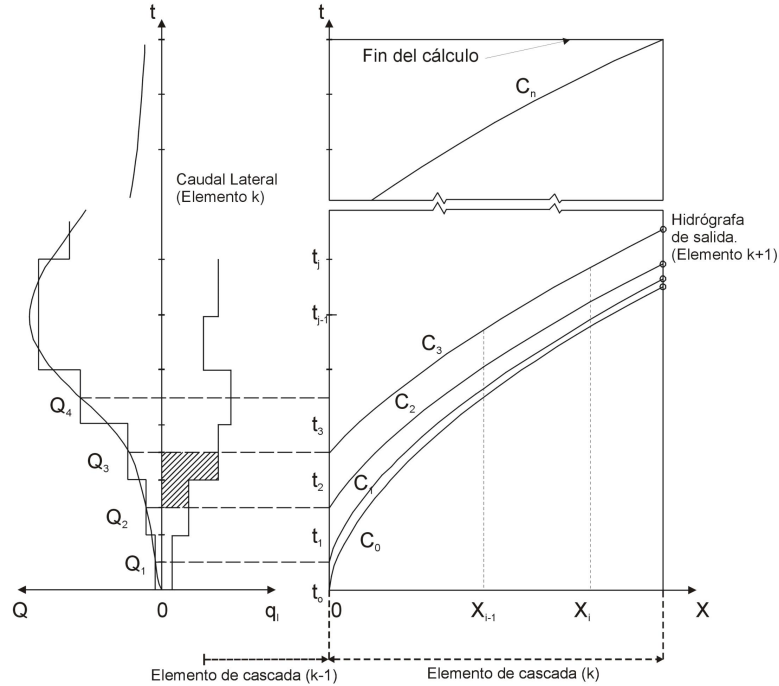
$$Q_{i+1}^{j+1} = Q_i^j + q_l^j \Delta x_i \quad (19c)$$

Ahora las ecuaciones para dibujar las líneas características, al interior de un elemento de cascada (Figura 4), considerando caudal lateral constante entre

dos puntos  $(x_{i-1}, t_{i-1})$  y  $(x_i, t_i)$  son:

$$\Delta x_i = \frac{\alpha_2}{q_l^j} \left[ (q_l^j \Delta t^j + A_i^j)^{\beta_2} - (A_i^j)^{\beta_2} \right] \quad (20a)$$

$$\Delta t^j = \frac{1}{q_l^j} \left[ \left( \frac{q_l^j}{\alpha_2} \Delta x_i + (A_i^j)^{\beta_2} \right)^{1/\beta_2} - (A_i^j)^{\beta_2} \right] \quad (20b)$$



**Figura 4.** Elemento de cascada que se encuentra al interior de la malla computacional. (Adaptado de Borah, 1980).

Si el caudal lateral es cero, se tiene lo siguiente:

$$\Delta x_i = \alpha_2 \beta_2 (A_i^j)^{\beta_2-1} \Delta t^j \quad (21a)$$

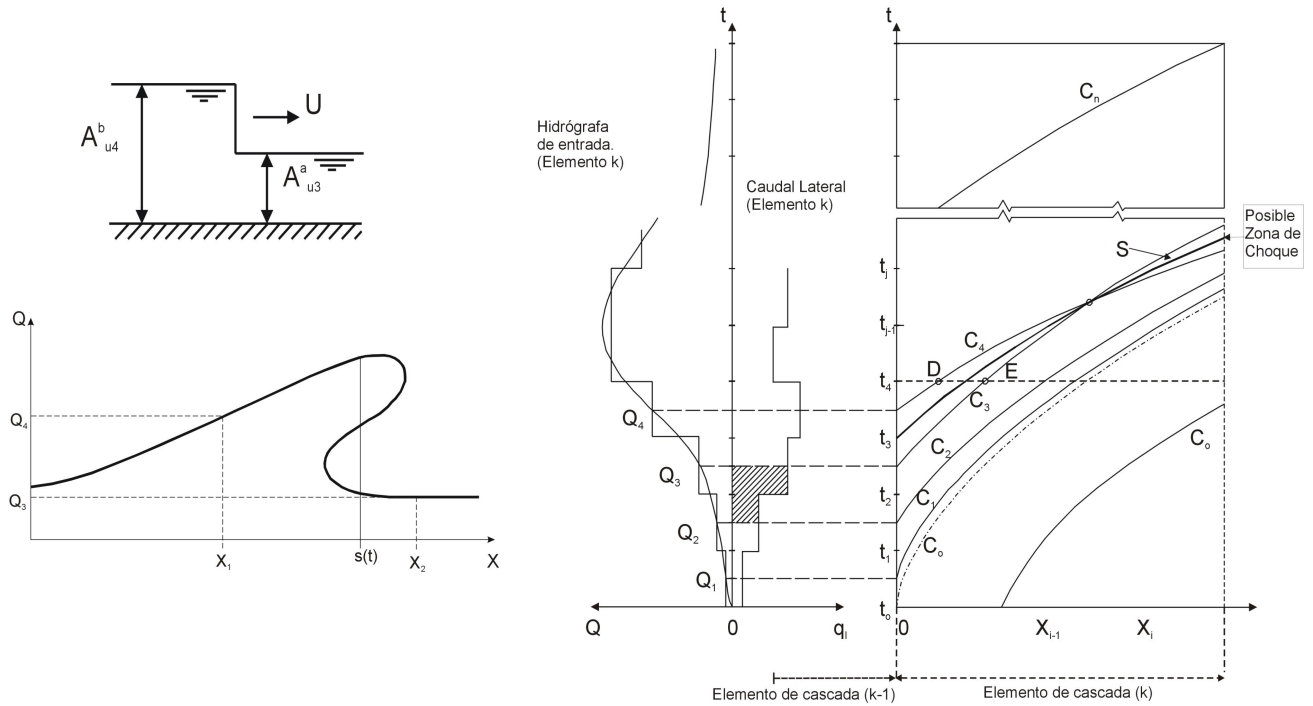
$$\Delta t^j = \frac{1}{\alpha_2 \beta_2} (A_i^j)^{1-\beta_2} \Delta x_i \quad (21b)$$

En el procedimiento numérico, las ecuaciones (19), (20) y (21) se complementan con la relación funcional (11) en forma diferencial  $Q_i^j = \alpha_2 (A_i^j)^{\beta_2}$ , para dibujar las líneas al interior de un elemento de cascada. Para esto se parte de la selección de un tamaño de paso  $\Delta t$  coherente (en nuestro caso que cumpla la condición de Courant), a partir del cual se termina de construir la malla numérica

en el eje del tiempo. Ya que las líneas características no interceptan exactamente el final de un elemento de cascada (punto  $i$  en la malla numérica), se aplica un algoritmo sencillo propuesto por Borah et al., (1980) para encontrar el tiempo  $t_{D^*}$  de tránsito hasta la frontera aguas abajo.

En el caso en que en un tramo se corten las curvas características se presenta un frente de choque y la solución anterior deja de ser válida. Físicamente la celeridad de la onda que viaja aguas arriba es mayor que la de inmediatamente aguas abajo, lo que produce en algún punto en el espacio un frente de onda que rompe, el cual si no se trata correctamente genera pérdida de masa.





**Figura 5.** Cruce de líneas características – la información llevada por  $c_4$  “absorbe” a  $c_3$ . Concepto de velocidad de grupo. (Adaptado de Borah, 1980).

Borah et al., (1980) y Borah (2000) desarrollan un algoritmo aproximado, pero eficiente, para determinar la ruta del choque (“*shock path*”) y el ajuste del mismo (“*shock fitting*”). Esta solución aproximada no identifica exactamente el punto de rompimiento, sino que se utiliza la teoría de los choques débiles para trazar su ruta (dada por  $\Delta t$  y  $\Delta x$ ) y llevar el caudal transitado aguas abajo de una manera conservativa, como se explica a continuación.

Cuando el rompimiento ocurre, la superficie libre desarrolla una pendiente infinita, que en el plano  $x-t$  corresponde a la intercepción de 2 líneas características, donde la continuidad en el área de flujo deja de existir. El cambio súbito en el área de flujo o en la profundidad se interpreta como la iniciación de un choque, que al ser formado prosigue con su propia velocidad (velocidad de grupo), expresada por la Ecuación 15.

La condición necesaria, no suficiente, para la formación de una onda de choque fue presentada en la Ecuación 16 y se relaciona con la pendiente de las líneas características; para la Figura 5 ésta es:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_E < \left. \frac{dx}{dt} \right|_D \quad (22)$$

Que se puede expresar como:

$$\left[ Q_{U,k}^{(2)} \right]^{1/\beta_2^k} - \left[ Q_{U,k}^{(1)} \right]^{1/\beta_2^k} > \alpha_{2,k}^{1/\beta_2^k} q_{l,k} \Delta t^{j+1} \quad (23)$$

Luego del rompimiento, la onda cinemática deja de describir el comportamiento físico del flujo y usamos la ecuación de la onda de choque. La implementación del método del ajuste de la onda de choque a través del uso de las ecuaciones características consiste en resolver simultáneamente las ecuaciones (20) o (21) y la expresión que define la velocidad de grupo:

$$U(x, t) = \frac{dx}{dt} = \frac{Q^b(x, t) - Q^a(x, t)}{A^b(x, t) - A^a(x, t)} \quad (24)$$

Donde el superíndice  $b$  significa antes (atrás) de la onda de choque y  $a$  después (adelante) de la onda (puntos asociados a  $t_4$  y  $t_3$  en la Figura 5).

La metodología de solución del ajuste de la onda de choque a las ecuaciones características consiste en aplicar inicialmente el tránsito a través de las líneas características. Posteriormente se evalúa en cada paso de tiempo  $\Delta t$ , la condición de rompimiento, Ecuación 23, que puede ser escrita de una manera más simple como:

$$A_i^{j+1} - A_i^j > \frac{1}{2}(q_i^{j+1} + q_i^j)\Delta t \quad (25)$$

Aplicable para  $q=0$ .

Una vez definido el  $\Delta t$  se halla el correspondiente  $\Delta x$ , a través de las siguientes expresiones (similares a las presentadas en Borah, 1980).

$$\Delta x_i = \alpha_2 \frac{(A_{i+1}^{j+1(1)})^{\beta_2+1} - (A_{i+1}^{j+1(2)})^{\beta_2+1} - (A_i^{j(1)})^{\beta_2+1} + (A_i^{j(2)})^{\beta_2+1}}{(\beta_2 + 1)(A_i^{j(1)} - A_i^{j(2)})q_i^j} \quad (26)$$

si  $q_i^j \neq 0$

$$\Delta x_i = \Delta t^j \frac{Q_i^{j(1)} - Q_i^{j(2)}}{A_i^{j(1)} - A_i^{j(2)}} \quad \text{si } q_i^j = 0 \quad (27)$$

Las ecuaciones anteriores se complementan con la Ecuación 19 para evaluar los valores antes y después del choque, a través de la relación funcional

$Q_i^j = \alpha_2 (A_i^j)^{\beta_2}$ . Este procedimiento “explícito” se repite hasta completar la longitud del elemento de cascada, y al igual que en el método de las características, se aplica un algoritmo para encontrar el tiempo de llegada de la onda de choque al final de dicho elemento. La condición

propia del choque (área de flujo) se calcula como:

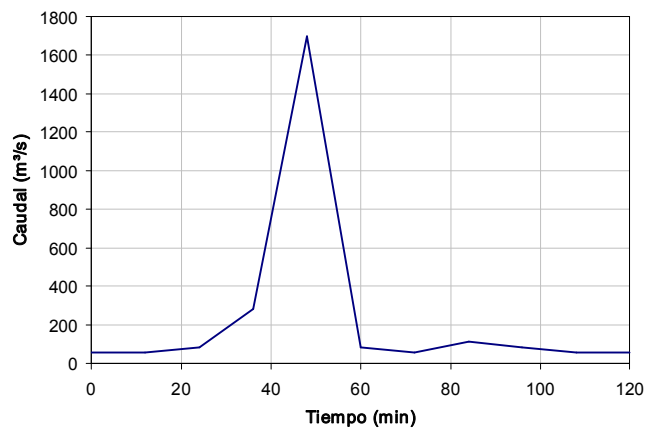
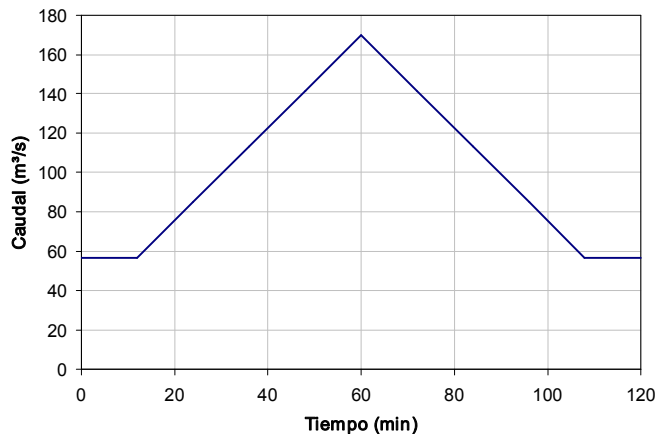
$$A(x, t) = \frac{1}{2} [A^{(1)}(x, t) + A^{(2)}(x, t)] \quad (28)$$

El ajuste lineal obedece a la misma condición de choques débiles. Aquí no se aplica una discontinuidad matemática, sino que se asume que los frentes de onda tienen longitudes finitas que son inducidas como rompimiento, y que presentan una forma suave, tal como el de la onda monoclinica.

De esta manera se “lleva” la conservación de la masa a través de la onda de choque para un elemento de cascada. Es importante notar que dentro del algoritmo de solución se tiene en cuenta la confluencia de choques y que se explica en Whitham (1974).

## 5. RESULTADOS

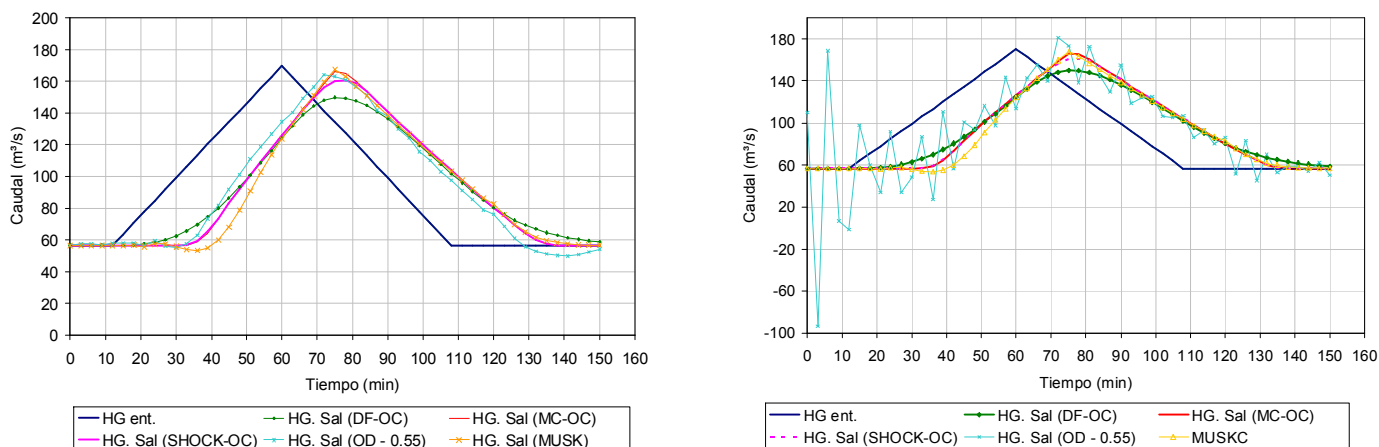
Para efectos de aplicación, se presenta inicialmente casos con solución analítica, pasando luego a simulaciones de rompimiento de presa y finalizando con una aplicación en un caso real. Para los casos analíticos la geometría corresponde a un canal rectangular de 61 m de ancho, con una longitud del 4500 m, rugosidad de Manning  $n=0,035$  y los siguientes datos de entrada (Figura 6).



**Figura 6.** Hidrógrafas de entrada para los casos de aplicación en canal prismático.

Los resultados de la hidrógrafa triangular se presentan en Chow, (1988). Como primer ejercicio se aplican diferentes modelos de tránsito para una pendiente del 1%,

el caudal lateral se desprecia y se desea comparar el modelo de onda dinámica con control de niveles aguas abajo (Figura 7).

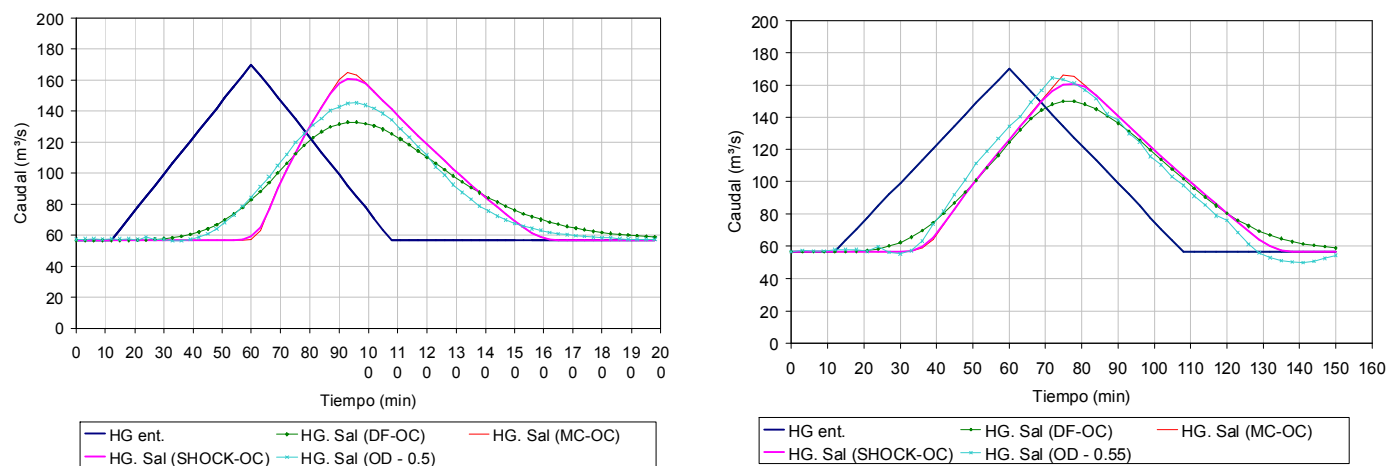


**Figura 7.** Resultados (ultima sección) en la aplicación de los métodos de onda cinemática en diferencias finitas (DF-OC), método de las características (MC-OC), onda dinámica con  $\tau=0.55$  (OD), el método de Muskingum y el método del ajuste de la onda de choque (SHOCK-OC). A la izquierda se presenta la onda dinámica con control aguas abajo, a la derecha el mismo caso con altura constante de 2 m.

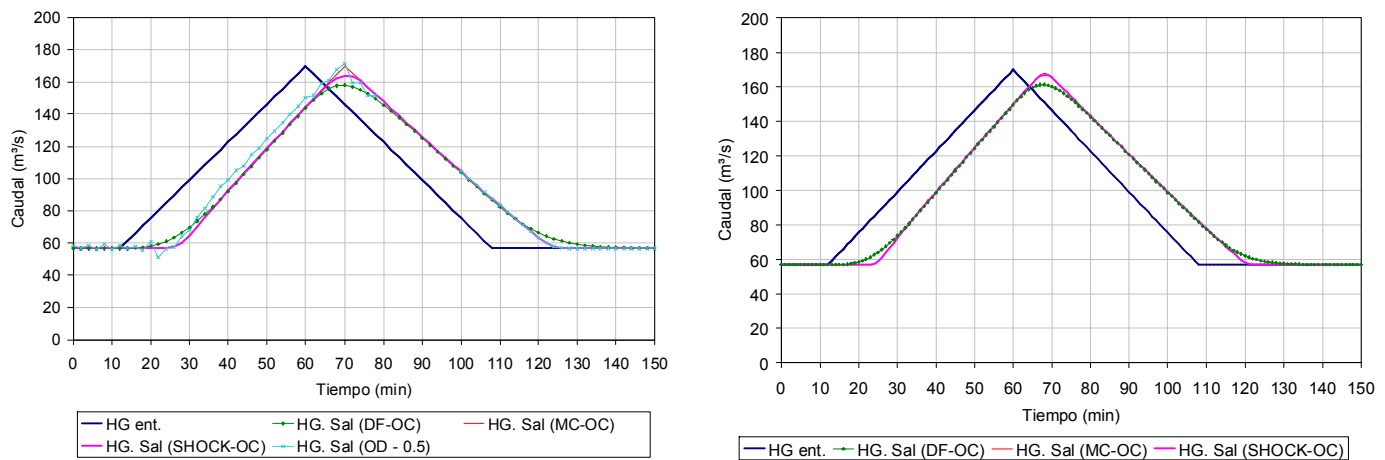
Las condiciones de frontera aguas abajo han sido definidas a partir de los modelos cinemáticos, con el objetivo de no generar controles artificiales que produzcan efectos de remanso. El primer caso presenta claramente la importancia de incluir controles “coherentes” aguas abajo del canal, en el caso de modelamiento en bajas pendientes y como una mala elección de estas condiciones se generan oscilaciones en el modelos dinámico para altura constante aguas abajo. Se aprecia que aún en

pendiente moderada, los modelos cinemáticos se ajustan de buena manera a los modelos dinámicos, siempre y cuando no existan controles aguas abajo.

El segundo caso consiste en comparar los resultados, en la sección aguas abajo, del tránsito de la hidrógrafa triangular, para casos de pendiente variable (Figura 8). El canal sigue siendo prismático con pendiente constante a lo largo del tramo.



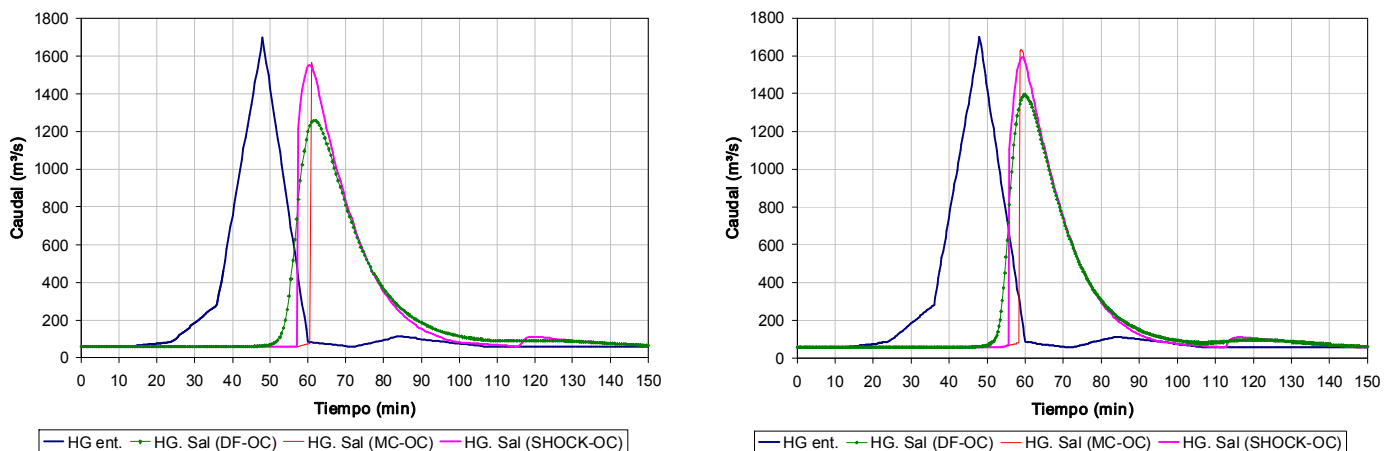
**Figura 8.** Resultados de la aplicación de las diferentes metodologías para pendientes del 0.1%, 1%, 5% y 10%. Caso de hidrógrafa triangular.



**Figura 8. (Continuación)** Resultados de la aplicación de las diferentes metodologías para pendientes del 0.1%, 1%, 5% y 10%. Caso de hidrógrafa triangular.

A medida que la pendiente del canal aumenta la simplificación de las ecuaciones de Saint-Venant en la onda cinemática es la mejor alternativa para el modelamiento de flujo en canales con hidrógrafas de lento crecimiento (respuesta lenta), para el 10% hay difusión numérica en la onda dinámica con cualquier tipo de control aguas abajo, esto es debido al término de aceleraciones locales.

El tercer ejercicio teórico consiste en transitar hidrógrafas de creciente con caudales pico generados en intervalos de tiempo cortos (hidrógrafas de rompimiento o de cuencas torrenciales). Se utiliza el mismo canal prismático que para los casos anteriores, pero la hidrógrafa de entrada tiene un caudal pico 10 veces mayor. Los resultados corresponden a pendientes del canal de 1% y 5% (Figura 9).

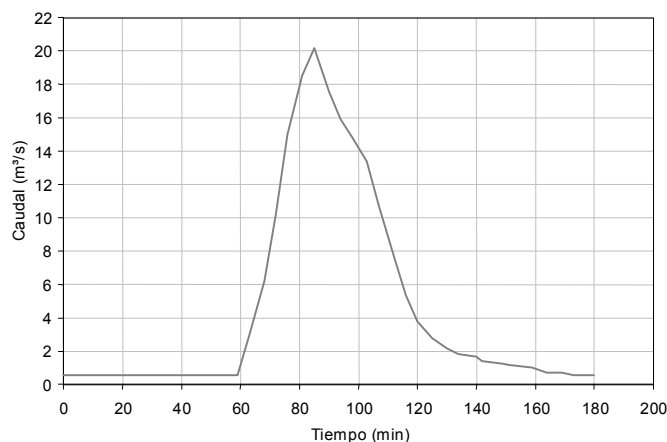


**Figura 9.** Resultados de la aplicación de los métodos de onda cinemática para un caso de hidrógrafa de rompimiento en un canal prismático con una pendiente del 1%.  $x=4500$  m y  $x=8000$  m..

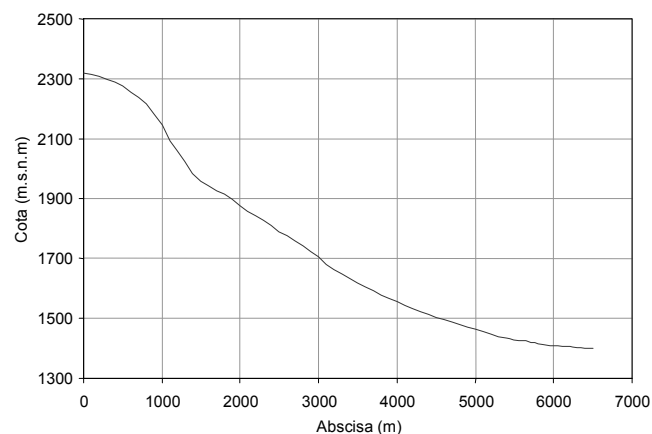
Durante el tránsito de los modelos cinemáticos se observa pérdida de masa en el método de las características, esto ocurre por la intersección de las líneas características que emergen de la malla numérica (Figura 4). En el método del ajuste de la onda de choque, la discontinuidad matemática es tratada físicamente como un choque débil, mejorando notablemente los resultados del tránsito. El

modelo de onda dinámica oscila numéricamente, corroborando lo propuesto por Von Neumann (citado en Chow, 1988), donde al realizar varios análisis de estabilidad a las expresiones propuestas por Fread (citado en Chow, 1988) en el esquema implícito, encuentra que las oscilaciones numéricas aumentan cuando la relación  $\lambda / \Delta x$  disminuye, donde  $\lambda$  es la longitud de la onda de crecida.

Finalmente, para tratar de estimar las ventajas de los modelos cinemáticos, en casos de geometría variable y alta pendiente, se presentan los resultados de tránsito hidráulico de una hidrógrafa climática en la quebrada



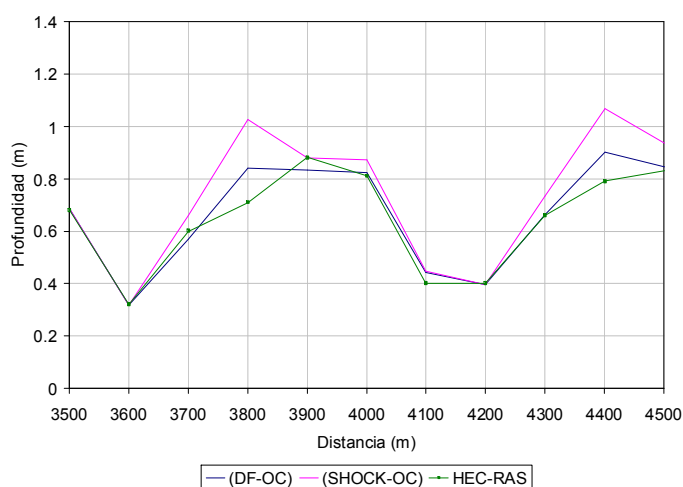
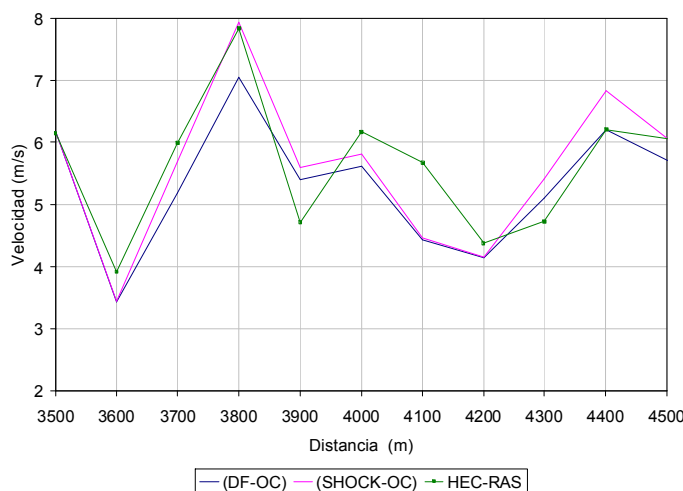
Piedras Blancas (Antioquia, Colombia). La información topográfica se encuentra en Bustamante, (2005). y los principales datos de entrada se presentan en la Figura 10.



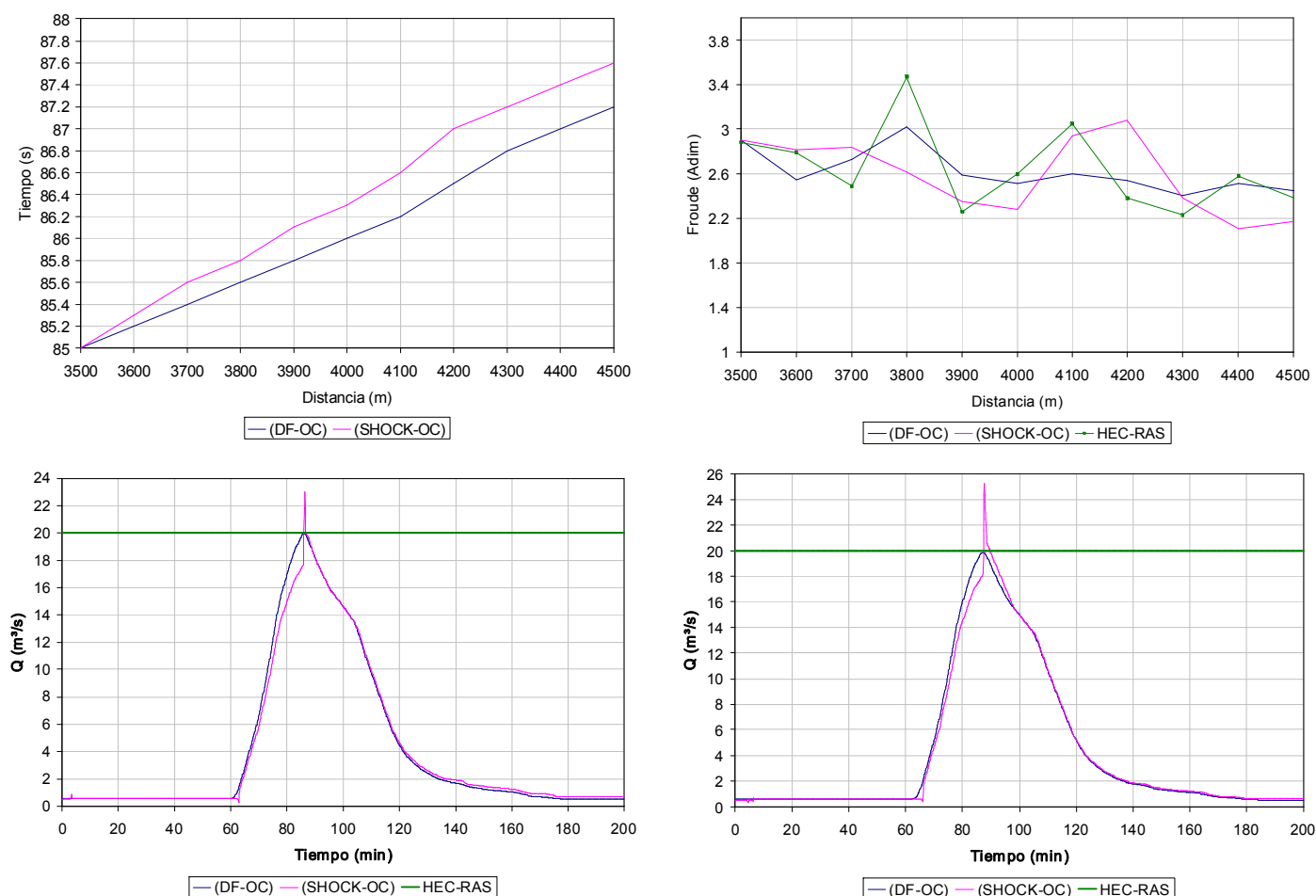
**Figura 10.** Hidrógrafa de entrada (C.I) y perfil del terreno para la Quebrada Piedras Blancas.

La pendiente del cauce principal (Figura 10), es mayor al 20% en los primeros 3500 m de recorrido, pasando luego a una pendiente del 16% (hasta la abscisa 4500 m) para finalizar con una pendiente promedio del 5.3% en la parte final, hasta la desembocadura al río Medellín. Se toma un tramo de 1000 m (Abscisa km 3+500 hasta la abscisa km 4+500), con el objetivo de ver la importancia de incluir la presencia del frente de onda durante el tránsito en una zona de transición de la cuenca.

La comparación se realiza para el tránsito de la onda cinemática en diferencias finitas (DF), onda de choque (SHOCK) por el método de las características y el software HEC-RAS (régimen permanente), el cual es ampliamente usado en el medio. El comportamiento de los diferentes parámetros de flujo (asociados al caudal pico), en cada una de las secciones transversales, y los hidrogramas típicos en dos puntos del canal, se presentan en la Figura 11.



**Figura 11.** Comparación de parámetros entre los diferentes métodos para los valores máximos a lo largo del canal, Hidrograma resultante en la abscisa km4+000 y km 4+500 respectivamente.



**Figura 11. (Continuación)** Comparación de parámetros entre los diferentes métodos para los valores máximos a lo largo del canal, Hidrograma resultante en la abscisa km4+000 y km 4+500k respectivamente.

En las gráficas se puede observar que los tres métodos presentan resultados similares en variables como la velocidad y la lámina de agua; valores que desde el punto de vista ingenieril permitían aprobar el uso de un modelo permanente (que utiliza la ecuación de la energía) en canales muy pendientes.

Si observamos el problema desde el punto de vista matemático y físico; el uso de los métodos no permanentes cobra gran importancia, ya que aparte de darnos gran cantidad de información de parámetros como el caudal, la velocidad y la profundidad en cualquier punto de la malla  $(x, t)$ , guardan al interior de sus ecuaciones la no linealidad presente en el fenómeno. Cabe notar como en el último gráfico se observa un pequeño frente de onda al inicio del hidrograma, el cual hace que el tiempo de viaje sea un poco mayor y que se debe a los *choque débiles* que ocurren al interior de la cascada cinemática o en otros términos en un tramo del canal con geometría constante.

## 6. CONCLUSIONES

A través de los diferentes casos de aplicación se comprueba que en canales pendientes, los esquemas que utilizan la simplificación de la onda cinemática son bastante útiles, tal y como lo reportan Chow, (1988), Singh, (1996, 2002 a y b), Tsai, (2003), Macchione, (2003), etc. El modelo del ajuste de la onda de choque, basado en esta simplificación, permite para estos casos simular los frentes de ondas manteniendo la continuidad en la masa y adicionalmente disminuyendo la atenuación en el caudal pico; fenómeno que en los modelos de diferencias finitas se atribuye a difusión numérica y en el método de las características a la pérdida de la masa transitada.

En condiciones de flujo en canales, donde se pueda generar un frente de onda, las ecuaciones de Saint-Venant no son válidas en las vecindades de la discontinuidad.

En estos casos, un método de solución como el de la onda de choque, permite ajustar las líneas características mediante un algoritmo simple (Borah y Prasad, 1980), basado en la teoría de Whitham, (1974) y que para el caso de hidrógrafas de crecimiento moderado permite visualizar la formación del frente de onda y el retraso en el tiempo de viaje de la misma.

La hipótesis principal bajo la cual se apoya el esquema del ajuste de la onda de choque es la presencia de “choques débiles”. En el caso de hidrógrafas de lento crecimiento los métodos analizados son muy estables; pero al presentarse una hidrógrafa de rompimiento debe refinarse la malla numérica de tal forma que se cumpla la hipótesis que  $(A_2 - A_1)/A_1$  es pequeña. En estos casos el uso de la onda cinemática en diferencias finitas se recomienda, debido a que sus resultados son similares a los de la onda de choque, siempre y cuando la pendiente sea mayor del 10%

Se ha realizado una comprobación de los algoritmos de tránsito de crecientes tanto para casos con solución analítica, como casos en canales naturales. Se espera en un futuro validar este modelo numérico con datos de laboratorio, esto mediante la construcción de un canal rectangular de 20 m de longitud, sección (0.15 m x 0.30 m) y pendiente variable (0% - 11%), el cual se encuentra en proceso de diseño y podría permitir una familiarización con el fenómeno de tránsito de régimen no permanente.

## 7. BIBLIOGRAFIA

Borah, D., Prasad, N. y Alonso, C., 1980, Kinematic wave routing incorporating shock fitting. *Water Resour. Res.*, 16(3), pp. 529 – 546.

Borah, D. K. y Maitreyee, B., 2000, Hydrologic modeling of the Court Creek watershed. Contract report, Illinois Department of Natural Resources.

Bustamante, D., Hernández, J. y Ortiz, C., 2005, Modelamiento del tránsito de crecientes. Universidad Nacional de Colombia. Medellín.

Chow, V.T., Maidment, D.R. y Mays, L., 1988, *Applied Hydrology*. Mac Graw Hill, E.U., 584 P.

Cunge, J.A., Holly, F.M. y Verwey, A., 1980, *Practical aspects of computational river hydraulics*. Pitman advanced publishing program. Boston, MA.

Frazao, S. y Zech, Y., 2002, Undular bores and secondary waves – Experiments and hybrid finite-volume modeling. *J. of Hydr. Res.* 40(1), pp. 33-43

Hydrologic Engineering Center HEC, 1997, *Hydraulic reference manual*. Hydrologic Engineering Center. US Army Corps of Engineers. 609 Second Street. Davis, CA.

Kibler, D. F. y Woolhiser, D. A., 1970, The kinematic cascade as a hydrologic model. *Hydrol. Pap.* 39-66. Colo. State Univ., Fort Collins.

Macchione, F. y Morelli, M., 2003, Practical aspects in comparing shock-capturing schemes for dam break problems. *J. Hydraul. Eng.* 129(3), pp. 187-195.

Moramarco, T. y Singh, V. P., 2000, A practical method for analysis of river waves and for kinematic wave routing in natural channel networks. *Hidrol. Process.* 14, pp. 51-62.

Montoya, J. D., 2005, Tránsito hidráulico en canales de alta pendiente. Universidad Nacional de Colombia. Posgrado en Recursos Hidráulicos. Medellín.

Ponce, V. M., Li, R. N. y Simons, D.B., 1978, Applicability of kinematic and diffusion models. *J. Hydraul. Div., ASCE.*, 104(3), pp. 353-360

Singh, V. P., 1996, *Kinematic wave modeling in water resources: surface water hydrology*. John Wiley, New York.

Singh, V. P., 1988, *Hydrologic systems: Vol. 1. Rainfall-runoff modeling*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Singh, V. P., 2001, Kinematic wave modelling in water resources: a historical perspective. *Hidrol. Process.* 15, pp. 671-706.

Singh, V. P., 2002b, Is hydrology kinematic?. *Hidrol. Process.* 16, pp. 667-716.

Singh, V. P. y Wang, G.T., 1998, Flood peak attenuation and forecast. *J. Hydrol. Eng.* pp.20-25

Strelkoff, T. y Terzidis, G., 1970, Computation of open channel surges and shocks. *J. Hydraul. Div. ASCE.* 96(12). Pp. 2581-2610.

Toro, E., 2000, *Shock – capturing methods for free-surface shallow flows*. Manchester Metropolitan University, UK . John Wiley & Sons, LTD. 307 P.

- Tsai, C. W., 2003, Applicability of kinematic, noninertial, and quasi-steady dynamic wave models for bend-flow simulation. J. Hydraul. Eng. 129 (8), pp.613-627.
- Universidad de Cuenca, 2002, Estudios hidráulicos sobre el tránsito de caudales-proyecto márgenes. Disponible en: <http://rai.ucuenca.edu.ec/proyectos/margenes/EH2.htm>
- US Army Corps of Engineers, USACE, 1994, Flood-runoff analysis. Engineer manual. Department of the Army. U.S. Army Corps of Engineers. CECW-EH, Washington, DC.
- Vélez, J. I., 1989, Estudio del lahar ocurrido el 13 de noviembre de 1985 en el río Chinchiná como consecuencia de la erupción del volcán Nevado de Ruiz. Tesis de Maestría, Universidad Nacional. Medellín. 181 P.
- Whitham, G. B., 1974, Linear and non-linear waves. Wiley-Interscience. New York. 636 P.