

Ajuste de superficies 3-D usando subdivisión de superficies de Catmull-Clark

3-D surface fitting by Catmull-Clark subdivision surfaces

Albeiro Espinosa Bedoya¹, John Willian Branch Bedoya¹ & Germán Sánchez Torres²

1. Universidad Nacional de Colombia - sede Medellín

2. Universidad del Magdalena, Colombia

aespinos@unal.edu.co; jwbranch@unal.edu.co; gsanchez@unimagdalena.edu.co

Recibido para revisión 16 de abril de 2010, aceptado 4 de octubre de 2010, versión final 25 de noviembre de 2010

Resumen— La subdivisión de superficies de Catmull-Clark es una de las técnicas más usadas para obtener superficies suaves mediante el refinamiento sucesivo de una malla de control, ampliamente usado en animación por computador pero con limitaciones de uso en el CAD. Este artículo se concentra en la etapa de ajuste del proceso de reconstrucción digital de objetos tridimensionales, para la cual se propone un método que ajuste superficies por medio de subdivisión de Catmull-Clark tomando como base la cuadrilaterización de la superficie mediante análisis espectral y teoría de Morse.

Palabras Clave— Subdivisión de Catmull-Clark, Subdivisión de Superficies, Suavizado de Superficies, Representación de Objetos 3-D.

Abstract— Catmull-Clark Subdivision surfaces is one of the most widely used techniques for smoothing surfaces by successive refinement of a control mesh, widely used in computer animation but limited on CAD applications. This paper is related to surface fitting stage within 3-D digital surface reconstruction and propose a method for surface fitting by Catmull-Clark Subdivision, based on mesh quadrangulation using spectral analysis and Morse Theory.

Keywords— Catmull-Clark Subdivision, Subdivision Surfaces, Surface Smoothing, 3-D Objects Representation.

1. INTRODUCCIÓN

La reconstrucción digital de objetos 3-D es una técnica que permite obtener modelos digitales de objetos a partir de los reales. El objetivo es representar matemáticamente la superficie, tal que, esta sea fiel en sus dimensiones y detalles a

la original. Esto requiere de una serie de etapas las cuales se describen en [29] y que de forma general se pueden clasificar en: adquisición de datos, registro, integración y ajuste de superficies, el proceso completo es mostrado en la Figura 1. Los detalles de cada una de estas etapas son descritos con mayor amplitud en [2].

Los sistemas de reconstrucción aun requieren de la intervención del usuario para llevar a cabo el proceso, es deseable que estos realicen de forma inteligente y automática la totalidad de este sin intervención del usuario, razón por la cual cada una de las etapas se ha convertido en la actualidad en tema amplio de investigación.

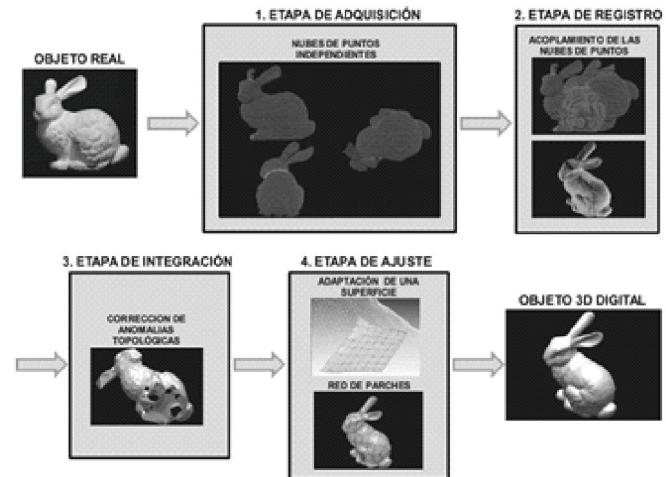


Figura 1. Etapas del proceso de reconstrucción digital de objetos 3-D.

El proceso de reconstrucción digital de objetos tridimensionales concentra en la actualidad un amplio interés de parte de la comunidad académica, dada su aplicabilidad en

diversos campos como el industrial, animaciones, videojuegos, objetos de museos, etc. Existen múltiples circunstancias en las cuales es deseable utilizar la reconstrucción digital, algunas de las cuales se describen con mayor detalle en [26], [8], [27]. Este artículo se concentra en la etapa de ajuste, cuyo objetivo es proporcionar un modelo matemático del objeto real, tal que permita representar fielmente sus detalles. Este proporciona el insumo necesario para visualizar en el computador el modelo 3-D del objeto, así mismo permite su importación y uso en herramientas CAD, CAE, CAM con fines ingenieriles. Algunas representaciones posibles son: Grid, Malla Triangular, Subdivisión de Superficies, Superficies de Funciones Explícitas, Superficies Implícitas, Superficies Paramétricas, Superficies B-Spline por producto tensorial, Superficies NURBS, Parches Curvados. La Subdivisión de Superficies, es de interés particular en este artículo, dadas sus propiedades y aplicaciones hecho que la han convertido en la actualidad en el estándar de la animación por computador, adicionalmente proporcionan superficies de alta calidad, son agradables a la vista, pero a pesar de ello aún no son un estándar en el CAD debido principalmente a las dificultades presentes en su parametrización. Aún así, estas técnicas son un prometedor prospecto que complementarán o reemplazarán en un futuro a las NURBS, actual estándar CAD.

Particularmente, la subdivisión de superficies de Catmull-Clark es uno de los métodos más usados para suavizar superficies mediante el refinamiento iterativo de una malla de control, esta preferencia se debe a su simplicidad, fácil implementación, aplicación sobre mallas de cualquier topología, producción de mallas cuadrilaterales, entre otras propiedades.

Este artículo propone un método para la aplicación de la subdivisión de superficies de Catmull-Clark en la etapa de ajuste del proceso de reconstrucción de objetos tridimensionales, cabe resaltar que aspectos como la medición del error, evaluación del efecto de vértices extraordinarios entre otros no se han quedado fuera, dado que este trabajo tan solo es un acercamiento inicial. La sección dos, describe los trabajos más recientes en relación al tema de subdivisión de Catmull-Clark particularmente el abordaje de temas como los artefactos y el ajuste son comunes, En la sección tres se presenta un abordaje teórico de los elementos clave empleados en la metodología como lo son la subdivisión de Catmull-Clark, el análisis espectral de mallas triangulares y la teoría de Morse. En la sección cuatro se describe el método propuesto el cual primero cuadrilateriza la malla y posteriormente la convierte a parches B-Spline con los cuales se calculan los vértices de la malla de Control. Finalmente se muestran algunos resultados empleando el método descrito.

II. TRABAJOS RELACIONADOS

La subdivisión de Catmull-Clark es un método de subdivisión que genera superficies suaves a partir de una malla burda, el

detalle de este método se describe en [4], permite generar superficies que recursivamente aproxima una superficie a puntos que se encuentran sobre una malla de topología arbitraria. Para mallas rectangulares con puntos de control, el método genera una superficie B-Spline estándar. Para mallas no rectangulares, genera superficies que se reducen a una superficie B-Spline, excepto en un pequeño número de puntos, llamados puntos extraordinarios.

Una técnica para evaluar directamente la subdivisión de Catmull-Clark sin realizar la subdivisión Explícita se presenta en [28], siendo eficiente y fácil de implementar. Esta técnica permite que muchos algoritmos desarrollados para superficies paramétricas se apliquen a subdivisión de superficies de Catmull-Clark.

Una propuesta para mejorar el trabajo presentado en la anterior referencia es desarrollada en [16] donde se extiende el método para la evaluar superficies por subdivisión de Catmull-Clark en las proximidades de vértices extraordinarios sobre curvas B-Spline de frontera.

Usualmente la profundidad usada en la subdivisión es tres, lo cual implica que la malla aún no es llevada a su límite, una estrategia para obtener un mejor renderizado es a partir de la teselación óptima de la superficie, en [17] se presenta un nuevo método de teselación adaptativo para subdivisión de superficies de Catmull-Clark. El número de caras en una malla refinada uniformemente se incrementa exponencialmente conforme aumenta la profundidad de subdivisión, la teselación adaptativa reduce el número de caras necesario para obtener una aproximación suave en la superficie límite y consecuentemente hace el proceso de renderizado más eficiente. Una forma de calcular el error límite de la subdivisión de superficie de Catmull-Clark es presentada en [6] en la cual mediante el uso de diferencias de primer orden de los puntos de control, define la distancia entre las dos mallas de control y se obtiene una fórmula de estimación del mismo, en tanto que se demuestra la convergencia con un ritmo exponencial de la malla de control.

El proceso de subdivisión parte de una malla burda para obtener mediante refinamientos sucesivos una malla suave en su límite, el proceso de subdivisión inversa es totalmente opuesto, parte de una malla arbitraria dada y busca obtener una malla burda, en ese sentido en [18] se presenta un método local para obtener mallas burdas a partir de mallas obtenidas mediante subdivisión de Catmull-Clark. Este método permite construir una malla burda para casi cualquier tipo de malla.

La profundidad de subdivisión es el proceso de determinar cuántas veces un parche de superficie debería ser subdividido tal que la distancia entre la malla de control resultante y la superficie del parche sea más pequeña que una tolerancia dada, en este sentido en [5] se presenta una nueva técnica para computar la profundidad de subdivisión para parches de superficie por subdivisión de Catmull-Clark (CCSS). Una variante de esta técnica es mostrada en [7] donde se presenta una técnica

para computar la profundidad de subdivisión basada en diferencias de segundo orden progresivas para parches de superficie por subdivisión de Catmull-Clark (CCSS). Determinar la profundidad de subdivisión es fundamental para evitar la subdivisión excesiva de parches CCSS para satisfacer las necesidades de precisión y, en consecuencia, puede hacer más eficiente el recorte y generación de mallas para elementos finitos, las operaciones booleanas, y las teselaciones de CCSSs. Un avance más reciente [12] muestra de forma general que la malla límite puede aproximar a la superficie límite mejor que la correspondiente malla de control y que en consecuencia, para un determinado error de tolerancia, se requieren menos pasos de subdivisión si la malla de control refinada es reemplazada con la correspondiente malla límite. Similarmente, [11] investiga la aproximación de una subdivisión de superficie de Catmull-Clark para su malla límite, muestra que una malla límite aproxima a la superficie límite mejor que la correspondiente malla de control, lo cual significa que, comparada la aproximación de la malla de control y la aproximación de la malla límite, esta tiene una profundidad de subdivisión más pequeña y consecuentemente requiere menos caras para una tolerancia de dada. Los resultados de los ensayos muestran que la aproximación de la malla límite supera a la aproximación de la malla de control en un 30% en la mayoría de los casos.

Un factor en estudio lo constituyen las curvas a partir de las cuales es posible crear superficies, en este sentido [21] presenta un algoritmo de interpolación de curvas con curvatura transversal predefinida en subdivisión de superficies empleando poligonales complejos. Una sencilla aplicación es la generación de superficies de subdivisión de Catmull-Clark que fluyen muy bien a lo largo de tales curvas características.

Los puntos extraordinarios son aquellos cuya valencia (número de bordes incidentes) es diferente al esperado, lo cual puede causar comportamientos inesperados de la superficie en tales puntos o discontinuidades, particularmente en [23] se muestra que en la vecindad de puntos extraordinarios, la curvatura es ilimitada y fluctúa. Se presenta además un conjunto de reglas aplicadas a la vecindad del punto extraordinario para reducir su efecto.

La subdivisión de superficies posee muchas propiedades atractivas en las aplicaciones de gráficos interactivos por computador. Sin embargo, la necesidad de acceder a una vecindad de tamaño variable en una malla de control hace que sea difícil de acelerar de manera eficiente los cálculos de teselación en el hardware para gráficos. Este problema es abordado en [14], donde en primer lugar, se propone un esquema simple y de bajo costo para el sistema de cálculo de teselación de superficies por subdivisión de Catmull-Clark. En segundo lugar, el documento presenta una extensión de la etapa post-transformación y la operación de caché de iluminación de vértices (T'n'L) que eficientemente aceleran el procesamiento de primitivas de tamaño variable que sirve como entrada.

Una aplicación particular de la subdivisión de Catmull-Clark se presenta en [13] desarrollando un nuevo algoritmo para obtener una superficie CCSS a partir de contornos con ramificaciones. En [19] se presenta un algoritmo simple y computacionalmente eficiente para aproximar superficies por subdivisión de Catmull-Clark usando un conjunto mínimo de parches bicubicos. En [15] se presenta una extensión de la aproximación a superficies de Catmull-Clark (ACC) desarrollada por Loop y Schaefer para superficies con pliegues y esquinas las cuales son necesarias en la mayoría de aplicaciones gráficas.

Las superficies B-Spline y NURBS constituyen en la actualidad un estándar CAD, por lo cual se busca representar superficies que cumplan con este estándar. En [22] se presenta un método para reconstruir superficies B-Spline a partir de mallas cuadrilaterales, usando un esquema de subdivisión inversa de Catmull-Clark.

III. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

3.1 Subdivisión de Superficies de Catmull-Clark

3.1.1 Orígenes

Un algoritmo para subdivisión recursiva de parches se presenta en [4] el cual ha sido usado ampliamente en los gráficos por computador desde que estos fueron concebidos para renderizar imágenes de parches curvados de superficies, el algoritmo propuesto en ese entonces subdivide recursivamente un parche de superficie en cuatro subparches hasta que el parche resultante tiene un tamaño cercano al de un pixel de la pantalla en que va a ser renderizado.

Cuando el trabajo de Catmull estuvo a punto de completarse, George Chaikin describió en un seminario un método para generar recursivamente curvas suaves a partir del recorte de esquinas de un polígono de control. Motivado por esto, Catmull desarrolló un método para generar superficies cúbicas para mallas poliedrales de topología arbitraria, sin embargo, ya que no pudo probar que la superficie se comportaba bien en todos sus puntos, no pudo implementarla. Posteriormente Clark implementó el método para empíricamente determinar si la superficie se comportaba bien y generalizó las reglas para determinar los nuevos puntos de la superficie.

3.1.2 Algoritmo de Chaikin para la Subdivisión de Curvas

El algoritmo de Chaikin se basa en un proceso recursivo de recorte de las esquinas formadas por las líneas de un polígono de control. La Figura 2 muestra una curva que ha sido refinada mediante el algoritmo de recorte de esquina de Chaikin, en la Figura 2a se tiene un polígono de control con cuatro vértices, en la Figura 2b se muestra el resultado después de recortar las esquinas 2 y 3, generándose los nuevos vértices numerados del 2 al 6, los vértices 0 y 1 permanecen sin modificar, en la Figura 2c se presenta el resultado de recortar todas las esquinas

de la anterior Figura excepto los vértices 0 y 1, y en la Figura 2d se muestra el resultado de recortar todas las esquinas del polígono de la Figura 2c excepto los vértices 0 y 1. Cada uno de los nuevos vértices de control de la curva es computado como

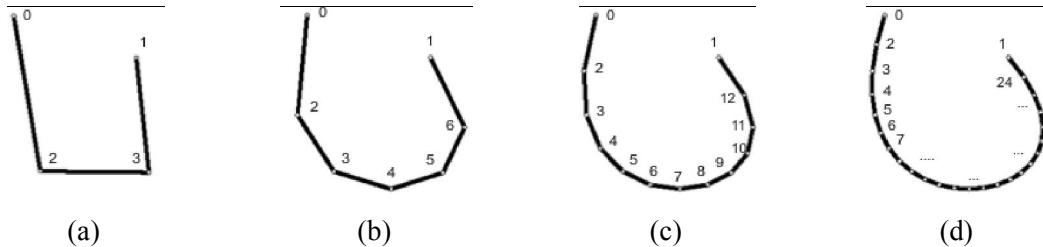


Figura 2. Refinamiento de un polígono de control mediante el algoritmo de Chaikin

La subdivisión de Chaikin presenta dos componentes esenciales en todos los esquemas de subdivisión: las reglas topológicas y las reglas geométricas [20].

Las reglas topológicas de la subdivisión de Chaikin son mostradas en la Figura 3, las cuales, generalmente son llamadas recorte de esquina. Para cada vértice anterior v_i , se generan dos nuevos vértices v'_{2i} y v'_{2i+1} , la unión de estos dos vértices nuevos y la eliminación del anterior vértice v_i generan un nuevo borde $v'_{2i+1}v_{i+1}$. De esta forma lo longitud de todos los bordes anteriores se reduce.

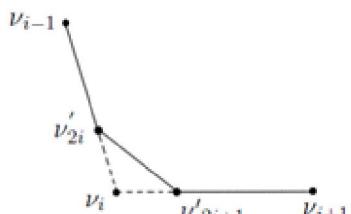
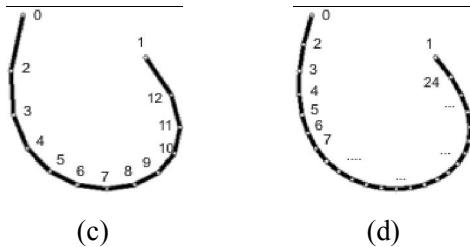


Figura 3. Reglas topológicas de la subdivisión de Chaikin

una combinación afín de los vértices del anterior paso de refinamiento. En el límite, el polígono refinado converge a una curva suave la cual es conocida como una curva B-Spline cuadrática uniforme.



Las reglas geométricas para el algoritmo de Chaikin están definidas por las ecuaciones 1 y 2 donde los nuevos vértices creados son computados como una combinación lineal de los antiguos vértices.

3.1.3 Método de Subdivisión de Catmull-Clark

La subdivisión de Catmull-Clark es un método aproximante el cual se basa en algoritmos de subdivisión de parches bicubicos B-Spline para generar superficies recursivamente a partir de mallas de control de topología arbitraria [4], en la Figura 4 se presenta la subdivisión de un objeto con malla cuadrilateral, en tanto que en la Figura 5 se presenta la subdivisión del mismo objeto representado con malla triangular.

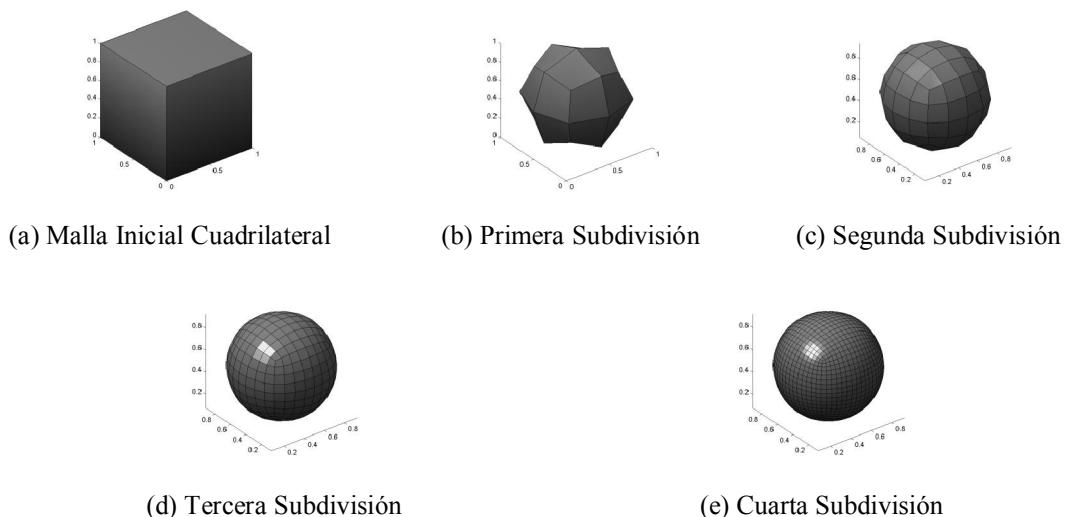


Figura 4. Refinamiento de una malla cuadrilateral mediante subdivisión de Catmull-Clark

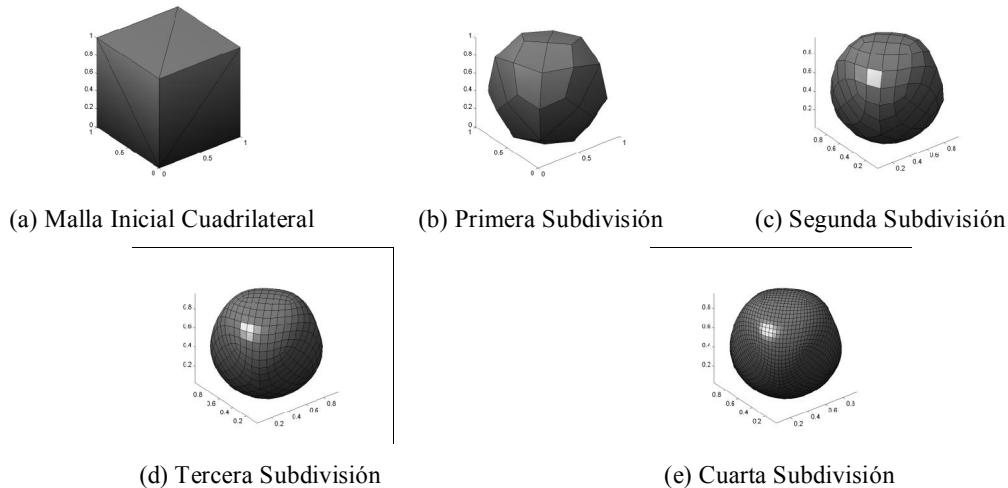


Figura 5. Refinamiento de una malla triangular mediante subdivisión de Catmull-Clark.

Dada una malla de control con topología arbitraria, los nuevos vértices son generados de acuerdo a las siguientes reglas:

- Los vértices F: Son los vértices resultantes de computar para cada una de las caras los vértices que la componen. Como ejemplo se toma el vértice F1 el cual es el promedio aritmético de los vértices P1, P2, P3 y P4 (Ver Figuras 6a y 6b)
- Los vértices E: Son vértices resultantes de computar los dos vértices de los extremos de una arista y los dos nuevos vértices F cuyas caras comparten la misma arista. A modo de ejemplo se tiene el vértice E1 el cual es el promedio aritmético de los vértices P1, P4, F1 y F2 donde P1 y P4 forman una de las aristas del objeto y F1, F2 son los vértices de cara de las caras adyacentes a dicha arista. (Ver Figuras 6a, 6b y 6c)

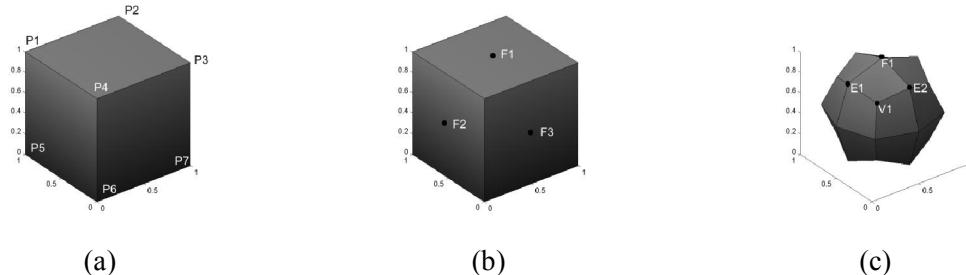


Figura 6. Reglas topológicas para la Subdivisión de Catmull-Clark

3.1.4 Artefactos

Se dice que una superficie presenta artefactos cuando aparecen en el proceso de subdivisión formas diferentes a las esperadas. Un ejemplo de este fenómeno se muestra en la Figura 7, donde la malla de control (Figura 7a) consta de tres superficies planas malladas regularmente con cuadriláteros, el resultado de subdividir cuatro veces este objeto se presenta en la Figura 7b, se nota que la superficie final es lisa y curva. En la Figura 7c, se representan las mismas tres superficies de la Figura 7a, pero el

- Los vértices V: Un vértice V es expresado como la combinación lineal de P, F y R (Ver ecuación 3), donde P es el vértice original, F es el promedio de todos los vértices de cara adyacentes al punto P y R es el promedio de todos los puntos medios de las n aristas que inciden sobre P.

$$V = \frac{F + 2R + (n - 3)P}{n} \quad (3)$$

- Como ejemplo se cuenta con el vértice V1, donde P es el vértice P4, F es el promedio de los vértices de cara F1, F2 y F3, R es el promedio de los puntos medios de las aristas P1P4, P3P4 y P6P4 (Ver Figura 6).

enmallado no es regular y presenta combinación de mallas poligonales de 3, 4 y 5 lados, al aplicar el mismo proceso de subdivisión se obtiene la Figura 7d, en la cual se observa la aparición de pliegues.

Las Figuras 7a y 7c muestran 7a son topológicamente iguales, solo se diferencian por su mallado que al ser subdividido produce resultados diferentes con las superficies subdivididas presentándose en la Figura 7d artefactos.

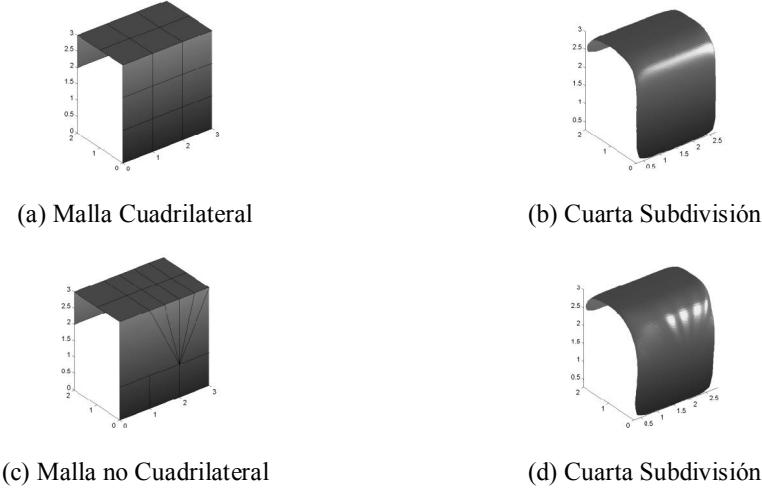


Figura 7. Aparición de artefactos en el proceso de subdivisión

3.1.5 Vértices Extraordinarios

Se denomina vértices extraordinarios a todos aquellos cuya valencia es diferente a la esperada, en el caso de mallas obtenidas por subdivisión de Catmull-Clark lo normal es que cada vértice tenga cuatro aristas incidentes sobre él, en otras palabras su valencia es cuatro, la razón se centra en el hecho que el método de subdivisión siempre genera mallas cuadrilaterales, se puede decir entonces que todo aquel vértice con una valencia diferente es un vértice extraordinario.

En la Figura 7d se formaron pliegues en la superficie durante el proceso de subdivisión debido a la fuerte influencia del vértice extraordinario mostrado en la figura 7c cuya valencia es ocho.

Tal como se evidencia en el estado del arte, el estudio de los vértices extraordinarios es un tema de interés en investigación.

3.2 Teoría de Morse.

De manera general, el análisis espectral de mallas trata de inferir características topológicas del objeto a través de funciones matemáticas. Este, arroja un espectro que viene a ser un conjunto de valores y vectores propios de una matriz que ha sido inferida de la malla triangular. El análisis espectral se apoya en la teoría de Morse. Esta teoría permite escoger puntos

representativos de los vértices de la malla triangular, a los que se denomina puntos críticos de Morse, y que posteriormente serán los vértices de los parches cuadrilaterales.

Dada una función real sobre alguna superficie, la teoría de Morse conecta la geometría diferencial de una superficie con su topología algebraica; esta teoría, describe la conectividad de la superficie, a partir de la configuración de los puntos donde la función del gradiente decae. Tales puntos son llamados puntos críticos (estos son: mínimos, máximos y puntos silla). La teoría de Morse ha sido utilizada en gráficos y visualización por computador, para analizar diferentes funciones reales. Un ejemplo son los datos de terrenos, los cuales están definidos por una función de altitud en el plano, en donde la teoría de Morse puede identificar características topológicas, controlar su simplificación y organizarlas en jerarquías de multiresolución [1, 3].

En la Figura 8, se observa la configuración de los puntos críticos. La parte a, indica un punto regular. Para la parte b, se observa cómo se halla un máximo cuando todos en el vecindario son mínimos. En la parte c, se observa cómo es un mínimo, cuando todos los vecinos son máximos. La parte d indica puntos silla.

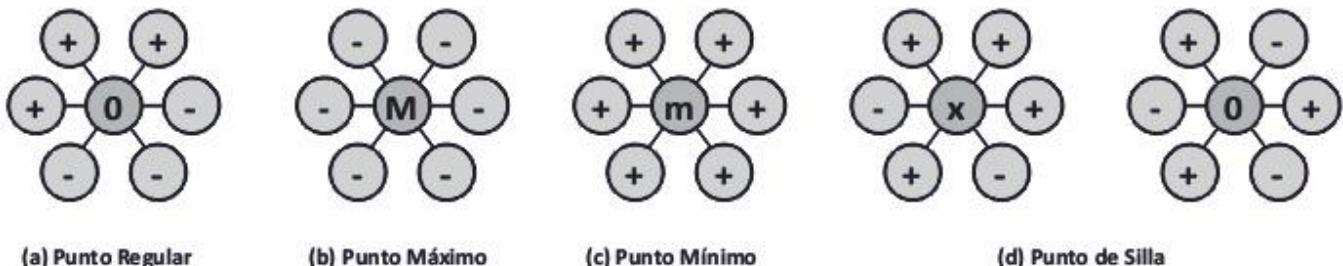


Figura 8. Configuración de los puntos críticos [24].

3.2.1 Teoría de Morse para mallas triangulares.

La aplicación de la teoría de Morse para mallas triangulares, implica resolver una forma discreta de la ecuación del Laplaciano, para encontrar una función Morse que describa la topología representada en la malla triangular. En este sentido, pueden existir puntos críticos adicionales a la característica de la superficie, que produzcan un dominio base que represente adecuadamente la geometría tanto de la misma topología como de la malla original, y también puede agruparse la malla en parches mejorados.

Esta teoría se basa en el Laplaciano para encontrar las funciones armónicas de una función dada. La Teoría de Morse relaciona la topología de una superficie S con su estructura diferencial especificada por los puntos críticos de una función de Morse [25] y está relacionada con el análisis espectral de mallas.

El análisis espectral, se realiza calculando inicialmente el Laplaciano. El operador Laplaciano discreto en funciones lineales de pedazos de superficie sobre superficies trianguladas, está dado por la ecuación 4 donde N_i es el conjunto de vértices adyacentes al vértice i y W_{ij} , es un peso escalar asignado a la arista dirigida $(i; j)$.

$$\Delta f_i = \sum_{j \in N_i} W_{ij} (f_j - f_i) \quad (4)$$

Para cada grafo libre de cualquier geometría embebida, frecuentemente se usa la definición de pesos combinatorios. Sin embargo, para superficies múltiples la opción apropiada, son los pesos armónicos discretos, sugeridos por [9] y es la que se usa en este trabajo (ver Ecuación 5):

$$W_{ij} = \frac{1}{2} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) \quad (5)$$

donde α y β son los ángulos opuestos a la arista (i, j) . En la Figura 9, se observa como los pesos son calculados mediante los ángulos opuestos, ya que indican la geometría del objeto.

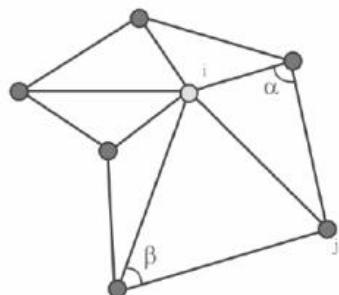


Figura 9. Cálculo de los pesos para el Laplaciano.

Representando la función f , por el vector columna de sus valores hacia todos los vértices, se reformula el Laplaciano como una matriz:

$$\Delta f = -L f \quad (6)$$

donde la matriz Laplaciana L tiene las siguientes entradas:

$$L_{ij} = \begin{cases} \sum_k W_{ik} & \text{si } i = j \\ -W_{ik} & \text{si } (i, j) \text{ es una arista de } S \\ 0 & \text{En cualquier otro caso} \end{cases} \quad (7)$$

donde k es el número de vecinos del vértice i . Los valores propios forman el espectro de la malla S . Además de describir el cuadrado de la frecuencia y los correspondientes vectores propios en L , definen las funciones lineales de pedazos de superficie sobre S y describen las frecuencias progresivamente [30].

3.2.2 El complejo Morse-Smale.

Asumiendo una métrica Riemaniana y un sistema ortonormal de coordenadas, el gradiente en un punto a de la superficie, es el vector de derivadas parciales. El gradiente de f forma un campo suave de vectores en S , con ceros en los puntos críticos. En cualquier punto regular se tiene un vector gradiente diferente de cero, y cuando se sigue hacia el vector, se traza una integral de línea la cual inicia en un punto crítico y finaliza en un punto crítico mientras no contenga ninguno de ellos. Ya que la integral de línea asciende monótonamente, los dos puntos de finalización no pueden ser el mismo. Porque f es suave, dos integrales de línea son disjuntas o son las mismas. El conjunto de integrales de línea cubren la superficie completa, excepto en los puntos críticos. La superficie descendente $D(a)$ de un punto crítico a es el conjunto de puntos que fluyen hacia a .

Más formalmente, esta es la unión de a y todas las integrales de línea que finalizan en a . Por ejemplo, la superficie descendente de un máximo es un disco abierto, el de un punto silla es un intervalo abierto, y el de un mínimo, es el punto mismo. La colección de superficies estables es un complejo, en el sentido de que el límite de la celda es la unión de celdas de dimensión baja. Simétricamente, se define la superficie ascendente $A(a)$, de a como la unión de a y todas las integrales de línea que inician en a .

Cada una de las regiones tiene cuatro lados, dos arcos saliendo a partir de un mínimo y finalizando en dos puntos silla y dos arcos adicionales continuando a partir de los puntos silla a un máximo común. Es genéricamente posible que dos puntos silla sean las mismas, en tal caso dos de los cuatro arcos se unen en uno. La región cae en ambos lados del arco unido, así se tiene un sentido de doble conteo y se mantiene que la región tenga cuatro lados. El complejo MS puede observarse en la Figura 10.

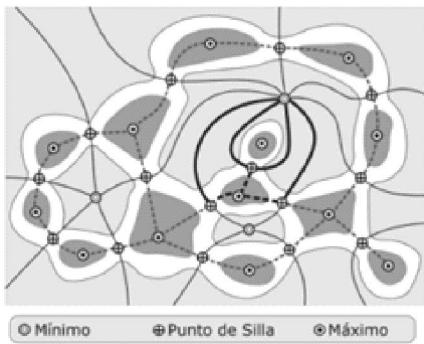


Figura 10. Complejo de Morse-Smale [10].

IV. MÉTODO PROPUESTO

En esta sección se describe el método propuesto para ajustar una nube de puntos representada como una malla poliédral mediante la subdivisión de superficies de Catmull-Clark. En primera instancia se recurre al análisis espectral y a la teoría de Morse para identificar una serie de puntos críticos sobre la

malla triangular, lo cual permite construir sobre la superficie parches cuadrilaterales. En segunda instancia se construyen sobre estos parches superficies B-Spline. Los puntos de control así obtenidos se constituyen en los vértices de la malla de control para el proceso de subdivisión de superficies.

4.1 Análisis Espectral y Teoría de Morse

El análisis espectral de la malla poliédral permite obtener un conjunto de vectores y valores propios del Laplaciano. Cada vector propio caracteriza los vértices de la malla al asignar a estos un valor real. El valor propio de cada eigenvector muestra el nivel de frecuencia asociado, para el caso de las mallas es usual tomar los eigenvectores con más altas frecuencias. Habiendo ordenado descendente los eigenvalores, es decir en orden decreciente de frecuencias es común tomar para el proceso de cuadrilaterización aquellos eigenvectores en el rango de posición de 40 a 80, ya que ofrecen una distribución más homogénea de los valores asignados a cada vértice por el eigenvector elegido.

Las figuras 11a y 11b muestran mediante escala de colores una representación de el valor asignado a cada vértice.

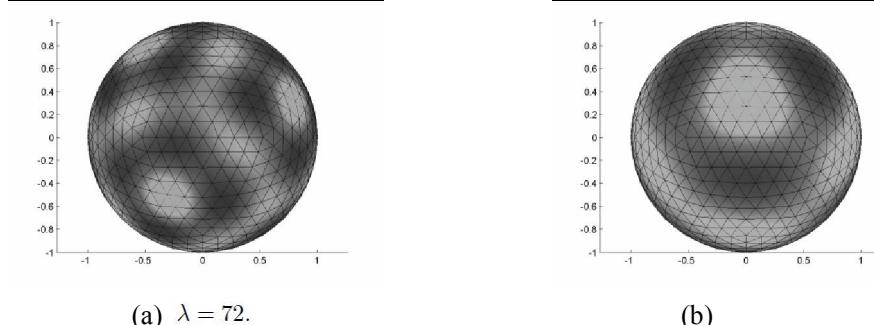


Figura 11. Análisis Espectral del objeto esfera.

Mediante la teoría de Morse se clasifican los vértices de la malla según el valor asociado por el eigenvector elegido como: Punto de máximo, Puntos de Silla, Puntos de mínimo y Puntos regulares. Para la identificación de los parches cuadrilaterales sobre la malla se emplean los puntos de máximo, mínimo y de silla. De cada punto de silla se trazan dos rutas ascendentes y

dos rutas descendentes empleando el concepto de pendiente, de esta forma cada silla se conecta a dos puntos de máximo y a dos puntos de mínimo. Una adecuada elección del eigenvector permite una buena formación de los parches cuadrilaterales, tal como se observa en la Figura 12.

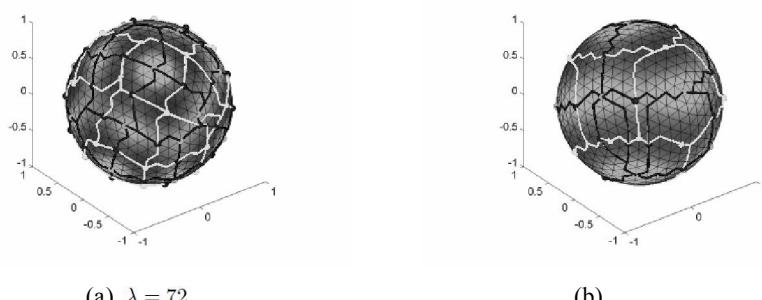


Figura 12. Rutas ascendentes y descendentes del objeto esfera.

4.2 Construcción de los parches de superficie B-Spline

Mediante el análisis espectral y la teoría de Morse se particionó la superficie poliédral en parches cuadrilaterales. Cada uno de los parches fue regularizado y sobre él se construyeron geodésicas, el objetivo consiste en ubicar puntos sobre la superficie de una forma regular, estos son usados como entrada para identificar los puntos de control de una superficie B-Spline.

En la Figura 13 se muestran los parches cuadrilaterales formados a partir de los puntos críticos identificados para el eigenvector 48. La Figura 14 muestra el trazado de geodésicas para uno de estos parches. Los puntos mostrados están espaciados de forma uniforme, lo que permite aproximar una superficie B-Spline.

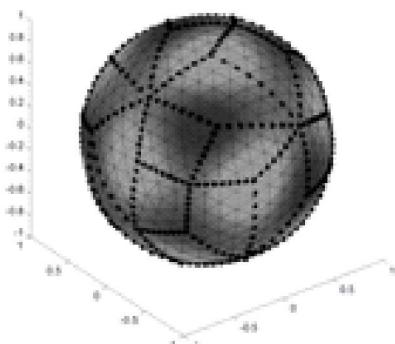


Figura 13. Parches cuadrilaterales del objeto esfera

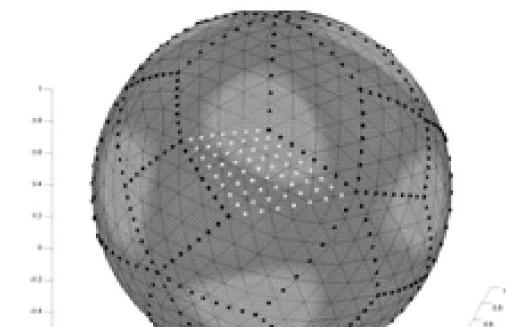


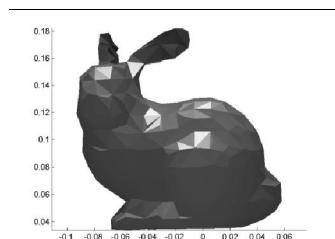
Figura 14. Geodésicas de un parche del objeto esfera

Los puntos de control de la B-Spline obtenidos son entonces los vértices de la malla de control para la subdivisión de superficies de Catmull-Clark.

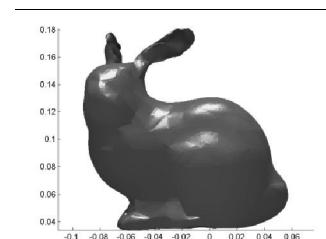
V. RESULTADOS

En internet es común encontrar repositorios públicos de imágenes obtenidas por diferentes investigadores, tal es el caso de los objetos Bunny4 mostrado en la Figura 15a y el objeto Moai mostrado en la Figura 16a.

Tomando como entrada los datos de las Figuras mencionadas, se procedió a aplicar el método descrito, los resultados de este proceso se evidencian en las Figuras 15b, 16b, 4d.

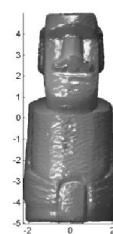


(a) Malla de Control



(b) Malla Subdividida 3 veces

Figura 15. Objeto Bunny4



(a) Malla de Control



(b) Malla Subdividida 2 veces

Figura 16. Objeto Moai

Una evaluación posterior de los resultados muestra que el número de vértices y caras se incrementa en forma exponencial en potencias de 10, las Figuras 17 y 18 muestran tal comportamiento para los objetos Bunny4 y Cubo. La ordenada se encuentra en ambos casos en una escala de Log10.

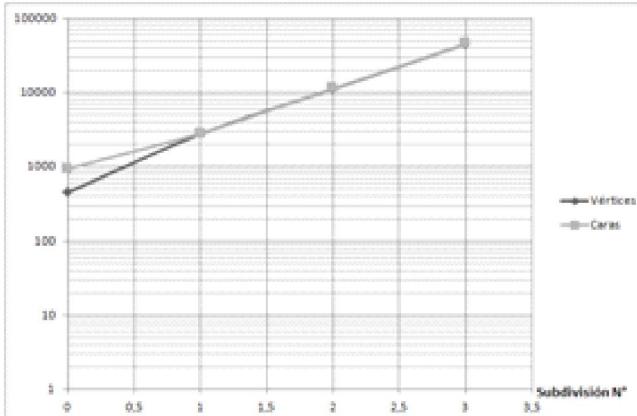


Figura 17. Evaluación del número de subdivisiones vs el número de vértices y el número de caras para el objeto Bunny4.

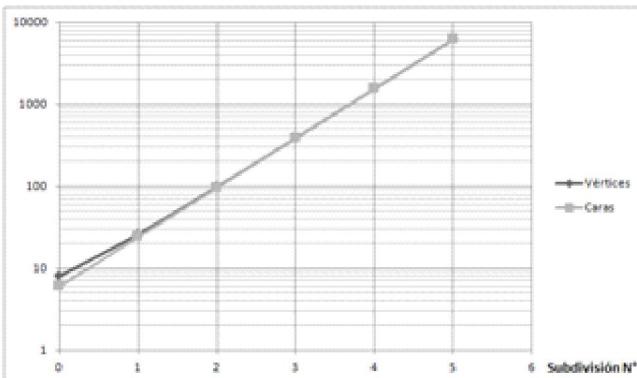


Figura 18. Evaluación del número de subdivisiones vs el número de vértices y el número de caras para el objeto Cubo de la Figura 4.

VI. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

- El proceso de cuadrilaterización de la superficie del objeto mediante el método propuesto es altamente dependiente del eigenvector seleccionado, lo cual afecta la formación de los parches B-Spline, esto se evidencia en la figura 12. Como trabajo futuro se evaluará la influencia del eigenvector en el proceso de cuadrilaterización y cómo seleccionar de manera automática.
- El costo en tiempo de computación se incrementa con el proceso de subdivisión en potencias de diez del número de vértices y el de caras.
- El efecto de los vértices extraordinarios es un tema que requiere de mayor atención en futuros desarrollos de esta

área ya que es evidente su influencia en la generación de artefactos.

- La topología de la malla inicial tiene efectos importantes en la forma de la superficie tras el proceso de subdivisión, basta con observar las Figuras 4d y 5d las cuales son obtenidas a partir del objeto Cubo de las Figuras 4a y 5a que topológicamente son iguales, su única diferencia es la malla, en el primer caso cuadrilateral y en el segundo triangular.

REFERENCIAS

- [1] C. L. Bajaj and D.R. Schikore. 1998. Topology preserving data simplification with error bounds. *Computers & Graphics*, 22(1): pp. 3 – 12.
- [2] J.W. Branch. 2007. Reconstrucción de Objetos de Forma Libre a Partir de Imágenes de Rango Empleando una Red de Parches Nurb. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia.
- [3] P.-T. Bremer, B. H., H. Edelsbrunner, and V. 2004. Pascucci. A topological hierarchy for functions on triangulated surfaces. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 10(4): pp. 385–396.
- [4] E. Catmull and J. Clark. 1978. Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-Aided Design*, 10(6): pp. 350 – 355.
- [5] G. Chen and F.Cheng. 2006. Matrix based subdivision depth computation for extra-ordinary catmullclark subdivision surface patches. *Geometric Modeling and Processing - GMP 2006*, pp. 545–552.
- [6] X. Chen. 2008. Error estimation of catmull-clark subdivision surfaces. *Computer Science and Computational Technology, 2008. ISCSCT '08. International Symposium on*, 1: pp. 199–202.
- [7] F. Cheng, G. Chen, and J.-H. Yong, 2006. Subdivision depth computation for extra-ordinary catmull-clark subdivision surface patches. *Advances in Computer Graphics*, pp. 404–416.
- [8] N. D'Apuzzo. 2006. Overview of 3d surface digitization technologies in europe. In *Proceedings of SPIE*, volume 6056, pp. 1–13.
- [9] S. Dong, P.T. Bremer, M. Garland, V. Pascucci, and J.C. Hart. 2005. Quadrangulating a mesh using laplacian eigenvectors.
- [10] H. Edelsbrunner, J. Harer, and A. Zomorodian. 2003. Hierarchical morse–smale complexes for piecewise linear 2-manifolds. *Discrete and Computational Geometry*, 30(1): pp. 87–107.
- [11] Z. Huang, J. Deng, and G. Wang. 2008. A bound on the approximation of a catmullclark subdivision surface by its limit mesh. *Computer Aided Geometric Design*, 25(7): pp. 457 – 469.
- [12] Z. Huang and G Wang. 2007. Distance between a catmull-clark subdivision surface and its limit mesh. In *SPM '07: Proceedings of the 2007 ACM symposium on Solid and physical modeling*, New York - USA, pp. 233–240.
- [13] K. Jha. 2009. Reconstruction of branching surface and its smoothness by reversible catmull-clark subdivision. *Computational Science f a; a ICCS 2009*, pp. 759–769.
- [14] M.Kazakov. 2007. Catmull-clark subdivision for geometry shaders. In *AFRIGRAPH '07: Proceedings of the 5th international conference on Computer graphics, virtual reality, visualisation and interaction in Africa*, New York, NY, USA, ACM. pp. 77–84.

- [15] D. Kovacs, J. Mitchell, S. Drone, and D. Zorin. 2009. Real-time creased approximate subdivision surfaces. In I3D '09: Proceedings of the 2009 symposium on Interactive 3D graphics and games, New York, NY, USA, ACM. pp. 155–160.
- [16] D. Lacewell and B. Burley. 2007. Exact evaluation of catmull-clark subdivision surfaces near b-spline boundaries. *Journal of Graphics Tools*, 12(3): pp. 7–15.
- [17] S. Lai and F. Cheng. 2006. Near-optimum adaptive tessellation of general catmull-clark subdivision surfaces. *Advances in Computer Graphics*, pp. 562–569.
- [18] S. Lanquetin and M. Neveu. 2006. Reverse catmull-clark subdivision. In International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision 2006, University of West Bohemia, Campus Bory, Plzen - Bory, Czech Republic, University of West Bohemia. Volume 14, pp. 319–326.
- [19] C. Loop and S. Schaefer. 2008. Approximating catmull-clark subdivision surfaces with bicubic patches.
- [20] W. Ma. 2005. Subdivision surfaces for cad an overview. *Computer-Aided Design*, 37(7): pp. 693–709.
- [21] A. Nasri, M. Sabin, R. Zaki, N. Nassiri, and R. Santina. 2006. Feature curves with cross curvature control on catmull-clark subdivision surfaces. *Advances in Computer Graphics*, pp. 761–768.
- [22] K. Nguyen-Tan, R. Raffin, M. Daniel, and C. Le. 2009. B-spline surface reconstruction by inverse subdivisions. In Computing and Communication Technologies, 2009. RIVF '09. International Conference on, pp. 1–4.
- [23] T. Ni and A. Nasri. 2006. Tuned ternary quad subdivision. *Geometric Modeling and Processing - GMP 2006*, pp. 441–450.
- [24] X. Ni, M. Garland, and J.C. Hart. 2004. Fair morse functions for extracting the topological structure of a surface mesh. pp.613–622
- [25] F.S. Nooruddin and G. Turk. 2003. Simplification and repair of polygonal models using volumetric techniques. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 9(2): pp. 191–205.
- [26] V. Raja. 2008. Reverse Engineering: An Industrial Perspective, chapter Chapter 1: Introduction to Reverse Engineering. Springer-Verlag.
- [27] A. Saxena and B. Sahay. 2005. Computer Aided Engineering Design. Springer.
- [28] J. Stam. 1998. Exact evaluation of catmull-clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values. In SIGGRAPH '98: Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, New York, NY, USA, ACM. pp. 395–404.
- [29] T. Varady, R. Martin, and J. Cox. 1997. Reverse engineering of geometric models: an introduction. *Computeraided design*, 29(4): pp. 255–268.
- [30] G.H. Weber, G. Scheuermann, H. Hagen, and B. Hamann. 2002. Exploring scalar fields using critical isovalue. *Visualization, 2002. VIS 2002. IEEE*, pp. 171–178.

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Facultad de Minas



Escuela de Ingeniería de Sistemas

Grupos de Investigación

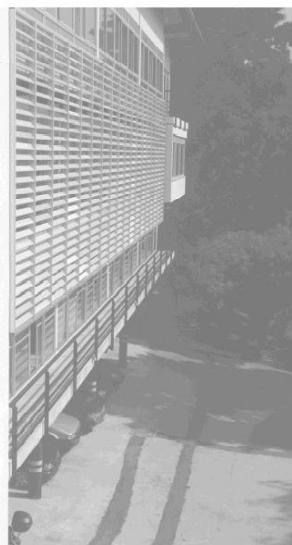
Grupo de Investigación en Sistemas e Informática

Categoría A de Excelencia Colciencias
2004 - 2006 y 2000.



GIDIA: Grupo de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Artificial

Categoría A de Excelencia Colciencias
2006 – 2009.



Centro de Excelencia en Complejidad

Colciencias 2006

Escuela de Ingeniería de Sistemas
Dirección Postal:
Carrera 80 No. 65 - 223 Bloque M8A
Facultad de Minas. Medellín - Colombia
Tel: (574) 4255350 Fax: (574) 4255365
Email: esistema@unalmed.edu.co
<http://pisis.unalmed.edu.co/>

Grupo de Ingeniería de Software

Categoría C Colciencias 2006.

Grupo de Finanzas Computacionales

Categoría C Colciencias 2006.

