

# Análisis de Continuidad en funciones NURBS

Ernesto Cuartas y Flavio Prieto

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, Manizales.  
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación  
electroun@hotmail.com

Recibido para revisión May-2006, aceptado Jun-2006, versión final recibida Jun-2006

**Resumen:** El ensamble suave de funciones paramétricas es uno de los tópicos de mayor interés en el área de reconstrucción de superficies. La diversidad de enfoques y la mínima adaptabilidad de los trabajos reportados en la literatura hacen que el análisis de continuidad entre funciones NURBS sea un tema actual y de gran interés. En este trabajo se analizan los diversos enfoques reportados en la literatura, y se expone un modelo general y simplificado de ajuste de continuidad entre parches adyacentes en modelos Splines.

## 1 INTRODUCCIÓN

La generación de superficies de forma libre y objetos del mundo real en un ordenador es una labor complicada incluso para los diseñadores que emplean sistemas de modelado geométrico avanzado como el 3ds Max [Zisserman (2003)]. El rastreo de la geometría de un objeto es de mayor interés en aplicaciones prácticas como realidad virtual, CAD, medicina, visualización, manufactura y control de calidad [Anderson y Crawford-Hines (2000), Farin (2001)]. El avance en las tecnologías de adquisición 3D permite que los escáner de rango laser de última generación rastreen la superficie de un objeto con alta precisión. El proceso resulta en una nube de puntos discreta, bastante densa, que contiene la información espacial de la geometría del objeto [Blais (2004)]. Convertir la gran cantidad de puntos generados por un escáner laser en un modelo geométrico útil se define como reconstrucción de superficies [Farin (2001)].

La reconstrucción de modelos de forma libre tuvo una primera aproximación en los cubos marchantes y la distancia signada [Curless (1997), Prieto (2004), Branch, Gómez y Prieto (2001)]. este método combinado con un refinamiento posterior de la reconstrucción ofrece excelentes resultados y modelos realistas [Hoppe (1992), Hoppe (1993)]. Las representaciones generadas a partir de estos métodos están conformadas por caras planares poligonales (generalmente triángulos) conectadas entre sí, las cuales recrean de manera brusca el modelo final. Aunque existen diversas técnicas para el suavizado de los métodos poligonales [Curless (1997), Hoppe (1993), Hoppe (1991)], la continuidad del modelo y el error en la reconstrucción no hacen parte de los parámetros del proceso. además, un alto nivel de detalle requiere un número mayor de polígonos, y por consiguiente un mayor costo computacional.

Las funciones NURBS son empleadas para diversas tareas como la reconstrucción de imágenes 2D [Hsin-Yu (2002)], diseño de alto nivel [Joh (2003)] o modelado complejo de formas humanas en animación [Sy-sen y Liew (1994)]. Su mayor utilidad se encuentra en el área de la reconstrucción de superficies de forma libre debido a su alto grado de adaptación y su representación suave y continua [Wayne (1997)]. Sin embargo, el paradigma del modelado mediante BSplines está limitado, debido a que los puntos de control sobre el modelo a recrear deben estar organizados en una estructura rectangular regular. Este problema hace que el ajuste de una sola superficie B-Spline a un modelo complejo no sea posible. La adaptación de una sola función paramétrica NURBS se ha afrontado desde diferentes puntos de vista con resultados poco prometedores [Anderson y Crawford-Hines (2000), Randriamarivony y Brummett (2002), Fisher y Craig (2001)]. La reconstrucción eficiente de modelos complejos requiere la introducción de una red de parches NURBS. La generación automática de la red y la parametrización de los puntos sobre cada parche es un problema complejo, debido que se debe garantizar la continuidad en las fronteras de los parches adyacentes [Farin (2001), de Berg y van Kreveland (2000)] y la representación final depende de un proceso de particionamiento adecuado del modelo [Randriamarivony y Brummett (2003)].

En este trabajo se analizan los diversos enfoques de continuidad reportados en la literatura, y se presenta un modelo general y simplificado de ajuste de continuidad entre parches Splines.

## 2 ANTECEDENTES

La reconstrucción de modelos 3D mediante colecciones de funciones paramétricas introduce el problema del

análisis de continuidad entre parches adyacentes. En la literatura analizada se hace evidente que el esquema de continuidad depende en gran medida de los procesos de particionamiento y parametrización. En esta sección se exponen los esquemas de continuidad para la reconstrucción mediante funciones Splines reportados en la literatura [Hormann (2002), Maeda y Kumamaru (2002)].

Tan (1995) afrontan el problema de la partición de puntos no organizados en vecindarios cuadrilaterales para la disposición de superficies paramétricas como Splines y Bezier [Wayne (1997)], dando un primer aporte mediante un esquema de continuidad matemáticamente complejo y poco generalizante.

Su aproximación consiste en la formulación de unas matrices de mezcla para el ajuste de parches Bezier en vecindarios aislados no cuadrilaterales. En este modelo la continuidad de los vecindarios es ajustada mediante el esquema para que la interpolación de los parches Bezier sea suave incluso en los vecindarios extraordinarios.

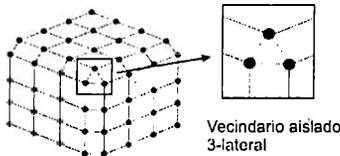


Figura 1: Partición polihédrica

La Figura 1 muestra un vecindario en poliedros cuadrilaterales con una cara triangular aislada. Este tipo de vecindarios con  $n$  lados ( $n \neq 4$ ) se denominan vecindarios extraordinarios.

Esta primera aproximación presenta un modelo matemático pesado, extenso y poco práctico, debido a que las matrices de mezcla deben ser recalculadas para cada vecindario extraordinario, debido a esto, el uso práctico de esta aproximación está muy lejos de ser el mejor, dada su complejidad y su mínima adaptabilidad.

Loop (1994) propone una técnica de particionamiento de superficies que genera vecindarios cuadrilaterales sin la presencia de caras aisladas con  $n$  lados ( $n \neq 4$ ). La partición del modelo es generada a partir de una reconstrucción inicial  $M_0$ , la cual es refinada mediante un proceso geométrico que combina un vértice y las caras adyacentes a este en  $M_0$  para obtener una nueva representación  $M_1$ .

Para generar la red de control de los parches Splines se toma cada vértice de la reconstrucción refinada  $M_1$  y se genera un vecindario cuadrilateral de forma tal que sus puntos extremos coinciden con los centroides de las caras adyacentes al vértice. Esta partición se denomina *Quad-Net*.

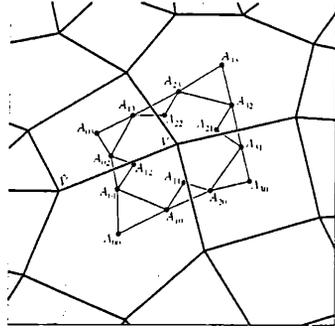


Figura 2: División Quad-Net

La Figura 2 muestra la partición en vecindarios cuadrilaterales *Quad-Net* de la reconstrucción inicial  $M_1$  propuesta por Loop. Con el fin de asegurar la continuidad en las fronteras de los parches, cada *Quad-Net* es construido bajo ciertas restricciones geométricas que garantizan la continuidad de plano tangente  $G^1$ .

$$\begin{aligned} (1-c)A_{00} + cA_{01} &= \frac{1}{2}A_{10} + \frac{1}{2}A_{10} \\ \frac{1}{2}A_{00} + \frac{1}{2}A_{01} &= \frac{1}{2}A_{12} + \frac{1}{2}A_{12} \\ A_{03} &= \frac{1}{2}A_{13} + \frac{1}{2}A_{13} \end{aligned} \quad (1)$$

La ecuación 1 define la restricción para los puntos de control que rodean al vértice esquina  $A_{00}$  de la Figura 2 en donde  $c$  es una constante que debe ser encontrada. Las ecuaciones de restricción de los demás vértices son construidas de forma similar.

La reconstrucción de Loop se aplica a modelos generados por computador y no es útil para objetos del mundo real rastreados por un sensor de rango. además, la complejidad de su reconstrucción es considerable debido a que aplica 3 parches Splines con diferentes grados para garantizar la continuidad de plano tangente en las fronteras de los vecindarios *Quad-Net* [Loop (1994)].

Lee (1998), (1999) desarrolla una técnica de reconstrucción de modelos de forma libre mediante superficies NURBS.

Su aproximación se vale de un clustering mediante el algoritmo K-medias [Lee (1999)] para encontrar un modelo inicial con particiones polihédricas de una nube de puntos desorganizada. A partir del modelo inicial se conforma una reconstrucción triangular conectando los vértices y el centroide de cada parche polihédrico. Finalmente, la reconstrucción triangular es apareada para encontrar la división cuadrilateral del modelo.

El esquema de ajuste de continuidad de Park es

demasiado complejo para ser práctico, ya que bajo su esquema de parametrización el vector de nodos de las funciones B-Splines se considera desconocido, lo cual introduce problemas de continuidad en las fronteras de los parches adyacentes con particiones paramétricas diferentes.

El trabajo de Hoppe (1996) es el más completo en el área de reconstrucción de modelos de forma libre empleando funciones paramétricas a trozos. La metodología de Hoppe se basa en un particionamiento volumétrico efectivo que permite generar vecindarios cuadrilaterales sobre modelos tridimensionales irregulares. El proceso de ajuste del método de Hoppe utiliza el esquema de G-Splines de Peters (1991) que emplea funciones Splines con bases Bezier. Mediante el esquema de Peters, la continuidad de las fronteras es garantizada con una sola construcción cuadrilateral general que puede ser aplicada a todos los vecindarios de la partición.



Figura 3: G-Splines de Peters

La Figura 3 muestra el esquema de las funciones G-Splines de Peters, las cuales están compuestas por modelos de Bezier bicúbicos en las esquinas y bicuadráticos en los demás vecindarios. Este modelo es computacionalmente más liviano que las superficies NURBS, pero introduce restricciones en la optimización del ajuste, además, las G-Splines de Peters empleadas por Hoppe para su reconstrucción no tienen representación racional (pesos) y por tanto, no se tiene un buen control local del ajuste de la parametrización.

Los trabajos más recientes emplean modelos modificados de funciones B-Splines [Prieto y Cuartas (2004), Mount (1985)], los cuales se adaptan a vecindarios triangulares y por tanto a los modelos poligonales triangulados, presentando esquemas de continuidad generalizantes que dependen del proceso de parametrización y garantizan la suavidad del modelo final bajo un esquema de interpolación.

### 3 ESQUEMA DE CONTINUIDAD PROPUESTO

Aunque existen diversos esquemas de continuidad entre las fronteras de funciones paramétricas, dos de estos planteamientos se han destacado y se han convertido en un estándar en la industria de la representación gráfica mediante funciones B-Splines. La continuidad  $C^0$  plantea que debe existir una continuidad de vértices en

tre dos parches vecinos, este tipo de continuidad sólo garantiza que no hallan espacios ni agujeros en el límite de ensamble entre dos superficies paramétricas. La continuidad  $G^1$  plantea que debe existir continuidad en las normales entre dos parches vecinos, adicionalmente, la continuidad  $C^1$  establece que debe existir la primera derivada continua a lo largo de la unión entre dos funciones paramétricas. La continuidad  $G^1$  o  $C^1$  garantizan una transición suave entre parches ofreciendo una representación gráfica correcta, mediante la cual no se aprecia la frontera entre un parche y otro [Eck y DeRose (1995), Elsaesser (1998)]. Adicionalmente la continuidad  $C^1$  garantiza una unión matemáticamente estable la cual es continuamente derivable.

#### 3.1 Esquema de Continuidad Propuesto

Para garantizar la continuidad entre parches NURBS se empleó el modelo de continuidad de Peters (1991) contemplado por Hoppe (1996) el cual garantiza también la continuidad de normales  $G^1$  entre funciones Splines bicúbicas (grado tres). Peters propone un modelo regular y general de funciones B-Splines bicúbicas (funciones base de orden 3) con vectores de nodos regulares y el mismo número de puntos de control en ambas direcciones paramétricas. Así pues, se adaptó el modelo de Peters eligiendo funciones NURBS generalizantes, con el mismo número de puntos de control en ambas direcciones paramétricas, funciones bases bicúbicas (de orden 3), y expansiones regulares en sus vectores de nodos.

El esquema de continuidad  $C^0$  para modelos NURBS se puede simplificar significativamente si se cuenta con una parametrización regular (vector de nodos uniforme) en todos los parches de la partición, además, si el número de puntos de control es igual en ambas direcciones paramétricas, el ensamble con continuidad  $C^0$  requiere solo que los puntos de control entre parches adyacentes sean comunes.

#### 3.2 Continuidad $C^1$

El esquema de Peters para garantizar la continuidad  $C^1$  plantea parches con la misma cantidad de puntos de control en ambas direcciones paramétricas. Este planteamiento simplifica en gran medida el ajuste de continuidad en los ejes de funciones NURBS adyacentes.

Para garantizar la continuidad  $C^1$  entre los ejes de parches vecinos, se deben encontrar los puntos de control extremos que afectan la continuidad entre parches. Debido al ordenamiento de los datos en el esquema de parametrización propuesto, dos parches adyacentes tendrán el mismo número de puntos de control sobre el eje común sin importar su disposición. Para ajustar la continuidad entre ejes, se calculan los puntos de control sobre el eje analizado, para hacerlo colineal con los puntos

de control vecinos sobre los parches adyacentes (Figura 4).

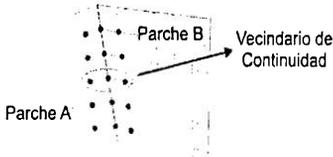


Figura 4: Continuidad entre ejes

$$P_{ejc} = \frac{P_A^{pcc} + P_B^{pcc}}{2} \quad (2)$$

La ecuación 2 ilustra la nueva posición para un punto de control sobre el eje  $P_{ejc}$  dado, donde  $P_A^{pcc}$  es el punto vecino a  $P_{ejc}$  en el parche A y  $P_B^{pcc}$  es el punto vecino  $P_{ejc}$  a en el parche B. El nuevo punto de control  $P_{ejc}$  es el punto medio entre los dos puntos de control adyacentes  $P_A^{pcc}$  y  $P_B^{pcc}$ , lo cual garantiza que los puntos de control sobre el eje, y sus vecinos adyacentes en cada parche sean colineales.

La continuidad en los vértices de la partición se garantiza al hacer que todos los puntos de control adyacentes al vértice analizado sean coplanares.

Bajo el esquema de continuidad propuesto por Peters, la continuidad en los vértices de la partición es generalizante, es decir, el proceso de ajuste es igual sin importar el número de parches que se encuentren en un vértice dado (Figura 5).

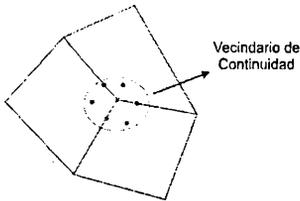


Figura 5: Continuidad en los vértices

Para garantizar la continuidad en los vértices se debe encontrar entonces el plano  $\pi$  que mejor describa al conjunto de puntos en el vecindario de continuidad, de esta forma, se tiene que:

$$\pi^T P = 0 \quad (3)$$

Donde  $\pi$  es un plano dado, y  $P$  es un punto sobre el plano (ecuación 3). Si se conforma un sistema sobredeterminado con más de cuatro puntos, se puede encontrar la ecuación del plano que mejor se ajuste a un conjunto de puntos dado.

$$\begin{bmatrix} P_x^1 & P_y^1 & P_z^1 & 1 \\ P_x^2 & P_y^2 & P_z^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ P_x^n & P_y^n & P_z^n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_x \\ \pi_y \\ \pi_z \\ \pi_D \end{bmatrix} = 0$$

La ecuación 4 muestra la disposición del sistema sobredeterminado, donde  $P = [P^1, P^2, \dots, P^n]^T$  (con  $n \geq 4$ ) son los puntos de control sobre el vértice analizado. El sistema es resuelto mediante la descomposición en valores singulares  $SVD(P)$ , siendo la última columna de la matriz la ecuación del plano que mejor se aproxima al conjunto de puntos en el sentido del error cuadrático medio [Hartley y Zisserman (2003)].

Finalmente, la continuidad se ajusta al proyectar los puntos de control en  $P$  sobre el plano  $\pi$  dado por la ecuación 4.

La Figura 6 ilustra el ajuste de continuidad para los casos  $C^0$  y  $C^1$ , donde se puede apreciar el ajuste en la suavidad del modelo debido a la continuidad  $C^1$ .

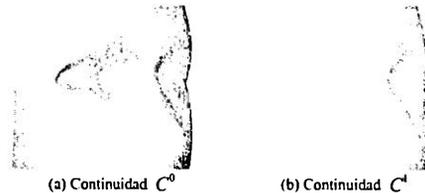


Figura 6: Ajuste de Continuidad

#### 4 CONCLUSIONES

El esquema de continuidad empleado simplifica el cálculo de funciones de acople complejas como las que se emplean en algunos de los trabajos reportados en la literatura, ya que el modelo paramétrico NURBS empleado es general y se puede aplicar a todos los vecindarios generados en el proceso de particionamiento. La continuidad de normales  $C^1$  garantiza una representación suave y continua de los modelos reconstruidos mediante el esquema de parametrización propuesto.

La formulación empleada de funciones NURBS es generalizante, ya que puede ser empleada para aproximar los vecindarios regulares e irregulares que se presentan en el particionamiento, además, al simplificar la expansión de nodos haciéndola regular, el análisis de continuidad también es general y no depende de los procesos de particionamiento y parametrización del modelo.

#### AGRADECIMIENTOS

El desarrollo de este trabajo fue financiado parcialmente por la Dirección Nacional de Investigación (DINAIN)

Universidad Nacional de Colombia y por el Programa de Becas de Estudiantes Sobresalientes de Posgrado, de la misma Universidad.

#### REFERENCIAS

- Anderson, C. y Crawford-Hines, C. (2000), Fast generation of nurbs surfaces from polygonal mesh models of human anatomy, Technical Report CS-99-101, Department of Computer Science, Colorado State University, Fort Collins.
- Blais, F. (2004), 'Review of 20 years of range sensor development', *Electronic Imaging* **13**, 231-240.
- Branch, J., Gómez, J. y Prieto, F. (2004), Reconstrucción de superficies a partir de imágenes de rango, revisión de la literatura. Technical report, Universidad Nacional de Colombia.
- Curliss, B. (1997), New methods for surface reconstruction from range images, PhD thesis, Stanford University.
- de Berg, M. y van Kreveld, M. (2000), *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, 2nd edn, Springer Verlag.
- Eck, H. y DeRose, M. (1995), 'Multiresolution analysis of arbitrary meshes', *Computer Graphics* pp. 173-782.
- Elsaesser, B. (1998), Approximation whit rational b-splines curves and surfaces, PhD thesis, Vanderbilt University.
- Farin, G. (2001). *Shape*. 3th edn, Springer-Verlag, New York.
- Fisher, R. y Craig, R. (2001), Constraineed object reconstruction incorporating free-form surfaces. Technical report, University of Edinburgh.
- Hartley, R. y Zisserman, A. (2003). *Multiple View Geometry in computer vision*, 2nd edn, Cambridge University.
- Hoppe, H. (1992). 'Surface reconstruction from unorganized points'. *Computer Graphics* .
- Hoppe, H. (1993). 'Mesh optimization', *Computer Graphics* .
- Hoppe, H. (1994). Piecewise smooth surface reconstruction. Technical report. University of Washington.
- Hoppe, H. (1996). Automatic reconstruction of b-spline surfaces of arbitrary topological type, in 'Proceedings of the 23th annual conference on Computer graphics and interactive techniques', ACM Press, pp. 325-334.
- Hormann, K. (2002). From scattered samples to smooth surfaces. Technical report, California Institute of Technology.
- Hsin-Yu, H. (2002), 'A nurbs-based error concealment technique for corrupted images from packet loss'. *IEEE Image Processing* **2**.
- Joh, C. (2003), 'Development of a nurbs-based wing design optimization system', *IEEE Science and Technology* **1**.
- Lee, U. (1998), Geometric model from scattered 3d range data, Technical report, Seoul National University.
- Lee, U. (1999), Constructing nurbs surface model from scattered and unorganized range data, in 'Second International Conference on 3D Imaging and Modeling'.
- Loop, C. (1994), 'Smooth spline surfaces over irregular meshes', *Computer Graphics* pp. 303-310.
- Maeda, K. y Kumamaru, M. (2002), 'Shapes modeling of 3d objects based on a hybrid representation using extended b-spline surface model', *IEEE Pattern Recognition* .
- Mount, D. (1985), Voronoi diagrams on the surface of a polyhedron. Technical report, University of Maryland, Department of Computer Science.
- Peters, J. (1994), 'Constructing cl surfaces of arbitrary topology using bicuadric and bicubis splines', *Designing Fair Curves and Surfaces* pp. 277-293.
- Prieto, F. (2004), Reconstrucción de superficies a partir de imágenes de rango.
- Prieto, F. y Cuartas, E. (2004), Optimización de superficies nurbs mediante el algoritmo de levemberg-marquardt. Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.
- Randrianarivony, M. y Brunnett, G. (2003), Geometric modeling and graphics.
- Randrianarivony, M. y Brunnett, G. (2002), Parallel implementation of surface reconstruction from noisy samples.
- Sy-sen, T. y Liew, A. (1994), Lip-synce in human face animation based on video analysis and spline models, Technical report.
- Tan, H. (1995), 'Smooth piecewise biquartic surfaces from quadrilateral control polyhedra with isolated n-sided faces', *Computer Aided Desing* **27**(10), 741-758.
- Wayne, T. (1997). *The NURBS Book*, 2nd edn, Springer-Verlag, New York.
- Zisserman, A. (2003), *Multiple View Geometry in computer vision*, 2nd edn, Cambridge University.

