

# Diseño de una Aplicación Educativa para Estudiar el Problema de Flujo Confinado Estacionario en Suelos con Diferencias Finitas

## Design of an Educational Application to Study the Steady-State Confined Flow with Finite Differences

Wilson Rodríguez C., Msc.<sup>1</sup>, Myriam R. Pallares M., MSc.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Pontificia Universidad Javeriana de Cali, Colombia

<sup>2</sup>Universidad Santo Tomás de Bogotá, Colombia

wrodriguez@puj.edu.co, myriampallares@correo.usta.edu.co

Recibido para revisión 26 de Marzo de 2007, Aceptado 30 de Noviembre de 2007, Versión final 9 de Diciembre de 2007

**Resumen**—Las nuevas tecnologías informáticas abren un mundo de posibilidades inagotable en el ámbito de la docencia. En el caso particular de las enseñanzas técnicas, el uso de estas tecnologías se convierte en indispensable por la propia naturaleza de los recursos actuales de diseño y producción industrial. Los métodos numéricos ofrecen un amplio campo de actuación en este sentido. Por un lado, aparecen como una asignatura con gran porcentaje de troncalidad en cualquier carrera de ingeniería. Por otro lado, están en la base del desarrollo tecnológico del que a su vez se benefician en un constante proceso de retroalimentación. El trabajo que se presenta a continuación, consiste en la elaboración de un material didáctico (herramienta educativa) destinado a la enseñanza de la ecuación de Laplace en dos dimensiones por medio de diferencias finitas. Particularmente, se estudia el flujo estable confinado en tablestacados, presas de concreto, excavaciones y drenes. Este tipo de materiales, han sido desarrollados y utilizados con éxito por varias universidades a nivel mundial, a lo largo de los últimos años dentro de los nuevos planes de estudio. El software educativo objeto de este trabajo se ha construido utilizando como plataforma de pre y posproceso gráfico a GiD y como lenguaje de programación del motor de cálculo de diferencias finitas a Fortran. El resultado, es una herramienta educativa muy útil, que permite una efectiva comunicación profesor-alumno, adecuada tanto para las clases presenciales en el aula de clase como para el trabajo personal del estudiante.

**Palabras Clave**—Desarrollo de Software, Software Educativo, Diferencias Finitas, Laplace 2D, Medio Poroso.

**Abstract**—New computer technologies open an inexhaustible world of possibilities in the environment of the

teaching. In the case peculiar of the technical teachings, the use of these technologies becomes indispensable for the own nature of the current resources of design and industrial production. The numeric methods offer a wide performance field in this sense. On one hand, they appear like a subject with great percentage of transversality in any engineering career. On the other hand, they are in the base of the technological development of the one that in turn benefit in a constant feedback process. The work that is presented next consists on the elaboration of a didactic material (educational tool) dedicated to the teaching of the Laplace equation in two dimensions by means of finite differences. Particularly, the confined flow in sheet-pile walls, concrete dams, excavations and drainages, is studied. This type of materials, they have been developed and used successfully by several universities at world level, along the last years inside the new study plans. The software didactic object of this work has been built using as platform of graphic pre and post process to GiD and like programming language from the motor of calculation of finite differences to Fortran. The result is a very useful educational tool that an effective communication professor-student allows, adapted so much for the present classes in the classroom like for the student's personal work.

**Keywords**—Software Development, Educational Software, Finite Differences, Laplace 2D, Porous Media.

### I. INTRODUCCIÓN

ESTE proyecto parte del desafío de pensar nuevas formas de acceso al conocimiento, y consolidar el uso de la informática en propuestas que planteen distintas concepciones sobre la enseñanza y sobre el rol del docente

y el alumno en el contexto áulico. Los métodos numéricos han progresado rápidamente, y este enorme crecimiento, junto con los cambios producidos, constituye un reto para los docentes, que deben orientar la construcción de los conocimientos. Se trata de enriquecer el pensamiento del estudiante y de cultivar en él habilidades y aptitudes para descubrir y usar los conocimientos matemáticos, que son clásicamente difíciles para el alumnado por su nivel de abstracción. Es así como surge la idea de crear un “software educativo” como herramienta auxiliar para facilitar la comprensión de estos temas, de manera amena, a través de una aplicación que incluye la simulación numérica de fenómenos físicos. En particular se trabaja con el tema “Ecuación de Laplace 2D con diferencias finitas”. Este tema es abordado en las carreras universitarias que incluyen la enseñanza de los métodos numéricos en su pénsum académico (las ingenierías en general). La utilización de elementos tecnológicos hará posible que nuevas estrategias didácticas enriquezcan los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

El software educativo Geoflow 1.0 fue desarrollado dentro de un proyecto de investigación adelantado en el año 2004 como parte de la producción investigativa del grupo en simulación y control numérico-SICON. La herramienta es un producto de la línea de investigación en modelación numérica que contempla el desarrollo de software educativo como un área estratégica de la investigación del grupo en la actualidad. El programa es un modelador computacional de la ecuación de Laplace en dos dimensiones por medio de diferencias finitas. Sus características de manejo sencillo hacen de este una herramienta eficiente para la docencia en diversos temas de ciencia básica e ingeniería. La primera versión tiene implementada la formulación estacionaria, sin embargo, se espera en una segunda fase del proyecto integrar mejoras, tales como la implementación del caso transitorio.

## II. ANTECEDENTES

Con la introducción de los nuevos planes de estudio en la titulación de las ingenierías y en general, de la gran mayoría de las carreras en Colombia, las asignaturas técnicas de ingeniería sufren una importante reestructuración. La apuesta por el sistema de créditos conlleva una reubicación de los contenidos en el currículo y una disminución en el número de horas lectivas globales. Además, se hace necesario introducir un carácter experimental en algunas de ellas con la asignación de prácticas en un laboratorio de informática.

El diseño de estas herramientas educativas, se constituyen en un reto para cambiar el modo de enseñar, de manera que vaya más acorde con los instrumentos que las nuevas tecnologías ponen a nuestra disposición y, sobre todo, que permita realizar una educación ingenieril para la vida profesional; facilitando al alumno adaptarse a los

distintos cambios que, sin duda, tendrá que acometer a lo largo de su carrera.

Con este trabajo, se busca proporcionar al alumno una herramienta para obtener la solución de diversos problemas gobernados por la ecuación de Laplace. Obtener la aproximación por diferencias finitas a la ecuación de gobierno del problema (Ecuación de Laplace) y utilizarla para determinar los potenciales y el flujo en todos los puntos libres de un dominio. Analizar las ventajas que ofrecen los métodos numéricos (en especial los de diferencias finitas) como alternativa de solución de problemas de ingeniería.

## III. ESTADO DEL ARTE

El artículo hace referencia en su mayoría a la descripción de ecuaciones matemáticas y al desarrollo mismo de la aplicación educativa. Por lo mismo, este espacio es ideal y conveniente para plasmar un pequeño análisis sobre la importancia de la informática educativa en la actualidad.

Hace ya algunos años, la pregunta más inquietante respecto a la informática en el ámbito educativo estaba relacionada con su viabilidad, esto era: cuándo estará la infraestructura tecnológica (hardware y software) a disposición de las instituciones educativas?

Pasado el tiempo, las necesidades fueron un poco diferentes. La gran preocupación se centraba en cómo integrar de forma activa la informática en el currículo y cómo desarrollar cultura informática en la comunidad educativa.

El avance tecnológico ha llevado a que también las necesidades vayan evolucionando. Hoy en día que ya tenemos a nuestro alcance la tecnología, las necesidades están ligadas a crear diferencias cuando se generan ambientes de aprendizaje haciendo uso de la informática.

Vivimos en un mundo que se caracteriza por el cambio constante, por la enorme generación y exposición de datos y conocimientos, el acceso simultáneo a diversos canales de información, donde el que enseña no es sólo el profesor y en el cual el que aprende no termina nunca de hacerlo. En este contexto es evidente, que la educación informática es una condición necesaria para sacar provecho de la comunidad global en la que vivimos.

En este orden de ideas, es importante dar a conocer, los objetivos que con el trabajo se pretendieron lograr. Estos son:

Familiarizar al alumno con las nuevas tecnologías informáticas en el campo de la ingeniería, intentando mostrar su utilidad tanto en la formación como en el posterior desarrollo profesional.

Poner en práctica los conocimientos adquiridos en las clases teóricas, lo que se cree, hace más atractivo el aprendizaje de los distintos conceptos estudiados a través de la experimentación.

Inculcar el sentido del autoaprendizaje en los alumnos como método de trabajo habitual.

#### IV. CONCEPTOS BÁSICOS

Un modelo matemático es una abstracción de representación del mundo real aplicada al tratamiento predictivo, que discretiza áreas o cuerpos en 2 ó 3 dimensiones respectivamente, aplicando funciones aproximadas del comportamiento de las propiedades que se quieren estudiar. Un método de aplicación de modelos matemáticos en el problema de flujo en medio poroso es el método de diferencias finitas, que consiste en la determinación de valores finales aproximados a partir de valores iniciales ciertos, aplicados a una función no diferenciable, mediante el cálculo en etapas finitas.

El método de las diferencias finitas es una técnica numérica simple que se emplea para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Una solución de diferencias finitas a la ecuación de Laplace, se obtiene en dos pasos. Primero aproximándose a la ecuación diferencial y a las condiciones en la frontera por medio de un grupo de ecuaciones algebraicas lineales llamadas ecuaciones de diferencias, en los puntos de una cuadrícula situada dentro de la región de la solución, y segundo, resolviendo este grupo de ecuaciones algebraicas. Así las cosas, el dominio de los problemas estará constituido por rectángulos divididos en mallas rectangulares no uniformes. Con la herramienta es posible determinar los valores de potencial y flujo en problemas de flujo estacionario confinado.

##### A. Ecuaciones Matemáticas

Existen situaciones en las cuales las condiciones del flujo son bastante simples, y en las que es posible describir el flujo que pasa a través del área de una sección transversal dada, por medio de la ley de Darcy. En problemas más complicados esta ley no es suficiente, ya que las condiciones de flujo (velocidad, gradiente, etc.) varían por todo el medio y solo pueden ser expresadas en forma de ecuación diferencial en un punto particular del medio. Es necesario entonces, acudir a una ecuación de flujo en suelos, que sirva de base para desarrollar redes de flujo y para otros métodos de resolución de problemas de filtración. Para deducir tal ecuación, es necesario considerar un elemento de suelo, de lados  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , como se muestra en la Figura 1.

La rata de flujo en la dirección  $x$  es  $q_x$  a través del plano  $x=0$  y  $q_x + dq_x$  a través del plano  $x = dx$ . Los gradientes hidráulicos en la dirección  $x$  en estos dos planos, son respectivamente,  $i_x$  e  $i_x + di_x$  (para el flujo en las direcciones  $y$  y  $z$  son adoptadas notaciones similares). A partir de estas consideraciones la ecuación de Darcy se puede escribir como:

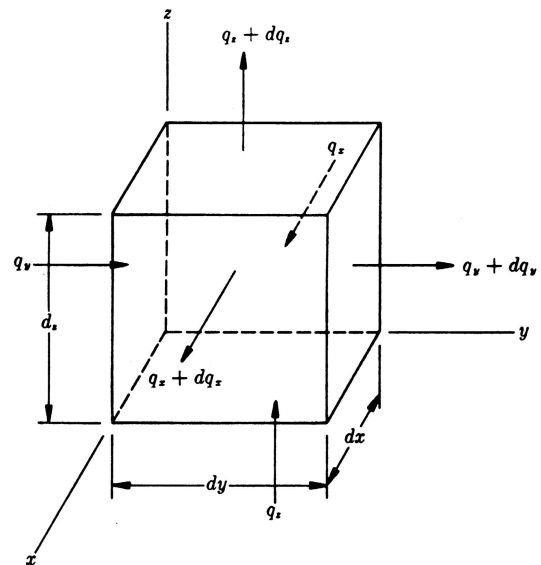


Figura. 1. Flujo a través de un elemento de suelo en tres dimensiones.

$$q_x = k_x i_x dy dz \quad q_x + dq_x = k_x (i_x + di_x) dy dz$$

$$q_y = k_y i_y dx dz \quad q_y + dq_y = k_y (i_y + di_y) dx dz \quad (1)$$

$$q_z = k_z i_z dx dy \quad q_z + dq_z = k_z (i_z + di_z) dx dy$$

En (1)  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  son las permeabilidades en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente. Si el volumen de los elementos permanece constante y el fluido es incompresible, la rata total de flujo que entra al elemento debe ser igual a la que sale de él, esto es:

$$q_x + q_y + q_z = (q_x + dq_x) + (q_y + dq_y) + (q_z + dq_z) \quad (2)$$

A partir de la ecuación (2) se obtiene,

$$k_x i_x dy dz + k_y i_y dx dz + k_z i_z dx dy = 0 \quad (3)$$

Siendo  $i_x = \partial\phi/\partial x$ ,  $i_y = \partial\phi/\partial y$ ,  $i_z = \partial\phi/\partial z$ , entonces,

$$\partial i_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx \quad \partial i_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy \quad \partial i_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} dz \quad (4)$$

En las expresiones (4)  $\phi$  representa la cabeza total aplicada o potencial. La ecuación (4) puede escribirse como:

$$\left[ k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] dx dy dz = 0 \quad (5)$$

La expresión (5) es llamada ecuación de continuidad. En el caso de flujo bidimensional, la ecuación se simplifica a,

$$\left( k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dx dy = 0 \quad (6)$$

Si el suelo es isotrópico ( $k_x = k_y = k$ ) la ecuación de continuidad queda reducida a,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

La expresión (7) es la conocida ecuación de Laplace en dos dimensiones y la principal ventaja de su aplicación reside en que cada punto del espacio está asociado solo con una cantidad escalar desconocida (la función incógnita  $\phi$ ).

### B. Formulación numérica de diferencias finitas

El método consiste en una aproximación de derivadas parciales por expresiones algebraicas envolviendo los valores de la variable dependiente en un limitado número de puntos seleccionados. Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema (ecuación 7), se reemplaza por un número finito de ecuaciones algebraicas, escritas en términos de los valores de la variable dependiente en puntos seleccionados. Por tanto, los valores de los puntos seleccionados se convierten en las incógnitas, en vez de la distribución espacial continua de la variable dependiente. Las ecuaciones son lineales si las ecuaciones diferenciales parciales también lo son. El sistema de ecuaciones algebraicas debe ser resuelto y puede envolver un número largo de operaciones aritméticas.

Con el uso del computador, actualmente, las operaciones se desarrollan por medio de un programa de cálculo.

El método de diferencias finitas muestra ser una de las mejores técnicas empleadas en el desarrollo de problemas de flujo a través de medios porosos. En la Figura 2 se ilustra una situación donde los cuatro nodos alrededor del nodo central tienen separaciones distintas a fin de generalizar el problema a retículas en las cuales los nodos no están uniformemente espaciados. Las distancias a los puntos L, R, A, y B desde el punto O, el nodo central, son  $h_L$ ,  $h_R$ ,  $h_A$  y  $h_B$ . Estos puntos son nodos que están a la izquierda, derecha, arriba y abajo del nodo central. Así mismo, los valores de la incógnita ( $\phi$ ) en dichos puntos son  $\phi_L$ ,  $\phi_R$ ,  $\phi_A$ , y  $\phi_B$  y las primeras derivadas entre los puntos L y O, O y R, A y O, y, O y B, se aproximan con:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{O,R} = \frac{(\phi_R - \phi_O)}{h_R}, \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{O,B} = \frac{(\phi_B - \phi_O)}{h_B} \quad (8)$$

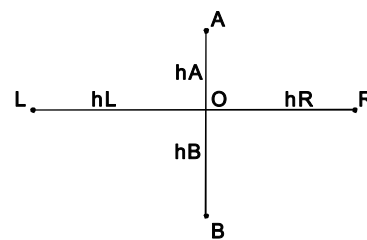


Figura. 2. Disposición nodal no uniforme.

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{L,O} = \frac{(\phi_O - \phi_L)}{h_L}, \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{A,O} = \frac{(\phi_O - \phi_A)}{h_A}$$

Las ecuaciones (8) pueden interpretarse como aproximaciones por diferencias centrales a puntos que están en la mitad entre los puntos L y O, O y R, A y O, y, O y B. De esta manera, las segundas derivadas se aproximan con:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_O &= \frac{\left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{O,B} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{A,O} \right]}{\left[ \left( \frac{h_A + h_B}{2} \right) \right]} = \\ &= \frac{2}{(h_A + h_B)} \left[ \frac{\phi_A}{h_A} - \frac{(h_A + h_B) \phi_O}{(h_A h_B)} + \frac{\phi_B}{h_B} \right] \\ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_O &= \frac{\left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{O,R} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{L,O} \right]}{\left[ \left( \frac{h_L + h_R}{2} \right) \right]} = \\ &= \frac{2}{(h_L + h_R)} \left[ \frac{\phi_L}{h_L} - \frac{(h_L + h_R) \phi_O}{(h_L h_R)} + \frac{\phi_R}{h_R} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Las ecuaciones (9) no son aproximaciones por diferencias centrales exactamente al punto O, y al ser usadas para aproximar las segundas derivadas se provoca un error de primer orden.

Finalmente, la expresión que permite calcular el potencial del nodo central O en función de las distancias a los puntos L, R, A, y B y el valor de la incógnita ( $\phi$ ) en los puntos vecinos es,

$$\phi_O = \frac{(hL * hR * hA * hB)}{hA * hB + hL * hR} * \left[ \frac{1}{(hL + hR)} \left( \frac{\phi_L}{hL} + \frac{\phi_R}{hR} \right) + \frac{1}{(hA + hB)} \left( \frac{\phi_A}{hA} + \frac{\phi_B}{hB} \right) \right] \quad (10)$$

De esta manera es posible particularizar la ecuación (10) para cada situación según corresponda. Se pueden distinguir cuatro casos,

**Caso 0:** Incluye todos los nodos internos del modelo. Así, cada nodo central O estará rodeado por sus cuatro nodos vecinos. Estos nodos no poseen ninguna condición de frontera.

**Caso 1:** Nodos ubicados sobre los contornos del modelo. El nodo central en las fronteras se encuentra rodeado de solo tres de sus nodos vecinos. Así, los nodos localizados sobre los contornos superior e inferior, estarán rodeados por los dos nodos laterales y el inferior o superior según corresponda. Si los nodos están en las fronteras laterales, el nodo central tendrá a los dos nodos inferior y superior como vecinos además del izquierdo o derecho según sea el caso. Estos nodos poseen cualquier tipo de condición de contorno.

**Caso 2:** Nodos esquina rodeados por sólo dos de sus nodos vecinos. Para las esquinas ubicadas al lado izquierdo del modelo, el nodo central O estará rodeado del nodo derecho y los nodos superior e inferior según corresponda. Lo mismo ocurre para las esquinas que se encuentran localizadas sobre el lado derecho. Estos nodos poseen cualquier tipo de condición de contorno.

**Caso 3:** Nodos esquina rodeados por sus cuatro vecinos. Estos nodos poseen cualquier tipo de condición de contorno.

Para formular la condición de Neumann en las fronteras del modelo a través del método de diferencias finitas se emplea una aproximación en diferencias de la primera derivada de la variable principal. Para ilustrar este procedimiento, se desarrolla aquí el planteamiento de la aproximación para una frontera vertical, donde únicamente existen los nodos derecho, central y sus vecinos superior e inferior, tal y como se describe en el caso (1). A partir de esta premisa es necesario incluir un nodo ficticio (a la izquierda en este caso) cuyo potencial debe ser calculado a través de la aproximación en diferencias finitas, con (ver Figura 3).

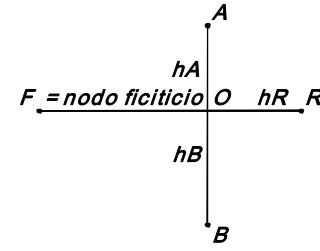


Figura. 3. Configuración para la condición de frontera de Neumann.

$$\phi_F = \phi_R$$

Una vez obtenido el valor de la incógnita en el nodo ficticio, se reemplaza en la ecuación general (10) como potencial izquierdo.

Para acelerar la convergencia se utiliza un factor de sobrerrelajación denominado w, adaptado a retículas no uniformes, y para su implementación, se parte de la ecuación general (10) (aproximación de la ecuación de Laplace en diferencias finitas). Esta expresión se multiplica por el factor de sobrerrelajación dividido entre el factor multiplicador de  $\phi_O$ , así:

$$\left( \frac{w}{\left( \frac{1}{hL * hR} + \frac{1}{hA * hB} \right)} \right) * \left[ \frac{1}{(hL + hR)} \left( \frac{\phi_L}{hL} + \frac{\phi_R}{hR} \right) + \frac{1}{(hA + hB)} \left( \frac{\phi_A}{hA} + \frac{\phi_B}{hB} \right) \right] - \phi_O \left( \frac{1}{hL * hR} + \frac{1}{hA * hB} \right) = 0 \quad (12)$$

Sumando  $\phi_O$  a ambos lados de la ecuación se obtiene la expresión final de sobrerrelajación, donde los términos en  $\phi$  de la izquierda son los valores actuales de la variable y el término de la derecha se convierte en el nuevo valor. La sobrerrelajación puede disminuir el número de iteraciones a casi la mitad.

$$-k \frac{\partial \phi}{\partial x} = -k \frac{(\phi_R - \phi_F)}{2 hR} = 0, \quad (11)$$

$$(\phi_R - \phi_F) = 0,$$

$$\phi_o + \left( \frac{w}{\left( \frac{1}{hL * hR} + \frac{1}{hA * hB} \right)} \right) * \left[ \frac{1}{(hL + hR) \left( \frac{\phi_L}{hL} + \frac{\phi_R}{hR} \right)} + \frac{1}{(hA + hB) \left( \frac{\phi_A}{hA} + \frac{\phi_B}{hB} \right)} - \phi_o \left( \frac{1}{hL * hR} + \frac{1}{hA * hB} \right) \right] = \phi_o \quad (13)$$

### C. Casos de flujo estable confinado

El caso de flujo estable en el cual la cabeza del fluido es conocida en todo el borde permeable externo es llamado flujo estable confinado. Entre los casos más representativos están el flujo en la fundación de un muro tablestacado, flujo bajo presas o vertederos de concreto, flujo en la vecindad de una excavación y flujo en rellenos con drenes.

## V. DISEÑO DEL SOFTWARE

La herramienta computacional Geoflow 1.0, está en capacidad de resolver los problemas de flujo estable confinado mencionados en el *apartado C* anterior, por medio de diferencias finitas considerando isotropía del suelo. A continuación se presenta la estructura y el uso de la herramienta así como el desarrollo práctico de cuatro modelos obtenidos con la aplicación que son comparados posteriormente con Matlab

### A. Estructura de la herramienta

La herramienta educativa Geoflow 1.0 es propiamente un “problem type” creado sobre una plataforma de pre y posproceso gráfico, con el fin de capturar de manera interactiva los datos de entrada del problema y presentar gráficamente los resultados del análisis. El problem type está diseñado para intercambiar información acerca de los parámetros generales del problema, condiciones de contorno sobre líneas y puntos, propiedades físicas de los materiales, lanzar el módulo de cálculo y procesar resultados. De esta manera, la herramienta se estructura en tres partes: preproceso, solución y posproceso. En el preproceso se cargan los datos de entrada del problema, en la solución se lanza el motor de cálculo de diferencias y en el posproceso se presentan los resultados del análisis.

#### 1) Implementación de la interfase con GiD

Para elaborar la interfase de comunicación con GiD es necesario desarrollar seis (6) programas (Figura 4) que se explican brevemente a continuación:

- Geoflow.prb: proporciona la ventana para cargar la información de los parámetros generales del problema.

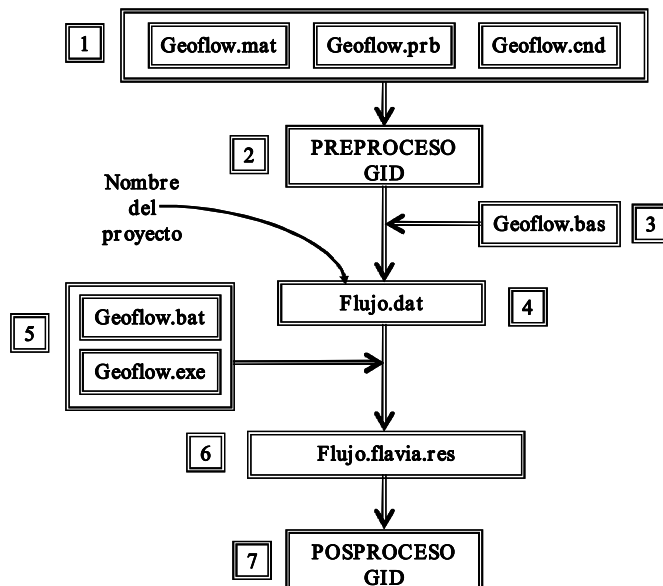


Figura. 4. Diagrama de flujo de la aplicación.

- Geoflow.cnd: informa a GiD acerca de las condiciones impuestas al modelo (sobre líneas y puntos): Potencial y Flujo.
- Geoflow.mat: proporciona información acerca de las propiedades físicas de los materiales: Permeabilidad
- Geoflow.bas: proporciona el formato del archivo de datos de intercambio entre GiD y el código de cálculo.
- Geoflow.bat: encargado de lanzar el módulo de cálculo. La opción Calculate de GiD, ejecuta este archivo.
- Geoflow.exe: es el motor de cálculo desarrollado en Fortran, encargado de solucionar el problema por aproximación en diferencias finitas.

En la Figura 4: [1] representa el grupo de archivos de materiales (Geoflow.mat), datos del problema (Geoflow.prb) y condiciones (geoflow.cnd). Estos archivos son en el preproceso las bases fundamentales del sistema de análisis. [2] Indica la etapa de preproceso, en la cual el archivo Geoflow.bas [3], genera otro archivo de datos llamado Flujo.dat [4]. Este último es la entrada al módulo de cálculo, que es iniciado por medio del archivo Geoflow.bat (5). Finalmente se genera el archivo Flujo.flavia.res [6] el cual contiene todos los datos necesarios para el posproceso (7).

#### 2) Implementación del motor de cálculo

El motor de cálculo desarrollado en Fortran consta de siete subrutinas. La primera realiza la lectura de datos consignados en el fichero \*.dat. La segunda, lleva a cabo un proceso de organización de nodos tomando como base sus coordenadas. De esta manera, se obtiene una configuración reticular que permite el almacenamiento de las matrices de coordenadas, potenciales y casos y que determinan la forma de realización del cálculo de cada uno de los nodos de la malla de diferencias finitas. Se aplican

las condiciones Dirichlet como paso previo a la utilización de la subrutina de sobrerelajación que emplea como núcleo un seleccionador de casos de cálculo, clasificados a partir de la cantidad de nodos vecinos y del tipo de condiciones de contorno asignadas. Cuando se identifican casos relacionados con condiciones Neumann se usan nodos ficticios. Para controlar las iteraciones se calcula el error absoluto aproximado y se compara con la tolerancia especificada por el usuario, una vez satisfecha finaliza el ciclo de cálculo del potencial y continúa el de flujo, con base en los valores de la incógnita para la aproximación en diferencias finitas de las pendientes vertical y horizontal de los isocontornos de potencial. La Subrutina (6) crea el fichero \*.flavia.res donde se consignan los valores de potencial y campo que emplea GiD para llevar a cabo la fase de posproceso.

A continuación se presenta un resumen de las etapas del programa:

Declaración de variables

- (1) Lectura de datos desde el archivo \*.dat generado por GiD
  - (2) Ordenamiento de nodos de acuerdo a coordenadas
  - (3) Ensamble de matriz de nodos, coordenadas, potenciales y casos que identifican la forma de cálculo de cada nodo
  - (4) Método de sobrerelajación adaptado a mallas de paso irregular
  - (5) Cálculo del flujo
  - (6) Escritura de resultados
- Fin

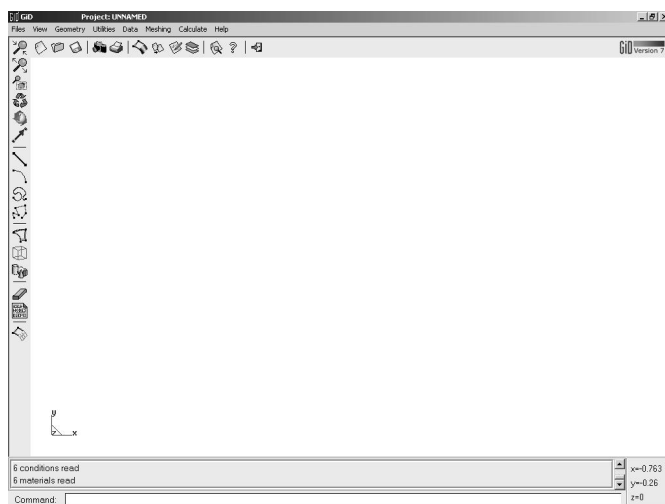


Fig. 5. Ambiente de Preproceso GiD.

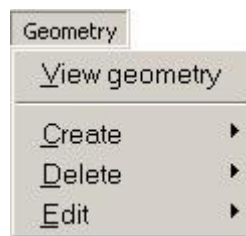
### 3) Módulo de Preproceso

En la Figura 5 se presenta el ambiente del módulo de preproceso. El menú "Calculate" constituye el módulo de solución.

Los datos de entrada del modelo son cargados a través de este módulo. A continuación se describen las tareas de las principales herramientas que lo componen.

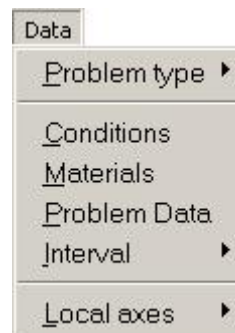
#### Creación del modelo geométrico:

- Puntos y líneas
- Arcos y círculos
- Rectángulos y polígonos superficies y volúmenes



#### Asignación de condiciones de contorno sobre el modelo:

- Potencial sobre líneas del modelo geométrico
- Potencial sobre puntos del modelo de diferencias finitas
- Flujo sobre líneas del modelo geométrico
- Flujo sobre puntos del modelo de diferencias finitas
- Asignación del material:
- Base de datos de materiales
- Asignación de los datos generales del problema: condiciones iniciales, criterios de convergencia y sobrerelajación e iteraciones.
- Potencial inicial
- Tolerancia
- Numero máximo de iteraciones
- Factor de sobrerelajación



#### Generación de la malla:

Discretización del modelo a través de una malla estructurada de nodos (para aplicar el método de diferencias finitas).

Debido a que se trata una malla de diferencias finitas es preciso trabajar con:

- Malla estructurada
- Tipo de elementos: cuadriláteros

La adaptación del método de diferencias finitas a retículas no uniformes de paso irregular implementado en esta aplicación, permite refinar la malla en zonas de interés, por ejemplo, en las regiones cercanas a los nodos esquina.

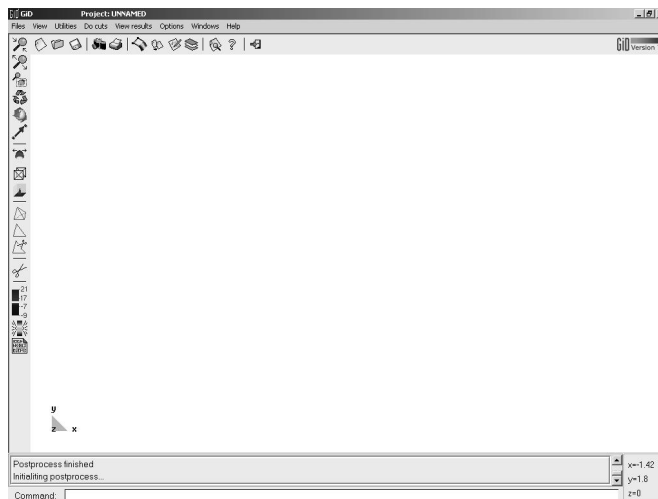
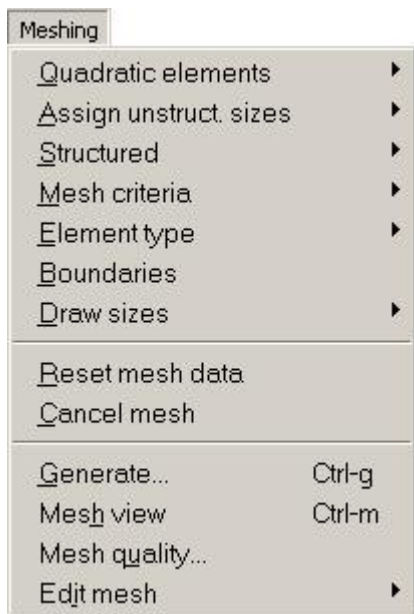
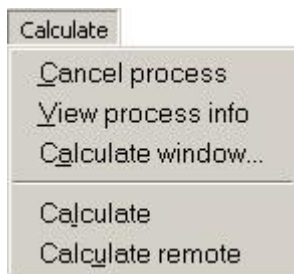


Figura. 6. Ambiente de Posproceso GiD.

#### 4) Módulo de Solución

Resolución del problema con diferencias finitas utilizando sobrerrelajación. La opción “Calculate” de este módulo es el encargado de ejecutar el motor de cálculo.



#### 4) Módulo de Posproceso

En la Figura 6 se presenta el ambiente del módulo de posproceso. En él se realiza el procesamiento de los resultados generados por el módulo de cálculo para presentarlos de manera gráfica.

#### Visualización de resultados:

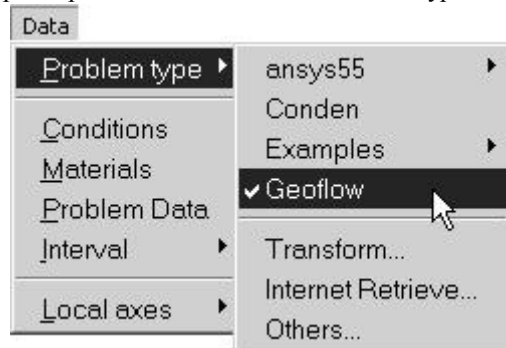
- Contornos llenos
- Líneas de contorno
- Vectores



#### B. Uso de la herramienta

A continuación se describen las tareas de los menús principales que se utilizan para analizar un problema de diferencias finitas con la herramienta.

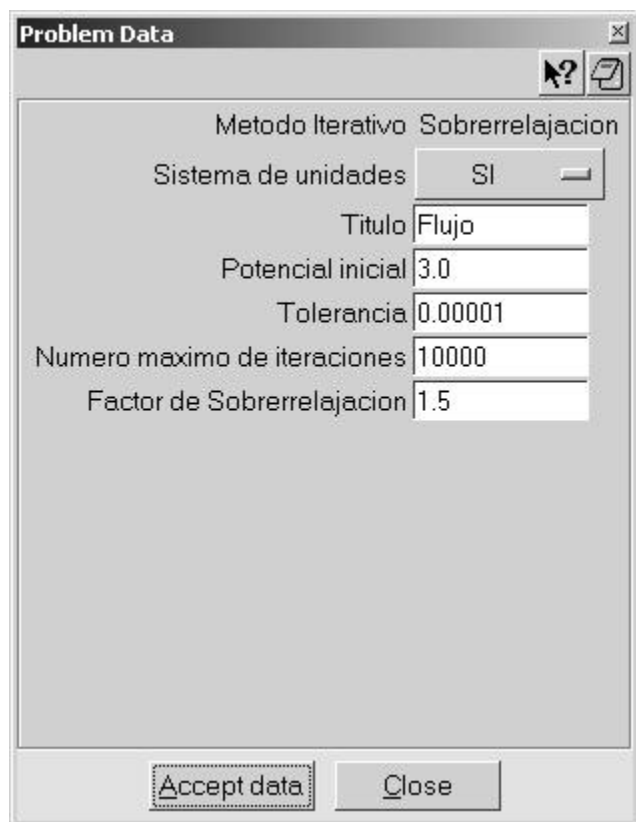
(1) Tipo de problema: Menú Data-Problem Type-Geoflow





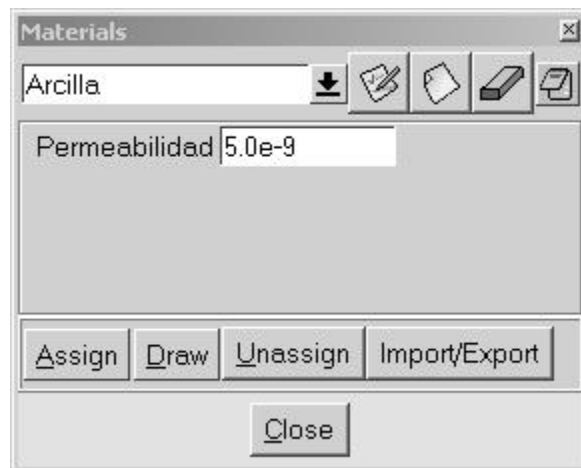
(2) Datos generales del problema: Menú Data-Problem Data

- Potencial Inicial: valor de prueba que se utiliza para dar inicio al método sobrerrelajación
- Tolerancia: empleada como criterio de parada para el método de sobrerrelajación
- Número máximo de iteraciones: criterio de parada usado cuando no se cumple el criterio de tolerancia.
- Factor de sobrerrelajación: incrementa la velocidad de convergencia del método. Reduce el número de iteraciones aproximadamente a la mitad.



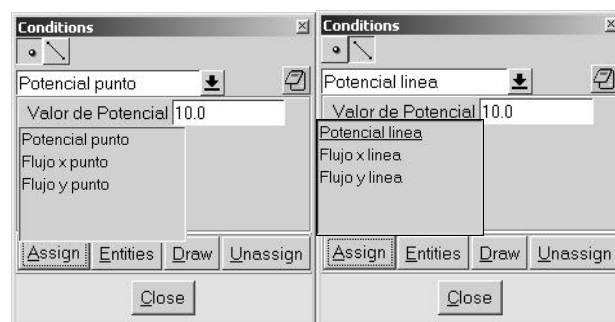
(3) Materiales: Menú Data-Materials:

- Adicionar Material: agrega nuevos materiales a la librería existente
- Borrar Material: elimina uno o varios materiales de la librería existente
- Salvar cambios: guarda o actualiza cambios realizados sobre los valores de la permeabilidad asociada a cada material.



(4) Condiciones de contorno: Menú Data-Conditions

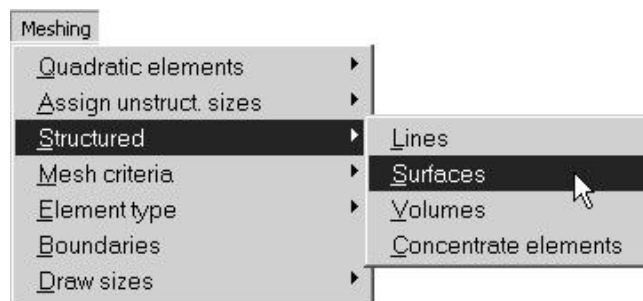
Las fronteras pueden ser prescritas asignando Potencial o Flujo en las direcciones x o y, sobre las líneas del modelo geométrico o sobre los nodos de la malla de diferencias finitas por medio de las ventanas mostradas. Para asignar las condiciones sobre las líneas, es necesario visualizar la geometría, y para asignarlas a los nodos, visualizar la malla de diferencias finitas.



(5) Generación de la malla de diferencias finitas:

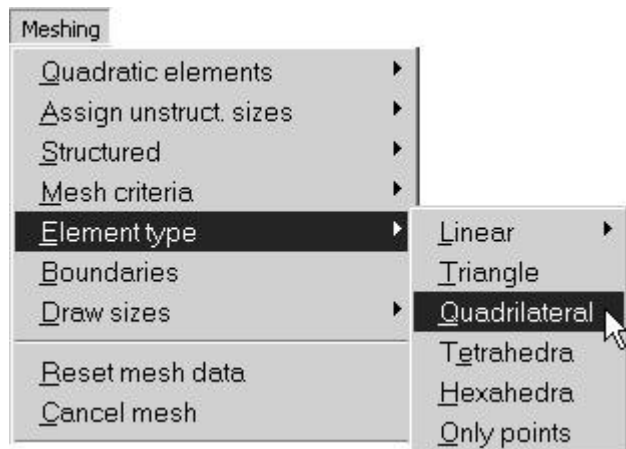
*Menú Meshing-Structured-Surfaces*

Genera una malla uniformemente estructurada, ya que para poder aplicar el método de las diferencias finitas la malla debe tener estas características. Es importante tener en cuenta que los cálculos por medio de este método numérico se realizan sobre los nodos porque no existen elementos como tal.



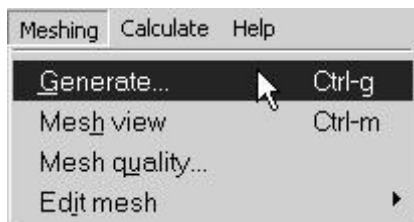
### Menú Meshing-Element Type-Quadrilateral

Genera elementos 2D tipo cuadrilátero. Los elementos de la malla de diferencias finitas deben ser estrictamente rectangulares o cuadrados.



### Menú Meshing-Generate

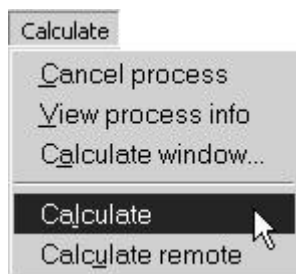
Genera la malla de diferencias finitas con las anteriores características.



### (6) Cálculo: Menú Data-Calculate-Calculate

Inicia el cálculo del problema por medio del método de diferencias finitas adaptado a mallas de paso irregular aplicando el método de sobrerelajación para la aceleración de la convergencia. Este módulo lanza el motor de cálculo.

Finalizado el cálculo, es posible acceder al posproceso por medio del cual se visualizan los resultados de potencial y campo de flujo gráficamente y se obtiene listados de ellos.



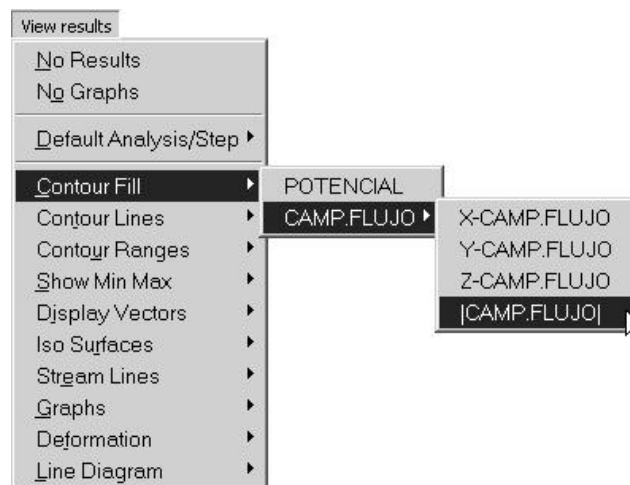
### (7) Posproceso: Menú View results-Contour Fill, Contour Lines, Display Vectors

Visualización gráfica de los resultados de potencial y

campo de flujo, por medio de:

- Isocontornos llenos
- Líneas de isocontornos, y,
- Vectores (solo para el campo de flujo)

El listado de resultados se puede obtener del archivo \*.flavia.res, contenido en la carpeta \*.GiD, después de realizado todo el proceso.



## VI. IMPLEMENTACIÓN

La primera versión de la herramienta está diseñada para trabajar con la formulación estacionaria de la ecuación de Laplace en dos dimensiones por diferencias finitas. A continuación se enseñan cuatro modelos que ilustran los casos más representativos de flujo estacionario confinado mencionados y las condiciones de contorno aplicadas a cada uno de ellos utilizando la herramienta.

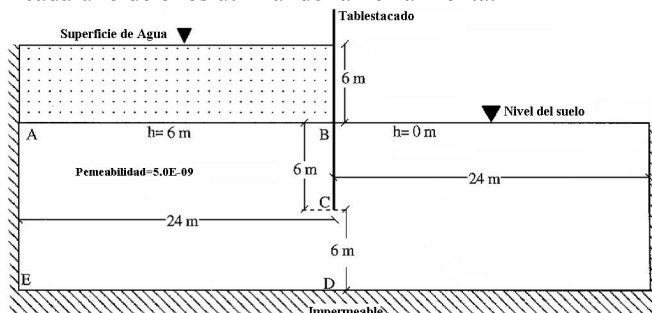


Figura. 7. Tablestacado de base impermeable

### A Flujo bajo la fundación de una tablestaca

Dentro de los innumerables problemas de ingeniería en los que se recurre a un tablestacado se encuentra: el caso de una pared para mantener la excavación de un edificio en construcción, el muro de recinto de una terminal marítima, la pantalla anclada de un muelle de atraque, etc. Para el modelo, se utiliza un tablestacado hincado en un suelo

limoso con una permeabilidad de  $5.0E-07$  cm/seg, como el que se ilustra en la Figura 7. El tablestacado es de longitud considerable en dirección perpendicular a la Figura por lo cual el flujo de agua bajo el mismo es bidimensional.

Las condiciones de contorno aplicadas al modelo del

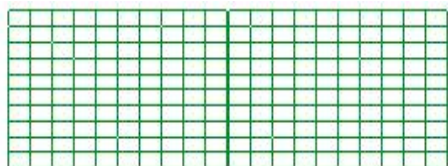


Figura. 8. Malla de Diferencias Finitas.

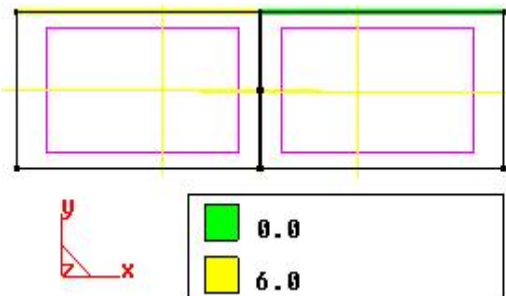


Figura. 9. Condiciones Dirichlet.

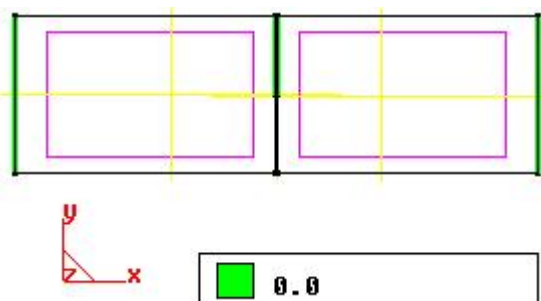


Figura. 10. Condiciones Neumann X.

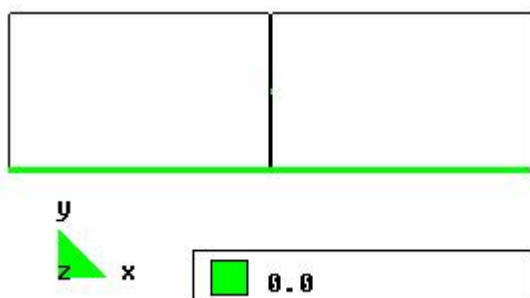


Figura. 11. Condiciones Neumann Y

tablestacado se ilustran en las Figuras 9, 10 y 11. Estas son:

- En la línea equipotencial aguas arriba,  $h=6$  m
- En la línea equipotencial de aguas abajo,  $h=0$  m
- Los demás contornos son líneas de flujo normal nulo.

### B. Flujo bajo presas de concreto

La Figura 12 considera una presa de concreto

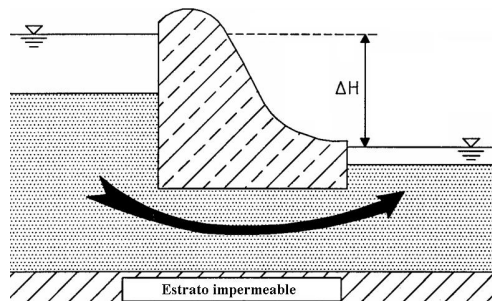


Figura. 12. Representación del flujo bajo una presa de concreto

cimentada sobre un terreno permeable isótropo con una permeabilidad de  $5.0E-07$ cm/seg. La sección representada,

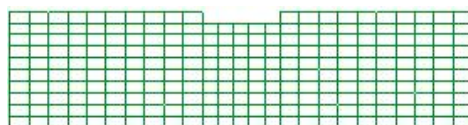


Figura. 13. Malla de Diferencias Finitas

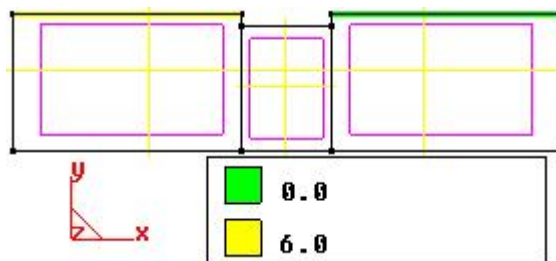


Figura. 14. Condiciones Dirichlet

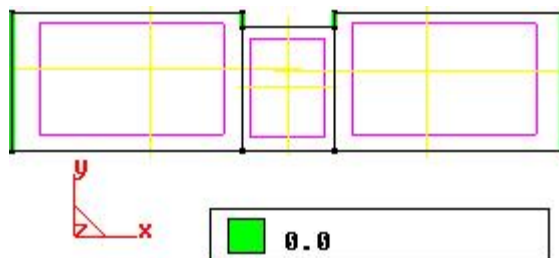


Figura. 15. Condiciones Neumann X

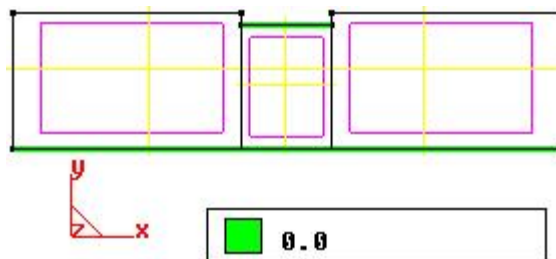


Figura. 16. Condiciones Neumann Y

constituye realmente un vertedero ya que el agua pasa sobre la presa en ciertas épocas del año. El agua del embalse en la cara aguas arriba tiene una altura de 6.0m y la presa está enterrada dentro del suelo 2.0m. Estas son:

- En la línea equipotencial aguas arriba,  $h=6$  m
- En la línea equipotencial de aguas abajo,  $h=0$  m
- Los demás contornos son líneas de flujo normal nulo.

Las condiciones de contorno aplicadas al modelo de la presa se ilustran en las Figuras 14, 15 y 16.

### C. Flujo en la vecindad de una excavación

La Figura 17 ilustra el caso de dos paredes que mantienen una excavación en un terreno permeable de permeabilidad  $5.0E-07 \text{ cm/seg}$ . Las paredes están enterradas dentro del suelo 6.0 m. y la excavación está en

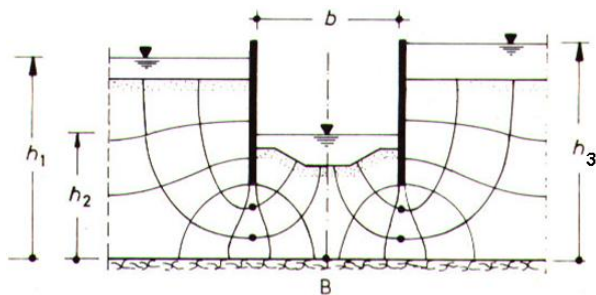


Figura. 17. Flujo en la vecindad de una excavación

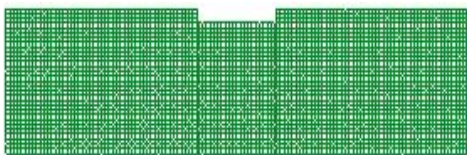


Figura. 18. Malla de Diferencias Finitas.

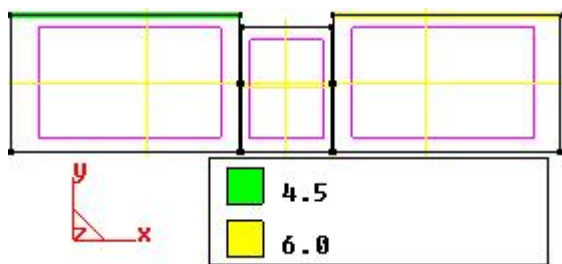


Figura. 19. Condiciones Dirichlet

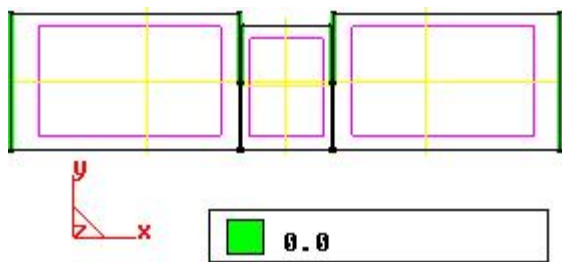


Figura. 20. Condiciones Neumann X

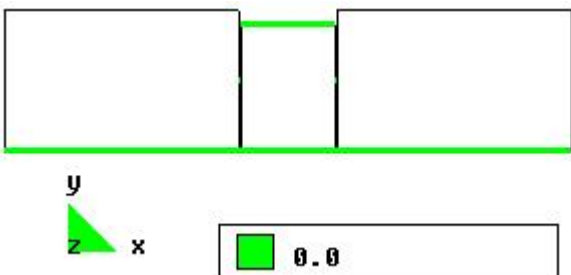


Figura. 21. Condiciones Neumann Y

1.5 m. de profundidad. Las cotas aguas arriba y abajo de la

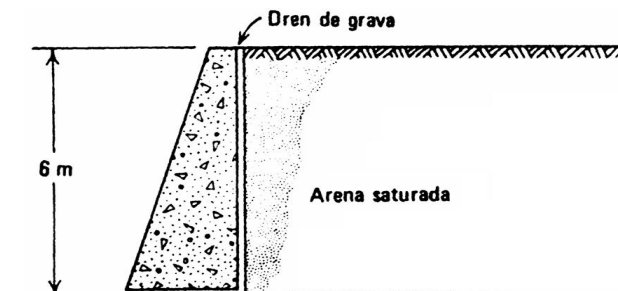


Figura. 22. Flujo en el caso de lluvia en régimen establecido en un muro de retención de tierra con dren vertical

excavación son  $h_1 = 12 \text{ m}$  y  $h_3 = 13.5 \text{ m}$ , respectivamente. La cota de la excavación es  $h_2 = 7.5 \text{ m}$ .

Las condiciones de contorno aplicadas al modelo de la excavación se ilustran en las Figuras 19, 20 y 21. Estas son:

- En la línea equipotencial aguas arriba,  $h=4.5 \text{ m}$

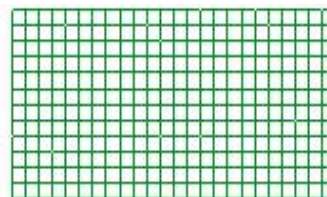


Figura. 23. Malla de Diferencias Finitas.

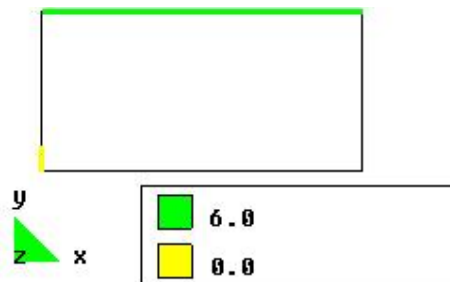


Figura. 24. Condiciones Dirichlet

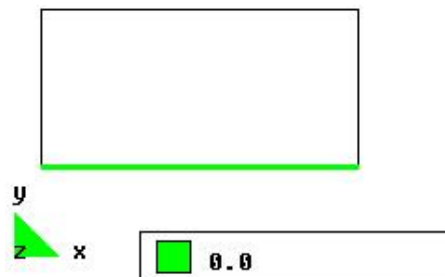


Figura. 25. Condiciones Neumann X

- En la línea equipotencial de aguas abajo,  $h=6.0 \text{ m}$
- Los demás contornos son líneas de flujo normal nulo.

### D. Flujo en un relleno con dren vertical

Otra forma habitual de flujo es el caso de un muro que sostiene un relleno con un dren vertical entre la cara



interior del muro y el relleno. Si por ejemplo, la red de flujo se genera debido a una lluvia intensa la carga total sobre el relleno (en condición de flujo permanente) será igual a la altura geométrica del relleno. Para el caso del ejemplo la cabeza tiene un valor de 6.0 m. En la Figura 22 se representa este caso.

En condiciones de saturación y considerando flujo permanente, el borde superior del relleno será una condición de borde equipotencial ( $\phi=6.0$  m). La fundación del relleno es impermeable y representa una condición de borde de flujo y una pequeña línea equipotencial de cabeza cero es representada en la parte baja del dren. Las

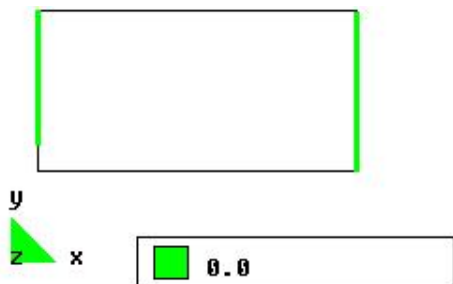


Figura. 26. Condiciones Neumann Y

condiciones de contorno aplicadas al modelo del relleno se ilustran en las Figuras 24, 25 y 26. Estas son:

- En la línea equipotencial superior,  $h = 6.0$  m
- En la línea equipotencial inferior,  $h = 0.0$  m
- Los demás contornos son líneas de flujo normal nulo.

## VII. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

A continuación se presentan gráficamente los resultados de potencial y flujo de los cuatro modelos ilustrados

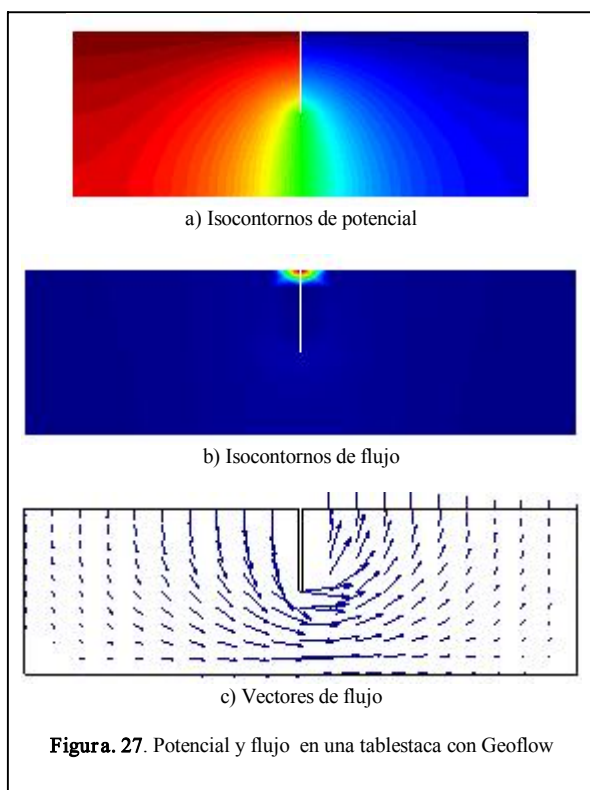


Figura. 27. Potencial y flujo en una tablestaca con Geoflow

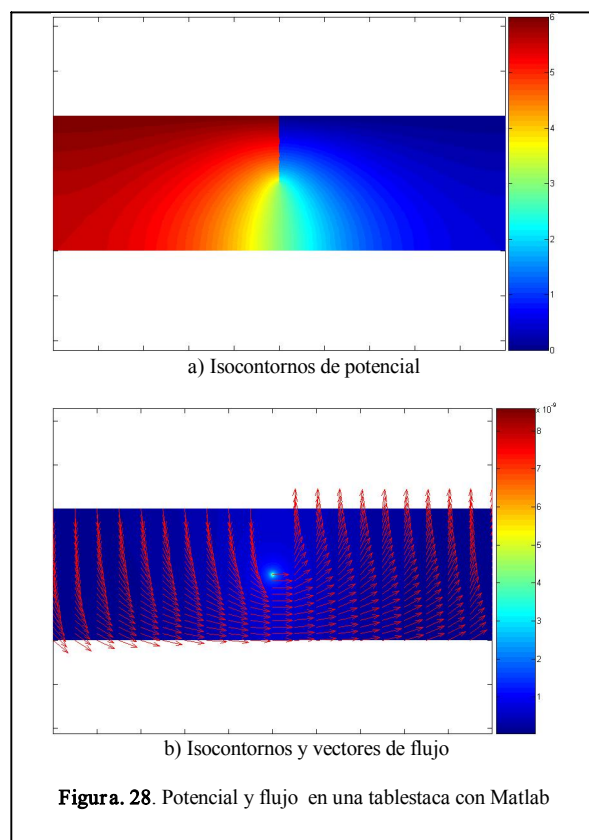


Figura. 28. Potencial y flujo en una tablestaca con Matlab

anteriormente obtenidos con la aplicación y se realiza una

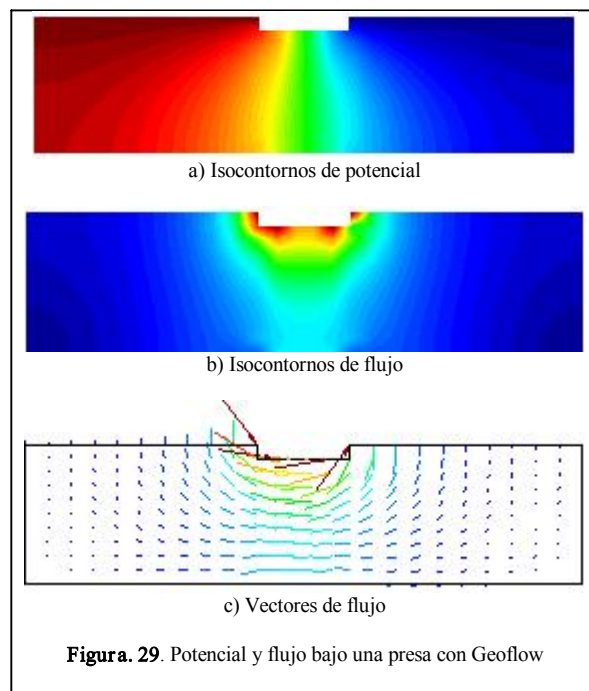
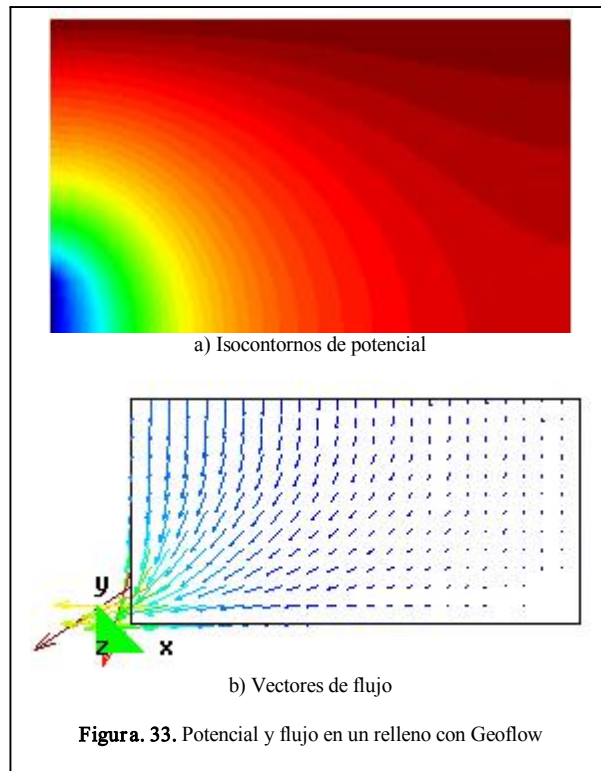
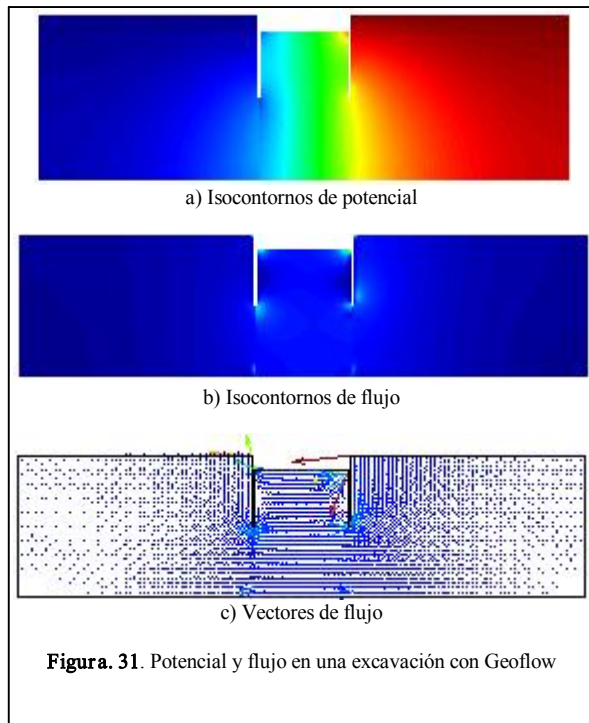
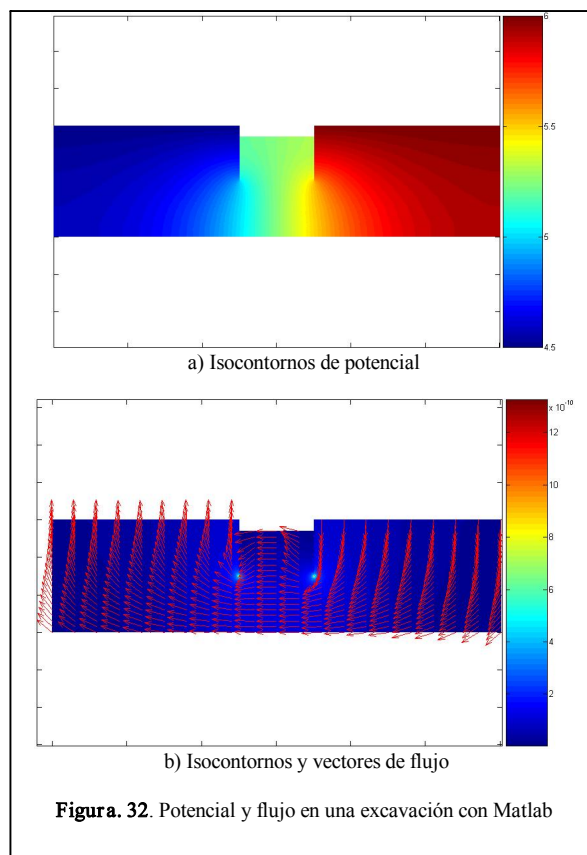
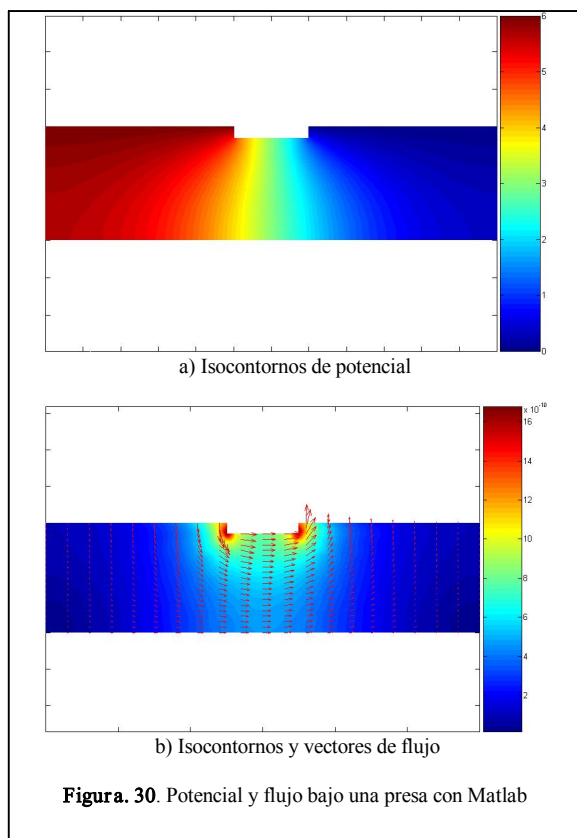
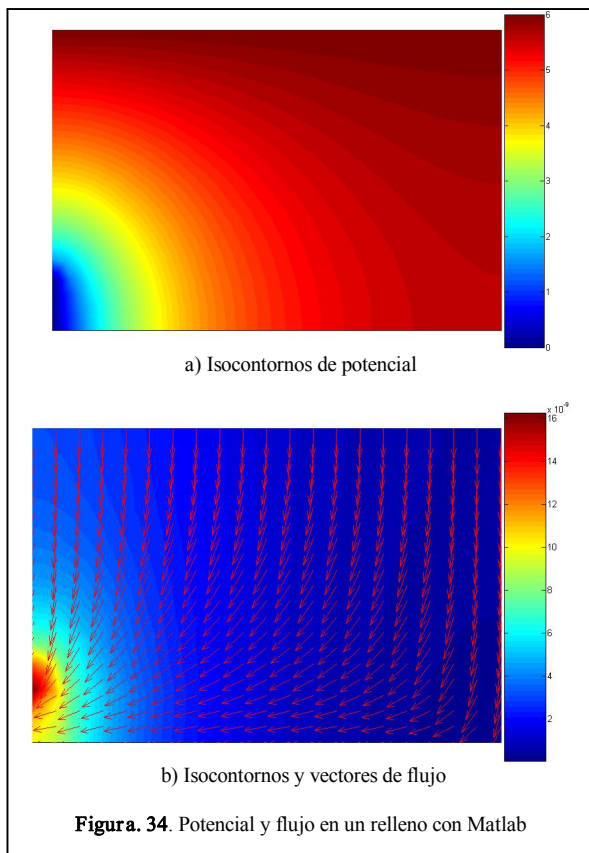


Figura. 29. Potencial y flujo bajo una presa con Geoflow

comparación con la herramienta de elementos finitos PDETool de Matlab, con el fin de validar los resultados.





### VIII. COMENTARIOS SOBRE LOS RESULTADOS OBTENIDOS DE LA APLICACIÓN

De los resultados obtenidos con la aplicación se puede colegir que:

- La comparación con Matlab es satisfactoria, lo cual representa la validez de la aplicación.
- La aplicación Geoflow1.0 genera menor costo computacional que otras alternativas numéricas (p. ej. elementos finitos) dado que las diferencias finitas son menos robustas.
- Computacionalmente, la implementación de diferencias finitas es ventajosa, dado que es un método de solución rápida, la matriz obtenida es llena y sigue el patrón de la retícula del modelo. De esta forma, un dominio con un buen número de nodos no implica mayor almacenamiento para la matriz de potencial.
- Los métodos numéricos constituyen una magnífica herramienta para la modelación de problemas de ingeniería. La aplicación desarrollada en este proyecto es prueba de ello, y se puede hacer extensivo para desarrollar proyectos industriales de gran envergadura.

### IX. CONCLUSIONES

- La enseñanza en ingeniería debe adaptarse a la sociedad en la que se desarrolla y para ello debe utilizar todas las herramientas a su alcance, hoy en día la utilización del computador en las aulas de clase es algo ineludible y necesario para formar técnicos capaces de afrontar con seguridad su vida profesional. Además, las capacidades multimedia del computador permiten envolver las clases en un entorno que las haga atractivas para el alumno.
- Por otra parte, la creación de buenos materiales multimedia requiere de gran trabajo y dedicación por parte del docente, la mayor parte de las veces poco reconocido y menos recompensado, así como de un proceso de ajuste basado en la experiencia y que ha de ser constante como lo son los cambios en nuestros estudiantes.
- Los materiales desarrollados con las nuevas tecnologías van a permitir modificar la concepción de las clases tradicionales de ingeniería, dejando de lado la llamada clase magistral y tratando de seducir al alumno para que aporte más trabajo personal en el proceso de aprendizaje. Esto, representa una de las bases ideológicas de la reforma educativa. Además, aumenta la participación en la clase, tan difícil de conseguir hoy en día.
- El uso del software educativo es un acierto, ya que permite al estudiante profundizar en los conceptos dejando de lado el esfuerzo que suponen cálculos tediosos. Esto, junto a cierto método deductivo de trabajo, le motiva para seguir aprendiendo. De hecho, los alumnos pueden utilizar el programa como ayuda en otras materias.
- La utilización del computador como medio docente debe llevar aparejados algunos cambios en los contenidos a impartir. Ya no es necesario dedicar excesivo tiempo a los métodos de cálculo tradicionales, sino que éste se puede emplear en que el alumno comprenda mejor los conceptos. Para tal fin, las capacidades software educativo son importantes.
- El software educativo permite obtener resultados de forma ágil y segura, en contraposición al uso de calculadoras tradicionales; la experimentación autónoma del alumno constituye un ejercicio estructurador de la mente que debe ser considerado de gran importancia en la formación de un técnico.

### REFERENCIAS

- [1] A. J. Ángel, G. Bautista, "Didáctica de las Matemáticas en enseñanza superior: la utilización de software especializado", 2001.
- [2] M. E. Aguiar, "El diálogo en el aula: ¿Una alternativa al tradicional método de selección natural en la enseñanza de las Matemáticas?", Tesis doctoral, Universidad de Valladolid, 2002.
- [3] A. V. Aho, E. Hopcroft, J. D. Ullman, "The Design and Analysis of Computer Algorithms", Ed. New York: Addison Wesley, 1974.

- [4] Ansys User Manual / Revision 5.0. Swanson Analysis Systems, Inc. Houston.
- [5] Burden & Faires, "Análisis Numérico". Ed. México: Thomson Internacional., 1998.
- [6] C. Creel, "El salón de clases desde el punto de vista de la comunicación". Revista Perfiles Educativos. CISE-UNAM. México, 1991, pp 36-46.
- [7] S. D. Chandrakant, Y. Christian, T. Jhon, "Numerical Methods in Geotechnical Engineering", Ed. New York: Mc Graw-Hill Book Company, 1997.
- [8] C. W. Gear, "Numeric initial value problems in ordinary differential equations", Ed. New York: Prentice Hall, 1971.
- [9] E. Juárez, "Mecánica de Suelos", Ed. México: Limusa, 1982.
- [10] La enseñanza superior en el siglo XXI: Estrategias de futuro. Texto de la declaración de la World Conference on Higher Education. Paris, 1998.
- [11] T. W. Lambe, R. V. Whitman, "Mecánica de Suelos", Ed. México: Limusa - Wiley, 1963.
- [12] C. Levy- Leboyer, "Gestión de las competencias", Ed. España: Gestión., 2000.
- [13] J. H. Mathews, "Métodos Numéricos con Matlab". Ed. México: Pearson, 2000.
- [14] D. Perkins, "La escuela inteligente", Ed. Barcelona: Gedisa, 1995
- [15] R. H Perry, "Engineering Geology", Elsevier. New York, 1986.
- [16] R. Ribó, "GiD User Manual". CIMNE, 1999.
- [17] S. S. Rao, "The Finite Element Method in Engineering", Ed. New York: Pergamon Press, 1989.
- [18] R. F. Scott, "Principles of Soil Mechanics", Ed. London: Addison - Wesley Publishing Company, 1963.
- [19] M. G. Spangler, R. L. Handy, "Soil Engineering", Ed. New York: Intext Educational Publishers, 1973.
- [20] V. L. Streeter, B. E. Wylie, "Mecánica de los fluidos", Ed. México: Mc Graw - Hill, 1988.
- [21] V. Solórzano, C. Marina, "Los Retos de la educación virtual en América Latina", Instituto Politécnico Nacional, Sociedad Mexicana de Computación en la Educación. México, 2001.
- [22] F. Zárate, E. Oñate, "CALTEP: Programa para el cálculo transitorio de la ecuación de Poisson". CIMNE, 1993.
- [23] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, "El Método de los elementos finitos", Ed. Barcelona: Mc.Graw - Hill., 1994.

**Wilson Rodríguez C.** Ingeniero Civil de la Universidad Industrial de Santander. Especialista en Gerencia y Magíster en Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña. Director del Grupo de Investigación en Informática y Métodos Matemáticos Aplicados-IMMA, reconocido por Colciencias. Profesor, Investigador del Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Pontificia Universidad Javeriana de Cali.

**Myriam R. Pallares M.** Ingeniera Civil de la Universidad Industrial de Santander. Especialista en Gerencia y Magíster en Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña. Directora del Grupo de Investigación en simulación y Control Numérico-SICON, reconocido por Colciencias. Profesora, Investigadora de la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Santo Tomás de Bogotá.