

## Reseñas de trabajos de grado de pregrado del Programa de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia – Sede Bogotá presentados en el período 2020-II

Omar Duque Gómez<sup>a</sup>

### 1. Modelo matemático para la asignación de turnos en la Imprenta de Billetes del Banco de la República de Colombia

Estudiante **Joaquín Guillermo Barrera Barragán\***

Director *Jorge Mauricio Ruiz Vera\*\**

Emails \*jgbarrerab@unal.edu.co, \*\*jmruizv@unal.edu.co

RESUMEN. En la actualidad, la planificación de la producción en una empresa es crucial para el óptimo funcionamiento de la misma, ya que esto permite responder preguntas importantes como: ¿qué producir?, ¿cuándo producir? y ¿cuánto producir?. Además, permite calcular la capacidad de producción de la planta, la cantidad de materia prima que se necesita, conocer y controlar el inventario, reducir los tiempos muertos entre cada uno de los procesos que se desarrollen, entre otras cosas. El presente trabajo surge durante una pasantía en la Imprenta de Billetes del Banco de la República, y trata de un modelo que contribuye a la planificación de la producción en cuanto a que logra asignar los turnos o jornadas de trabajo a las máquinas de la imprenta de una manera óptima, permitiendo así, llevar un control de inventario día a día y reduciendo la cantidad de horas extras ejecutadas a lo largo de un periodo de tiempo. Para lograr esto se les asignó una demanda a las máquinas, se simuló varios escenarios donde las producciones de estas variaban día a día según el turno en que se programaran y luego, teniendo en cuenta estas producciones, se planteó un problema de programación lineal mixta que al resolverlo, retornara la programación de turnos que minimizara la cantidad de horas extras ejecutadas a final de mes, pero que también asegurara el cumplimiento de la demanda, así como un buen control del inventario esperado de cada máquina.

---

<sup>1</sup>Coordinador del Programa Curricular de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

<sup>a</sup>oduqueg@unal.edu.co

## 2. Un acercamiento al teorema de las tres geodésicas y las funciones elípticas de Jacobi

Estudiante **Jhon Edison Bravo Buitrago\***

Director *Guillermo Rodríguez Blanco\*\**

Emails \*jhebravobu@unal.edu.co, \*\*grodriguez@unal.edu.co

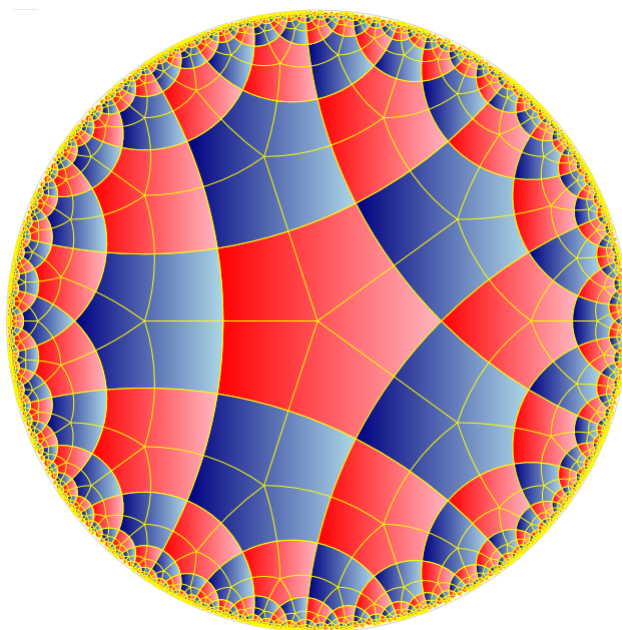
RESUMEN. El presente trabajo de grado aborda el famoso Teorema conocido como “El Teorema de las tres geodésicas” cual afirma que,

“Toda 2-variedad difeomorfa a la esfera  $S^2$  tiene al menos tres geodésicas cerradas.”

y fue conjeturado en 1905 por Henri Poincaré cuando trató la estabilidad de ecuaciones diferenciales ordinarias sobre 2-variedades diferenciables y sus conexiones entre sistemas dinámicos con la naciente topología algebraica. Dicho problema motivo a grandes especialistas de la teoría de ecuaciones diferenciales, topología y cálculo de variaciones como es el estudio topológico de subvariedades de nivel bajo una función de valor real como es la teoría de Morse, presentada inicialmente por Marston Morse en su artículo “The foundations of a theory in the calculus of variations in the large” en 1928. La teoría de Morse plantea el estudio de los cambios topológicos de una variedad diferenciable cuando las subvariedades regulares se aproximan a los puntos críticos de su respectiva función de Morse. En 1929 Lazar Lyusternik y Lev Schnirelmann realizaron una prueba del Teorema de las tres geodésicas, siguiendo las ideas de la Teoría de Morse pero sin las restricciones de la forma Hessiana en los puntos críticos de la función de Morse. Dicha conexión permitió realizar la primera prueba eficaz pero sujeta al trabajo homotópico que brinda la deformación continua y encajada de una curva en la variedad bajo la influencia de un flujo o bien grupo uniparamétrico, que en su momento fue dado por el flujo de Birkhoff, pero que se evidenció que no preservaba el encaje continuo y que después fue arreglado por Hans Werner Ballmann en 1978. Wolfgang Ziller menciona que la matemática estadounidense especialista en ecuaciones en derivadas parciales, Karen Uhlenbeck fue la primera en sugerir el flujo de acortamiento de curva como instrumento de deformación. Para comprender la demostración del teorema de las tres geodésicas, es necesario ir realizando un camino en el mismo. La sección de apéndices en el trabajo están enfocados en los conceptos y teoremas esenciales en el estudio de variedades diferenciables, tales como estructura diferenciable, subvariedades, teoremas de inmersión, espacio tangente, espacio cotangente, fibrado tangente y cotangente, orientación y tensores. Luego, es dedicado a las definiciones y resultados importantes de la topología algebraica enfocada en el estudio de homotopía, homología y cohomología. Para las últimas dos, existen sus relaciones vitales como el producto capa y copa. El último apéndice es una pequeña motivación al estudio de funciones

e integrales elípticas en pro de la investigación de la geometría esférica. El capítulo 1 está dedicado principalmente a introducir los conceptos básicos de la geometría riemanniana tales como variedades riemannianas, conexiones, geodésica y curvatura. El segundo capítulo está dedicado al cálculo de variaciones resaltando la minimización de funcionales y con ello, el enfoque de solución de problemas variacionales con ayuda de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Este capítulo, nos permitiera comprender como hallar en concreto las geodésicas de  $S^2$  bajo la métrica redonda, es decir, la inducida por el espacio euclideo  $\mathbb{R}^3$ . El tercer capítulo es dedicado a la fascinante teoría de Morse, vista como herramienta para tratar una función de Morse, es decir, una función real valuada sin puntos críticos degenerados; Con la cual, es posible estudiar las subvariedades de nivel inducidas por la función de Morse y el cambio de topología dada por la equivalencia homotópica evidenciada al pasar por sus puntos críticos. Dicha idea es especialmente trabajada en el libro “Morse Theory” de John Milnor en 1963 y además en el libro “An invitation to Morse Theory” de Liviu Nicolaescu en 2007. Con dichas ideas, y las desigualdades de Morse, Morse y Smale consiguen dar una definición alternativa de grupos de homología desde el punto de vista de los sistemas dinámicos y las variedades estable e inestable. En el cuarto capítulo se establecen las propiedades importantes del flujo de acortamiento de curva, tales como la preservación continua de embebimientos, Además, de la existencia y unicidad de soluciones del flujo bajo la acotación y comportamiento de la curvatura. El quinto capítulo es enfocado en las ideas esenciales de la teoría de Lusternik-Schnirelman que serán utilizadas en la prueba del teorema de las tres geodésicas, tales como la conexión entre la cantidad de clases de homología subordinada mencionada por la longitud de copa y los puntos críticos del funcional real valuado de la variedad. Finalmente, el sexto capítulo está dedicado a la demostración del teorema de las tres geodésicas. Dicha demostración junto con sus resultados de la teoría de Lusternik-Schnirelman está basado en el trabajo “*A modern approach of the Theorem of the Three Closed Geodesics*” de Ayoub Bana de 2012, bajo la dirección de Andre Neves y en el trabajo “*Curve shortening and the three geodesics theorem*” por Sebastian Sewerin del 2016, bajo la dirección de Wolfgang Ziller. La demostración realiza un estudio del espacio de curvas sobre  $S^2$ , denotado por  $\Sigma S^2$  y sus conjuntos de nivel  $\Sigma^x S^2$ . Con ayuda del flujo de acortamiento de curva, es posible concentrarse plenamente en el espacio de círculos  $\Gamma S^2$ , con sus elementos denotados por  $\sigma(c)$ . Para buscar los grupos de homología relativa del par de espacios  $(\Sigma S^2, \Sigma^0 S^2)$ , es de consideración que sobre el espacio  $\Sigma S^2$ , se sabe que los puntos críticos son los grandes círculos  $\sigma(c)$ , es decir, las curvas  $\sigma(c) \in \Sigma^{2\pi} S^2$ , vía la teoría de Morse, sabemos que el cambio de topología de la variedad se da al pasar por dichos puntos críticos por lo cual es necesario entender los grupos de homología del par de espacios  $(\Sigma^{2\pi+\epsilon} S^2, \Sigma^{2\pi-\epsilon} S^2)$ , lo cual nos da una íntima relación con el plano pro-

yectivo  $\mathbb{R}P^2$ , Utilizando el teorema de isomorfismo de Thom. Con lo cual, se llega a la existencia de las tres clases de homología subordinada. Finalmente, vía la teoría de Lusternik-Schnirelman, se garantiza la existencia de los tres puntos críticos del funcional de longitud, es decir, la existencia de las tres geodésicas cerradas. El ultimo capítulo es una pequeña mención a una observación entre las geodésicas de  $S^2$ , como un elipsoide y el planteamiento de integrales elípticas de Jacobi como su longitud de arco. A través de un proceso de inversión es posible definir las funciones elípticas de Jacobi.



### 3. Un teorema de Galois en el contexto de los espacios recubridores

Estudiante **Luis Eduardo Calderón León\***

Director *Lorenzo María Acosta Gempeler\*\**

Emails \*luecalderonle@unal.edu.co, \*\*lmacostag@unal.edu.co

RESUMEN. Se demuestra un teorema análogo al teorema fundamental de la teoría de Galois en el contexto de los espacios recubridores. A partir de un morfismo  $p : X \rightarrow Y$  de una categoría cualquiera  $\mathcal{C}$ , se construyen dos categorías; una que consta de parejas de morfismos de  $\mathcal{C}$  que factorizan a  $p$ , y la otra es la categoría de los subgrupos de  $G(p)$ , donde  $G(p)$  es el grupo de automorfismos  $\sigma$  de  $X$  que cumplen que  $p \circ \sigma = p$ ; estas

categorías se notan por  $E(p)$  y  $S(p)$  respectivamente. Cuando  $p$  es un morfismo de  $Set$  o de  $Top$ , se muestra que existe un par de funtores adjuntos entre las categorías mencionadas. Luego se considera el caso en que  $p$  es una aplicación recubridora y se considera la subcategoría de  $E(p)$  de las aplicaciones recubridoras que factorizan a  $p$ , notada por  $\widehat{E}(p)$ ; y se demuestra que bajo ciertas condiciones sobre  $X$ , la adjunción ya establecida se presenta entre  $\widehat{E}(p)$  y  $S(p)$  y resulta una equivalencia de categorías.

#### 4. Teoría $L^p$ de la Transformada de Hilbert y su Transición a la Teoría de Integrales Singulares

Estudiante **Kevin Steven Carrillo Reina**\*

Directora *Carolina Neira Jiménez*\*\*

Emails \*kscarrillor@unal.edu.co, \*\*cneiraj@unal.edu.co

RESUMEN. El trabajo consiste en ver cómo los métodos de variable real, primeramente desarrollados por Calderón y Zygmund, proporcionan las ideas que conciben la generalización del operador Transformada de Hilbert a dimensión superior. Esto resulta posible porque el uso de tales técnicas permiten capturar algunas propiedades del operador a lo largo de las pruebas de los teoremas de Kolmogorov y M. Riesz. Cabe destacar que los dos resultados mencionados establecen la teoría  $L^p$  de la Transformada de Hilbert. Así pues, en el trabajo se desarrolla a gran detalle la prueba de la existencia de una clase de operadores que resultan ser la generalización buscada, específicamente, los operadores integrales singulares. Adicionalmente, se estudia cierta subclase de los operadores ya obtenidos; más precisamente, los que conmutan con dilataciones y traslaciones. Estos, además de su teoría  $L^p$ , admiten convergencia puntual, generalizando de forma más específica el operador modelo, es decir, la Transformada de Hilbert. Cabe destacar que además de los resultados, que por sí mismos son de gran impacto, se hace énfasis en los argumentos usados, puesto que, a partir de su aparición, estos han representado un paradigma en el estudio del análisis armónico.

#### 5. Sobre algunos principios de incertidumbre

Estudiante **Diego Fernando Correa Castañeda**\*

Director *Ricardo Ariel Pastrán Ramírez*\*\*

Emails \*dfcorreac@unal.edu.co, \*\*rapastranr@unal.edu.co

RESUMEN. En 1927 salió a la luz un resultado, considerado como una de las piedras angulares de la Mecánica cuántica, que nos asegura la imposibilidad de medir simultáneamente tanto la posición como la velocidad de una partícula. El llamado Principio de Incertidumbre de Heisenberg establece un límite en el que este par de magnitudes se pueden medir. Más específicamente, si la incertidumbre sobre la localización real de una

partícula es muy pequeña, entonces la incertidumbre sobre su velocidad es muy grande, y viceversa. Esta aseveración no se trata de un problema de carencia de instrumentos, sino todo lo contrario. Por ejemplo, en una situación en la que se sabe, casi con exactitud, qué tan rápido se mueve un electrón, este resultado nos confirma que es imposible conocer su localización.

Desde el punto de vista matemático, el Principio de Incertidumbre de Heisenberg pone en manifiesto una propiedad especial de la transformada de Fourier: si alguna particularidad de una función  $f$  está concentrada alrededor del origen, entonces dicha particularidad de  $\hat{f}$  está esparcida en el infinito.

Ahora bien, hay más teoremas que ponen en evidencia esta propiedad, explorando otras particularidades. En este trabajo se exponen los resultados que exploran si la propiedad se cumple cuando la particularidad es el conjunto en donde  $f$  no se anula y el caso en el que la particularidad es la medida de ese conjunto. Más aún, se abarca la forma en la que estos resultados dan razón de cómo podemos entender las propiedades de una función estudiando algunos casos en los que su transformada de Fourier decae en el infinito.

## 6. Métodos de Krylov. Teoría y aplicación al procesamiento de imágenes

Estudiante **Abraham Guerrero Julio\***

Director *Humberto Sarria Zapata\*\**

Emails \*aguerreroj@unal.edu.co, \*\*hsarriaz@unal.edu.co

RESUMEN. Los métodos de Krylov son una familia de procesos proyectivos muy útiles en la resolución de sistemas lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con  $A$  una matriz de grandes dimensiones (del orden de millones) y sumamente mal condicionada. Uno de estos casos se presenta al intentar clarificar una imagen borrosa, donde  $A$  representa la matriz de distorsión,  $\mathbf{x}$  la forma vectorizada de la imagen a recuperar, y  $\mathbf{b}$  la imagen vectorizada capturada por la cámara.

En este trabajo se estudia la teoría de los métodos de Krylov a partir de los procesos proyectivos. Se muestran las caracterizaciones matemáticas de los principales, tales como *Gradiente Conjugado* y *Mínimo residuo*. Finalmente se utilizan estos métodos para clarificar imágenes por medio de una forma modificada de la descomposición a valores singulares trunca de la matriz de distorsión  $A$ , en la cual seleccionamos un subespacio de Krylov adecuado que nos permita hallar vectores de baja frecuencia, y excluir aquellos de alta frecuencia que distorsionan la imagen recuperada.

## 7. Nueva métrica para la evaluación de desempeño en modelos de vigilancia predictiva en grilla

Estudiante **Diego A. Hernández C.\***

Director *Francisco Gómez\*\**

Emails \*dieahernandezcas@unal.edu.co, \*\*fagomezj@unal.edu.co

RESUMEN. Una de las estrategias más utilizadas para garantizar la seguridad ciudadana es la vigilancia periódica por parte de la policía de áreas geográficas particulares. En el caso de Colombia esta estrategia se define a través del llamado plan de vigilancia comunitaria por cuadrantes [1]. Este plan establece el cuadrante como la unidad espacial fundamental para la vigilancia periódica policial. La definición adecuada de estos cuadrantes de vigilancia de forma costo/efectiva representa un reto fundamental para la planeación de estrategias de la seguridad ciudadana [2].

La definición de las áreas de vigilancia se realiza comúnmente se realiza a través del criterio empírico de expertos [2]. No obstante, recientemente se ha propuesto el uso de modelos cuantitativos para la estimación de las demandas del servicio policial así como la optimización de los recursos policiales disponibles para satisfacer estas demandas, en los denominados modelos de seguridad predictiva.

Los modelos cuantitativos de seguridad predictiva utilizados para la estimación de la demanda del servicio comúnmente se alimentan con datos históricos de servicio policial y/o denuncias [3]. Estos datos pueden entenderse como eventos espacio-temporales que pueden ser utilizados para entrenar modelos que capturen patrones de ocurrencia de las dinámicas criminales. Los modelos ajustados con estos datos posteriormente son utilizados para la estimación de eventos futuros de forma predictiva [3]. La calidad de estas estimaciones comúnmente se mide comparando las predicciones proporcionadas por los modelos con datos de prueba no observados previamente [3]. Esta tarea se realiza a través de una métrica de calidad de la predicción. La selección de una métrica apropiada es fundamental para obtener modelos exitosos de vigilancia.

En el dominio de seguridad predictiva la métrica de calidad más utilizada para evaluar la calidad de las predicciones es el *índice de precisión predictiva* o por sus siglas en inglés PAI (predictive accuracy index). Este indicador se define como el porcentaje de crímenes predicho para un porcentaje de área particular, sobre el porcentaje de área considerado. A pesar de su popularidad en el dominio de seguridad predictiva, el PAI tiene ciertas limitaciones. En particular, no considera la geolocalización en las predicciones de manera explícita [4]. Como resultado dos predicciones diferentes comparadas con el mismo conjunto de datos de prueba el PAI pueden resultar en el mismo PAI (ver figura 1). Esta discrepancia en la evaluación, resultado de la selección del PAI como indicador de calidad

representa un problema, ya que pequeños cambios de la dinámica espacial sobre la misma región del fenómeno con intensidades (cantidad de eventos) iguales y del cual no se tenga registro alguno, puede influenciar las tarea de selección y ajuste del modelo predictivo.

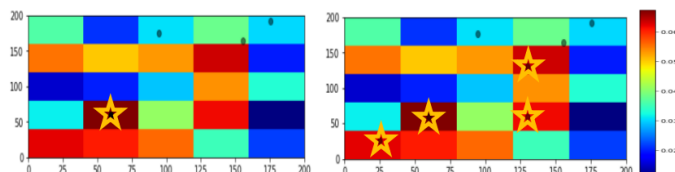


Figura 1: PAI de 2.86 al 20 % de cobertura de una misma predicción comparada con dos conjuntos de eventos distintos (puntos negros). A la izquierda 4 eventos en una misma celda señalada con la estrella amarilla, a la derecha los mismos 4 eventos redistribuidos sobre celdas con intensidades altas.

Este trabajo exploró de forma cuantitativa las limitaciones impuestas por el uso del PAI en el dominio de seguridad predictiva. En particular, en la cuantificación de la calidad de las estimaciones dadas por diferentes métodos de predicción: conteo, estimación de densidad por kernels y procesos autoexcitatorios (SEPP). Adicionalmente, se propuso una solución para el problema de cuantificación de la calidad basada en transporte óptimo con el uso de la métrica Earth Mover Distance (EMD) [5]. Los resultados sugieren que el uso de EMD como indicador de calidad puede aumentar la sensibilidad a cambios de la localización de los eventos respecto a la predicción (Ver Figura 2).

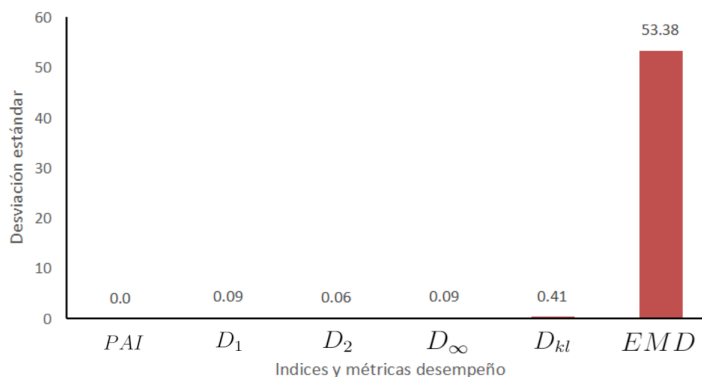


Figura 2: Desviación estándar de los modelos de evaluación.

El modelo propuesto fue evaluado en datos reales reales provenientes de la comuna 13 de la ciudad de Bucaramanga. Los resultados sugieren una no discrepancia en la selección final de mejor método entre los algoritmos



nombrados anteriormente (Ver figura 3). Es decir, la selección y clasificación de modelos según su desempeño se puede realizar con cualquiera de las dos metricas: PAI o EMD. No obstante, para la tarea de predicción la EMD provee mayor sensibilidad.

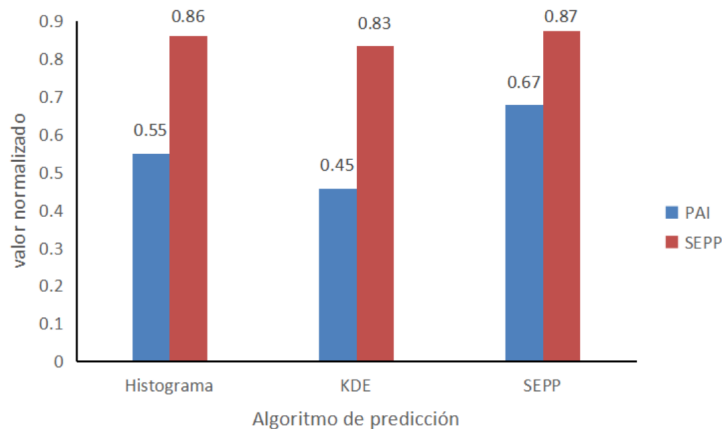


Figura 3: Resultados PAI y SEPP de validación cruzada de 14 semanas.

## Bibliografía

- [1] Policia Nacional de Colombia, *Estrategia institucional para la seguridad ciudadana: plan nacional de vigilancia comunitaria por cuadrantes (PNVCC)*, 11, 2010.
- [2] Andrew P. Wheeler, *Creating optimal patrol areas using the p-median model*, Social Science Research Network, 2018, 35.
- [3] L. Perry and B. McInnis and C. Price and C. Smith and S. Hollywood, *Predictive Policing, the role of crime forecasting in law enforcement operations*, RADN corporation. 2013.
- [4] M. Adepeju and G. Rosser and T. Cheng, *Novel evaluation metrics for sparse spatio-temporal point process hotspots predictions - a crime case study*, Geographical Information Science, 2016.
- [5] Levina, Elizaveta and Bickel, Peter, *The earth mover's distance is the mallows distance: Some insights from statistics*, Proceedings Eighth IEEE International Conference on Computer Vision. ICCV 2001. **2**, 251-256, 2001.

## 8. Grupos topológicos y espacios de Alexandroff

Estudiante **Alejandra Medina Linares\***

Directora *Ibeth Marcela Rubio Perilla\*\**

Emails \*almedinali@unal.edu.co, \*\*imrubio@unal.edu.co

RESUMEN. En este trabajo se estudia un teorema que M.C. Thornton enuncia en su artículo *Torsion Topological Groups with Minimal Open Sets* y se demuestra una generalización del mismo: dado un grupo  $G$ , existe una correspondencia biyectiva entre sus subgrupos normales y las topologías de Alexandroff que lo dotan de estructura de grupo topológico.

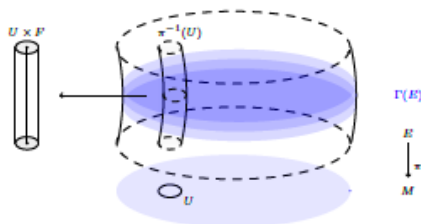
## 9. Fibre Bundles and Yang-Mills theory: QED as an Abelian Gauge theory

Estudiante **Danny Julián Perilla Mikán\***

Directora *Carolina Neira Jiménez\*\**

Emails \*djperillam@unal.edu.co, \*\*cneiraj@unal.edu.co

RESUMEN. Un haz fibrado (fibre bundle) es una variedad diferenciable que localmente se puede identificar como el producto cartesiano de un abierto  $U$  de un espacio base  $M$  y una fibra general  $F$ , ambas variedades diferenciables.



Cuando la fibra general  $F$  tiene estructura de espacio vectorial, existen secciones globales del haz fibrado  $E$  llamado en este caso haz vectorial (vector bundle) las cuales forman un espacio vectorial  $\Gamma(E)$  y sobre el cual es posible definir un producto interno. Cuando la fibra general es un grupo de Lie, el haz fibrado es llamado haz principal (principal bundle) y no necesariamente posee secciones globales, sin embargo siempre es posible asociarle un haz vectorial vía una representación del grupo de Lie, sobre el cual sí existen secciones globales. En particular, el haz adjunto (adjoint bundle), fundamental en la teoría de Yang-Mills se define a través de una representación del grupo de Lie en su álgebra de Lie asociada.

La teoría de Yang-Mills está construida sobre el modelo de la electrodinámica de Maxwell generalizándola a partir de la geometría de haces fibrados, por ejemplo el lagrangiano de Yang-Mills se define a partir de un producto interno de secciones de un haz vectorial. En el caso en que

la fibra  $F$  es el grupo abeliano  $U(1)$  y  $M$  es el espacio-tiempo de Minkowski, las ecuaciones derivadas a través del principio de Hamilton sobre el lagrangiano de Yang-Mills se reducen a dos de las cuatro ecuaciones de Maxwell es decir, son consecuencia de la dinámica del sistema. Las dos ecuaciones restantes son consecuencia de la construcción geométrica.

Un campo de materia es una sección de un haz vectorial asociado a un haz principal sobre el espacio-tiempo de Minkowski  $M$  con fibra  $U(1)$  que posee una representación en el espacio vectorial  $\mathbb{C}^4$  y que satisfice la ecuación de Dirac. Al intentar imponer una invariancia de gauge a este sistema, necesariamente se requiere introducir un campo auxiliar que se interpreta como el potencial electromagnético. La relación entre partículas con masa como los electrones y partículas mediadoras como los fotones, es entonces una consecuencia matemática de la simetría de gauge. La teoría cuántica de campos que describe estas interacciones entre campos de materia y campos electromagnéticos es la electrodinámica cuántica (QED). El término cinético del lagrangiano de la QED es el lagrangiano de Yang-Mills.

Los conceptos matemáticos mencionados son estudiados con más detalle a lo largo de este trabajo y sobre los cuales se ha hecho énfasis en una visión geométrica.

#### 10. Two solvable systems of coagulation equations with limited aggregations

Estudiante **Christian Sanabria Castañeda\***

Director *Julián A. Agredo Echeverry\*\**, Codirectora *Margaret J. Garzón Merchán\*\*\**

Emails \**csanabriac@unal.edu.co*, \*\**julian.agredo@escuelaing.edu.co*,  
\*\*\**mjgarzonm@unal.edu.co*

RESUMEN. Las ecuaciones de Smoluchowski modelan varios tipos de fenómenos tales como polimerización, agregación de partículas coloidales, la formación de estrellas y planetas, e inclusive procesos genéticos, grafos y matrices aleatorias. El presente trabajo tiene por objeto estudiar dos modelos de generación de polímeros por medio de la variación de esta ecuación, resaltando y completando todos los detalles técnicos omitidos en el homónimo artículo de J. Bertoin (2008). Consideraremos, en el tiempo inicial, partículas con tamaño unitario y un cierto número de enlaces potenciales (llamados brazos en el texto), ambos consumidos cuando ocurre alguna asociación. Restricciones en el número de asociaciones y en el tamaño de los polímeros serán una consecuencia de estas características. Usando resultados clásicos de teoría de la medida, combinatoria y técnicas que involucran funciones generatrices, resolución de EDPs cuasi-lineales y la fórmula de inversión de Lagrange, obtendremos soluciones explícitas de los sistemas infinitos no-lineales de EDOs que describen la dinámica de

las concentraciones. También discutiremos el comportamiento asintótico de algunas soluciones y pondremos en evidencia conexiones con resultados bien conocidos de las ecuaciones discretas de Smoluchowski con kernel constante, aditivo y multiplicativo.

#### 11. Pasantía en la dirección de Tesorería en Banco Davivienda

Estudiante **Yanis Emanuelle Mendez Vargas\***

Directora *Margaret J. Garzón Merchán\*\**

Emails \*ymendezv@unal.edu.co, \*\*mjgarzonm@unal.edu.co

RESUMEN. Una opción es un derivado financiero que se establece en un contrato que da el derecho, pero no la obligación, al comprador de negociar (comprar o vender) un activo a un precio de ejercicio acordado en una fecha determinada. En este trabajo estudiaremos opciones europeas cuya particularidad es que se ejercen solo en la fecha de vencimiento. La mesa de divisas de la dirección de tesorería del Banco Davivienda cuenta con opciones europeas de divisas pesos-dólares y se requiere implementar opciones europeas en euros-dólares, para esto se elaboró, durante esta pasantía, una calculadora que permite valorar y proporcionar los datos requeridos por las diferentes áreas del banco implicadas en el desarrollo de este producto. En este trabajo presentaremos la simulación de la valoración de cuatro opciones europeas (call compra, call venta, put compra y put venta) y un análisis de los resultados obtenidos de dichas valoraciones.