Boletín de Matemáticas **29**(2) 149–165 (2022)

Reseña de tesis

Reseñas de algunos trabajos de pregrado de los programas de Matemáticas y Ciencias de la Computación Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá. 2022-II

Dirección de Área Curricular[a]

Matemáticas

1. **Hybrid Flow Shop Scheduling considerando recirculación y tiempos de preparación dependientes de la secuencia, para la minimización del tiempo total de procesamiento y la tardanza**

   Estudiante **Juan Sebastián Acevedo Rodríguez***

   Director *Francisco Albeiro Gómez Jaramillo***

   Emails *jsacevedoro@unal.edu.co, **fagomezj@unal.edu.co

   Resumen. En el presente trabajo se estudia el problema de optimización combinatoria que consiste en la secuenciación y programación de trabajos en la planta de producción de una imprenta industrial. Este se caracteriza por presentar un esquema Hybrid Flow Shop con operaciones faltantes y tiempos dependientes de la secuencia. Para su resolución se plantea en primer lugar una formulación como programa lineal entero mixto, que resulta inviable debido al tiempo computacional, y en segundo lugar, la implementación de tres metaheurísicas basadas en diferentes paradigmas como lo son búsqueda local, programación genética y algoritmos constructivistas, cuyo resultado es satisfactorio en un tiempo computacional razonable. Adicionalmente, se explica en detalle cada elemento necesario para la implementación de una técnica metaheurística y se analiza una gran variedad de procedimientos en cada etapa del desarrollo, de manera que, los planteamientos aquí presentados se pueden adaptar a una amplia gama de problemas de optimización combinatoria, tanto para un solo objetivo como para múltiples criterios. Por otro lado, se introduce el algoritmo de Bloques Familiares, especialmente útil para abordar problemas de scheduling en donde se presenten familias de trabajos.

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[a]coocurmat_fcbog@unal.edu.co

2. Modelo predictivo computacional para el estudio de hurto a personas

Estudiante **Cristian David Bohorquez Canto***

Director *Francisco Albeiro Gómez Jaramillo***

Emails *cdbohorquezca@unal.edu.co, **fagomezj@unal.edu.co

Resumen. Para las agencias policiales a nivel mundial, anticiparse a los comportamientos criminales es un aspecto fundamental para encarar la lucha contra el crimen de una manera mas eficiente. Los procesos temporales de punto (TPP) se han convertido en un estándar de uso recurrente para analizar este tipo de secuencias de eventos en tiempo continuo que se desarrollan a intervalos irregulares. Se analizó una técnica que apunta en esta dirección conocida como intensity free learning of temporal point processes (iflTPP). Este método busca superar las limitaciones que presentan otros enfoques en esta misma área al tratar de parametrizar la función de intensidad. iflTPP propone un enfoque novedoso pues a partir de los datos aprende la función de Densidad de probabilidad (PDF) haciendo uso de la infraestructura de las Redes Neuronales recurrentes (Fully NN) directamente de la distribución condicional de los tiempos entre eventos. Para ello, mediante un modelo de mixtura se propone una función que permite muestrear y calcular momentos en forma cerrada y además iguala la flexibilidad de los métodos basados en flujos mejorando el rendimiento y superando las limitaciones de propuestas anteriores en esta misma linea. Para comprender el potencial de iflTPP, Mediante la recapitulación de algunas definiciones claves se realiza una introducción de algunos conceptos importantes para comprender el fundamento teórico que subyace detrás de esta técnica. Counting & Point Process, la función de intensidad condicional, Hawkes Processes con algunas de su aplicaciones en el campo de la seguridad predictiva, la técnica de Kernel Density Estimation, determinación de parámetros para funciones intensidad o probabilidad condicional mediante el criterio de Log-Likelihood, Fully Neural Network son algunas de las definiciones importantes que se abordaran para dar claridad sobre la explicación el punto central de este documento, la técnica de Intensity Free Learnig of Temporal Point Processes. Finalmente luego de recopilar algunos datos de hurto a personas en la ciudad de Medellín, se desarrolló un ejercicio predictivo antecedido por un ejercicio clásico de análisis de datos, donde se abordaron algunas preguntas referentes a la seguridad en un área geográfica denotada.[2].

Palabras clave: Intensity Free Learning of Temporal Point Processes, Modelos predictivos, Mixture Distributions, Hurtos callejeros, Seguridad ciudadana, Inteligencia artificial, Algoritmos de aprendizaje, Recurrent Neural Network, Self-exiting Point Processes, Kernel Density Estimation.

[2]Última edición: 30 de Noviembre de 2022, 16:57

3. **Análisis del hipergrafo de Wolfram como objeto matemático**

Estudiante **Juan Pablo Fonseca Sanchez***

Director *Juan Andres Montoya Arguello***

Emails *jpfonsecas@unal.edu.co, **jamontoyaa@unal.edu.co

RESUMEN. Los grafos simples que aparecen naturalmente en varios lugares de la matemática. Los grafos son ingredientes fundamentales de los modelos de las ciencias de la computación y los modelos de las ciencias naturales (cadenas de Márkov, diagramas de Feynman etc.).

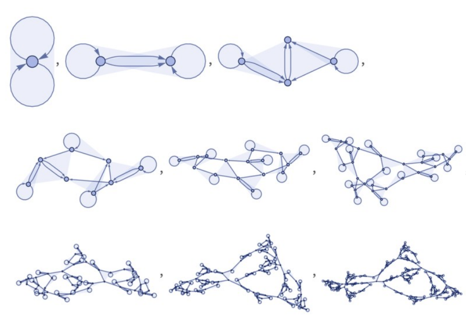
Los hipergrafos son una generalización de los grafos pues con estos últimos nos limitamos a considerar parejas de vértices, mientras que con los hipergrafos podemos considerar tuplas de vértices de dimensiones arbitrarias.

Estado del arte

La teoría de grafos es una de las áreas más vigorosas de la matemática moderna (Diestel 2005). La teoría de grafos es rica en aplicaciones gracias a la ubicuidad de los grafos. Esta teoría puede considerarse un capítulo especial de la teoría de hipergrafos (Wolfram 2020). Sin embargo, estos últimos aparecen con poca frecuencia en las aplicaciones de la matemática discreta. Deben existir modelos basados en hipergrafos que funcionan mejor que cualquier modelo basado en grafos. Recientemente Wolfram propuso un modelo de Hipergrafo para la física (ibid). El objetivo central de este trabajo es entender la propuesta de Wolfram y el rol que juegan los hipergrafos en la misma.

Planteamiento del problema

Stephen Wolfram propuso recientemente un modelo de la física basado en lo que él llama un hipergrafo (vea S. Wolfram 2020). Wolfram define este hipergrafo como una secuencia de grafos ordinarios. Las interacciones entre estos grafos son el origen, en el modelo de Wolfram, de las distintas fuerzas fundamentales. Sin embargo la definición computacional y recursiva que presenta Wolfram contrasta con la definición formal de hipergrafo. Queremos entender la estructura de Wolfram y determinar si ella es en efecto un hipergrafo.



Objetivos: Entender las aplicaciones de la noción de hipergrafo

Al ser los grafos tipos especiales de hipergrafos, toda aplicación de la teoría de grafos es una aplicación de la teoría de hipergrafos. Nos preguntamos si existen aplicaciones donde el uso de hipergrafos no gráficos se traduzca en ventajas cuantificables respecto al uso de grafos. Para ellos tomamos como referente el hipergrafo de Wolfram que puede ser usado, según el autor, como un marco común para interpretar toda la física. Queremos analizar lo siguiente:

a) ¿Son correctas las afirmaciones de Wolfram? ¿Tiene asidero o son exageraciones descabelladas? ¿Permite el hipergrafo de Wolfram presentar un modelo unificado de la física?

b) ¿Qué permite el hipergrafo de Wolfram? ¿Puede lograrse lo mismo usando grafos, o es indispensable el carácter hipergráfico de esta estructura?

c) ¿Es la estructura de Wolfram un hipergrafo en el sentido usual?

Bibliografía

a) Diestel. Reinhard. (2005) Graph theory. Springer, graduate text in mathematics.

b) Wolfram, Stephen. (2020) A project to find the fundamental theory of physics. Wolfram media Inc.

4. **Modularidad de Curvas Elípticas**

Estudiante **Víctor Antonio Gandica Poveda***

Director *John Jaime Rodríguez Vega***

Emails *vagandicap@unal.edu.co, **jjrodriguezv@unal.edu.co

Resumen. Las curvas elípticas son un punto de encuentro entre la teoría de números, el álgebra, la geometría y el análisis complejo. Tal conexión es el resultado de esfuerzos para encontrar soluciones de ecuaciones Diofánticas y estudiar propiedades de los números primos. En este trabajo exploramos una relación entre curvas elípticas y unas funciones del análisis complejo llamadas formas modulares. Dada una forma modular f podemos asociar a esta una curva elíptica $E : y^2 = 4x^3 + ax + b$ con coeficientes racionales que tiene la propiedad de que su número de soluciones módulo p en el cuerpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ está dado por la fórmula $p - c_p$ donde c_p es el p-ésimo coeficiente del desarrollo en serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n$ de f. Esta relación entre la curva E y la forma modular f se llama *modularidad de la curva E*. Para lograr esta conexión es necesario estudiar el espacio vectorial complejo $\mathcal{M}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ que consiste de todas las formas modulares de peso k donde $SL_2(\mathbb{Z})$ es el *grupo modular*: el grupo de matrices de tamaño 2×2 con entradas en $\mathbb{Z}$ y determinante igual a 1. Este espacio

es dotado con un producto interno Hermitiano llamado *producto interno de Petersson* y con operadores lineales llamados *operadores de Hecke*. Al asociar a la forma modular f una función analítica $L(s, f)$ llamada la *L función* de f y asociar a la curva E otra función analítica $L(s, E)$ que se llama la L función de E tenemos que como consecuencia de aplicar el teorema espectral del análisis funcional a los operadores de Hecke obtenemos la igualdad de las L funciones $L(s, f) = L(s, E)$ y como consecuencia de esta igualdad obtenemos la modularidad de la curva elíptica E.

5. **El Teorema de los Números Primos y la Hipótesis de Riemann**

Estudiante **Juan Pablo Herran Martínez***

Director *John Jaime Rodríguez Vega***

Emails *jpherranm@unal.edu.co, **jjrodriguezv@unal.edu.co

Resumen. En este trabajo de grado se estudia la distribución de los números primos, se presentan las ideas de Riemann sobre función contadora de primos $\pi(x)$ y la función $\zeta(s)$, se enuncia y se demuestra el teorema de los números primos haciendo uso de las ideas de Riemann, Von Mangoldt y Hadamard, y adicionalmente se enuncia la hipótesis de Riemann y se comentan algunas de sus relaciones con la distribución de los primos. El estudio de la distribución de los números primos consiste en dados los primeros n números $1, \ldots, n$ preguntarse cuántos de estos son primos, es decir estudiar el comportamiento de la función contadora de primos $\pi(x)$, que es básicamente la función que nos indica la cantidad de números primos menores a un x positivo dado. Las ideas de Riemann proporcionan una fórmula explícita para función contadora de primos $\pi(x)$, en términos de los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$, mostrando así la relación de dichos ceros con la distribución de los primos. La prueba del teorema de los números primos que establece que $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log(x)}$ y $\pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$, consiste en demostrar el enunciado equivalente $\psi(x) \sim x$, basándose en la idea de la prueba original de Hadamard y haciendo uso de la fórmula de Von Mangoldt.

6. **Informe de Pasantía en la Imprenta de Billetes del Banco de la República**

Estudiante **Juan Pablo Montaño Díaz***

Director *Juan Carlos Galvis Arrieta***

Emails *jmontanod@unal.edu.co, **jacgalvisa@unal.edu.co

Resumen. Con el fin de dar un manejo óptimo al inventario, la **Imprenta de Billetes del Banco de la República (IBBR)** busca implementar la metodología DDMRP en su cadena de producción. Para esto necesita establecer estándares de consumo de cada material considerado en la metodología a partir de la producción de la planta.

Esta pasantía realizada en el segundo semestre de 2022 se orientó en el diseño e implementación de modelos matemáticos con el objetivo de encontrar estándares de consumo de los materiales considerados. Como resultado se obtuvieron modelos diseñados por medio de series de tiempo y regresiones lineales los cuales están siendo sometidos a pruebas experimentales para determinar su futura implementación en la Imprenta.

El lenguaje de programación utilizado para la manipulación de los datos y la implementación de los modelos expuestos fue Python. Debido a las políticas de confidencialidad de la información del Banco, los datos presentados fueron alterados sin perder la naturaleza de su comportamiento.

7. **Una introducción a los números lisos y su rol en la teoría de números**

Estudiante **Edisson Ernesto Ochoa Pérez***

Director *John Jaime Rodríguez Vega***

Emails *eochoap@unal.edu.co, **jjrodriguezv@unal.edu.co

Resumen. Un número es y-liso si todos sus factores primos son menores o iguales a y. Este trabajo comienza abordando propiedades y problemas relevantes para los números primos y trasladándolos al ámbito de los lisos para así tener una noción de la manera en que estos se distribuyen. Posteriormente se expone como los números lisos se relacionan con teoremas ya conocidos en los lisos mostrando, por ejemplo, una demostración elemental del teorema de los números primos que no usa la identidad de Selberg. Finalmente se explora el papel que tienen los lisos en los algoritmos de la teoría computacional de números, haciendo que los métodos para resolver una ecuación de Pell o factorizar un número sean mucho más eficientes.

8. **Una introducción al Análisis Armónico en Grupos**

Estudiante **Juan Diego Palma Dueñas***

Director *Guillermo Rodríguez Blanco***

Emails *jdpalmad@unal.edu.co, **grodriguezb@unal.edu.co

Resumen. La transformada de Fourier, $\hat{f}$, fue motivada por la intuición de que casi cualquier función podía ser vista como una suma de funciones periódicas, un hecho que fue útil en el acercamiento a diferentes problemas, como por ejemplo el estudio de la oscilación de una cuerda de violín (*D'Alembert* 1747)[1]. Posteriormente Euler propuso que dicha solución podia expresarse

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)\cos(n\pi t)\sin(n\pi t) \tag{1}$$

Dicho acercamiento impulso diferentes esfuerzos por los matemáticos de la época por encontrar la función $\hat{f}$ pues claramente $\hat{f}$ era una "fórmula"

para obtener los coeficientes asociados a la solución y posteriormente Bernoulli. D y Lagrange definieron:

$$\hat{f}(n) = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx \tag{2}$$

Posteriormente, en los siglos XIX y XX, conforme se desarrollo la teoría de integración de Lebesgue, se presenta el Teorema de Riesz-Fischer, el cual para funciones que satisfacían ciertas condiciones de integrabilidad se obtenía que:

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2n\pi ix}dx,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

era una isometria inyectiva que además, en un sentido geométrico, converge a f. Paralelamente también se obtuvo que:

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi iyx}dx \tag{3}$$

Para funciones no periódicas que decaían con "rapidez".

Además se ha considerado la cuestión de entender para que dominios la transformada de Fourier se puede extender pues dado un grupo G se tiene que:

$$\hat{f} : \mathcal{L}(G) \longrightarrow L(\hat{G}).$$

Con resultados interesantes como que si G es abeliano, entonces f es un isomorfismo isometrico para $\mathcal{L}(G)$ y $\mathcal{L}(\hat{G})$ claramente con ciertas condiciones sobre f (Pontryagin, Wei y Gelfand). Para el caso de grupos no abelianos, $\hat{G}$ no se comporta de la misma forma, de hecho $\hat{G}$ ya no es un grupo sino que es el conjunto de todas las clases de equivalencia de representaciones unitarias irreducibles sobre un espacio de Hilbert [2].

La Dualidad de Pontryagin para grupos localmente compactos e impulsa una generalización similar para otros grupos. Además revela la necesidad de una definición de medida de forma que pudiéramos obtener resultados como los vistos inicialmente y en general, por ejemplo la identidad de Plancherel vista como:

$$\int_G |f(g)|2d\mu(x) = \int_{\hat{G}} |\hat{f}(g)|^2 dv(x)$$

En donde μ es justamente la Medida de Haar de G y v la medida inducida por μ tal que:

$$f(x) = \int_{U(G)} \hat{f}(e)e(g)dv(x)$$

De modo que si G es localmente compacto, si $g \in G$ y G induce un algebra de borel via la unión de todos sus subconjuntos, entonces, definimos las traslaciones a izquierda y a derecha de la siguiente forma:

$$gS = \{gs : s \in S\}$$
$$Sg = \{sg : s \in S\}$$

y decimos que μ es invariante a izquierda si $\mu(gS) = \mu(S)$, analogamente μ puede ser invariante a derecha.

La única medida multiplicativa μ que es invariante a izquierda, que ademas $\mu(K) < \infty$ si $K \subseteq G$ que además satisface que:

$$\mu(S) = inf\{\mu(U) : S \subseteq U \text{ y } U \text{ abierto}\}$$
$$\mu(U) = inf\{\mu(K) : K \subseteq U \text{ y } U \text{ compacto}\}$$

la llamamos medida de Haar.

Finalmente, vale la pena traer un Teorema que por un lado resume mucho de lo que hemos hecho y por otra parte motiva a seguir aprendiendo de la teoría, este es:

Dualidad de Pontryagin Sea G un grupo localmente compacto abeliano, con medida de Haar, λ, Sea $\hat{G}$ su dual con medida $\hat{\lambda}$ y su doble dual $\hat{\hat{G}}$ con medida $\hat{\hat{G}}$, entonces existe:

$$\nu : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$$

Isomorfismo de Grupos Topológicos. $\wedge : \mathcal{L}^2(G) \longrightarrow \mathcal{L}^2(G)$ y $\wedge^{-1} : \mathcal{L}^2(G) \longrightarrow \mathcal{L}^2(G)$ son inversos y

$$f = (\hat{f}^{-1} \circ \hat{f})(f) \circ \nu$$

para todo f.

Usando propiedades de la transformada en $\mathcal{L}^p(G)$ y el teorema anterior, podemos deducir por ejemplo que si G es abeliano, entonces $\hat{G}$ es localmente compacto abeliano. (Claramente en la otra dirección también se tiene por la Dualidad).

Dichas cuestiones han implicado amplios desarrollos en el análisis armónico en los grupos, además de ser relevante para diferentes problemas de clásicos de la teoría de grafos, la teoría de números, las funciones especiales o la misma teoría de representaciones [3].

Referencias

[1] Dym. H e McKean. H. P. *Fourier Series and Integrals.* 1a. ed. Academic Press, Inc., 1985.

[2] Gallier. J e Quaintance. J. *Aspects of Harmonic Analysis and Representation Theory.* Department of Computer e Information Science, University of Pennsylvania, 2021.

[3] Ceccherini-Silberstein. T, Scarabotti. F e Tolli. F. *Harmonic Analysis on Finite Groups. Representation Theory, Gelfand Pairs and Markov Chains.* 1a. ed. Cambridge Universite Press, 2008.

9. **Implementación de metodologías para la medición de la exposición al riesgo de los portafolios de inversión del Banco de la República**

Estudiante **Juan Felipe Plazas Muñeton***

Director *Francisco Albeiro Gómez Jaramillo***

Emails *jplazasm@unal.edu.co, **fagomezj@unal.edu.co

Resumen. Apoyar en la definición y aplicación de las metodologías con las cuales se hará la medición de los riesgos financieros del Banco de la República en el departamento de Riesgo Financiero, el cuál en su papel de segunda línea de defensa del BR es el responsable de la administración y gestión de los riesgos financieros materiales y transversales, desde un enfoque estratégico y consolidado de los riesgos.

Objetivo Específico. Aplicar las metodologías de VaR Paramétrico, VaR GARCH y VaR EWMA en el lenguaje de programación *R* para determinar el riesgo diario al que están sometidos individual y conjuntamente todos los portafolios de inversión del Banco de la República, determinando los factores de riesgo que influyen en cada medida.

Sea S_i el valor de una variable de mercado al final del día i, entonces el **retorno compuesto** o **retorno logarítmico** por día para dicha variable de mercado en el día i se define como $u_i = \ln S_i - \ln S_{i-1}$. La **volatilidad** por día σ de una variable de mercado, se define como la desviación estándar del retorno proporcionado por dicha variable en un día. La **tasa de varianza** por día es la varianza del retorno compuesto en un día.

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i} - \bar{u})^2 \quad \text{donde} \quad \bar{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i}.$$

El **modelo ARCH(m)** estima la volatilidad diaria como

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_{n-i}^2 \quad \text{con} \quad \gamma + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1,$$

donde cada peso α_i satisface que $\alpha_i < \alpha_j$ cuando $i > j$, V_L es una tasa de varianza promedio a largo plazo y γ su respectivo peso.

El **modelo EWMA** (exponentially weighted moving average), es un caso particular del modelo ARCH(m) en donde $\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i$ con $0 < \lambda < 1$, lo que conduce a una fórmula recursiva muy simple para estimar la volatilidad en un día n, $\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2$, por lo que después de una cantidad de m observaciones se obtiene que

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}u_{n-i}^2 + \lambda^m\sigma_{n-m}^2.$$

El **modelo GARCH(1,1)** se diferencia del EWMA en que en este también se cosidera V_L. La ecuación del modelo $GARCH(1,1)$ es $\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$ con $\gamma + \alpha + \beta = 1$ y $\omega = \gamma V_L$, por lo que después de una cantidad de m observaciones se obtiene que

$$\sigma_n^2 = \beta^m\sigma_{n-m}^2 + \sum_{i=1}^{m}\omega\beta^{i-1} + \sum_{i=1}^{m}\alpha\beta^{i-1}u_{n-i}^2$$

El Valor en Riesgo, también llamado **VaR** (Value at Risk, en inglés) es un método para cuantificar la exposición al riesgo de mercado, utilizando técnicas estadísticas tradicionales. Este mide la pérdida que se podría sufrir en condiciones normales de mercado en un **horizonte de tiempo** T y con un cierto **nivel de confianza** X por ciento. Este se calcula a partir de la distribución de probabilidad de pérdidas durante el tiempo T, generalmente se asume que el cambio en el valor de la cartera en el horizonte de tiempo es normalmente distribuido. Cuando la pérdida en el valor de la cartera tiene una media de μ y una desviación estándar de σ, tenemos que $VaR = \mu + \sigma N^{-1}(X)$, donde X es el nivel de confianza, y $N^{-1}(.)$ es la distribución normal acumulada inversa. Si se tiene un portafolio con un valor de P que depende de n variables de mercado, entonces $VaR = \sqrt{\delta^T C\delta N^{-1}(X)}$, donde δ es el vector de valores de mercado de las variables, y C es la matriz de varianza-covarianza de sus retornos compuestos. A este VaR se le denomina como **VaR Paramétrico**.

Mediante los modelos GARCH y EWMA se puede estimar la volatilidad de una variable de mercado (después de estimar los parámetros ω, α y β, o el parámetro λ, respectivamente) para algún día a partir de un histórico de dicha variable; volatilidad con la cual se calculan el **VaR GARCH**, y el **VaR EWMA** mediante la ecuación general del VaR para un portafolio de n activos, la cuál se puede escribir explícitamente de la siguiente forma

$$VaR = -\sum_{i=1}^{n}\omega_i\mu_i + \frac{z_{(1-\alpha)}}{\sigma_p}\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_i\left(\sum_{i,j}^{n}\omega_j\sigma_{ij}\right)\right].$$

A partir de la anterior expresión, y seleccionando una variable de análisis de riesgo del portafolio en cuestión, se puede calcular la contribución de cada una de las categorías de esta variable a las tres medidas de riesgo anteriormente mencionadas mediante la siguiente ecuación

$$VaR_{\%,i} = \frac{1}{VaR}\left[-\omega_i\mu_i + \frac{z_{(1-\alpha)}}{\sigma_p}\omega_i\left(\sum_{i,j}^{n}\omega_j\sigma_{ij}\right)\right].$$

10. **Una introducción a la teoría algebraica de hipergrafos y sus aplicaciones**

Estudiante **Paula Ximena Rodríguez Nempeque***

Director *Humberto Sarria Zapata***

Emails *prodriguezn@unal.edu.co, **hsarriaz@unal.edu.co

RESUMEN. La teoría de grafos es una herramienta de gran utilidad en la solución de problemas combinatorios, en áreas tan variadas como topología, física, optimización, geometría, álgebra, teoría de números, química, etc [2]. Por esto con el fin de dar solución a un mayor número de problemas de carácter combinatorio, en 1960 Claude Berge presentó su idea de generalizar el concepto de grafo, usando conjuntos como generalización de las aristas, a las que llamó hiperaristas y a la familia de hiperaristas le nombró hipergrafo. [1].

Por la forma en la que fueron creados, los hipergrafos modelan relaciones más generales que los grafos. Lo que proporciona una herramienta de gran utilidad para representar problemas en redes biológicas, redes de telecomunicación, procesos de planificación, estructuras de datos, entre otros problemas donde las relaciones entre los objetos son complejas por lo que resulta mejor representarlas en conjuntos que en parejas. En este trabajo explicaremos qué son los grafos, los multigrafos y los hipergrafos, algunas de sus propiedades, sus diferencias, y finalmente mostraremos en que situaciones y por qué es más adecuado usar hipergrafos en lugar de grafos. Para esto hablaremos de varias matrices que representan los grafos, multigrafos e hipergrafos, y sobre estas matrices estudiaremos propiedades que nos brindan información sobre conexidad y corte en hipergrafos. Finalmente, basados en las propiedades algebraicas y computacionales de los hipergrafos, mostramos dos aplicaciones: un algoritmo que determina el corte mínimo equipotente en hipergrafos y un algoritmo de detección y corrección de ruido en imágenes.

Referencias

[1] Berge, Claude (1973). Graphs and Hypergraphs. Amsterdam: North-Holland.

[2] Robin J. Wilson. 17 Dec 2013, History of Graph Theory from: Handbook of Graph Theory CRC Press.

[3] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications, Macmillan, London, 1976.

[4] C. Godsil and G. Royle, Algebraic Graph Theory, Springer, New York, 2001.

[5] Alain Bretto, Hypergraph Theory: An Introduction, Springer, 2013.

[6] A. Bretto, H. Cherifi and D. Aboutajdine, Hypergraph Imaging: An Overview, 2002.

[7] M. Wolf, A. Klinvex and D. Dunlavy, Advantages to Modeling Relational Data Using Hypergraphs versus Graphs, IEEE HPEC, Sandia National Laboratories, 2016.

11. **Optimización y desarrollo de campañas de busqueda paga**

Estudiante **Nicolás David Sánchez Yáñez***

Director *Francisco Albeiro Gómez Jaramillo***

Emails *nsanchezy@unal.edu.co, **fagomezj@unal.edu.co

Resumen. El área de media se encarga de plantear estrategias de comunicación para las marcas y supervisar todos los medios de comunicación en donde se implementan. Estas estrategias pueden ser dirigidas a públicos en específico o de comunicación masiva.

Con la entrada constante de nuevas tecnologías y nuevos medios en donde comunicar se están volviendo cada vez más relevantes los medios digitales que tienen como ventaja la fácil recolección de Data de los usuarios interesados en los productos ofertados. Gracias a esto muchas empresas están adoptando un modelo de Precission Marketing (impactar al usuario correcto con el mensaje correcto en el lugar correcto) sin embargo, es necesario poder manejar grandes cantidades de datos para poder perfilar de manera correcta a los usuarios interesados en el producto y para poder optimizar las plataformas digitales para que ofrezcan el mejor rendimiento y alcance posible con los presupuestos dados. Dentro de los medios digitales que maneja Sanofi, el más relevante es el que ofrece Google dentro de sus buscadores ya que ofrece el mejor retorno de inversión y el nivel de control que uno puede llegar a tener es bastante alto, sin embargo, su nivel de optimización no alcanzaba los estándares que la empresa exigía y se necesitaba a alguien que hiciera un análisis profundo de las campañas que se estaban corriendo en esta plataforma para luego plantear optimizaciones dentro de esta.

12. **Enumeración de caminos de Dyck con restricciones**

Estudiante **Lina María Simbaqueba Marín***

Director *José Luis Ramírez Ramírez***

Emails *lmsimbaquebam@unal.edu.co, **jlramirezr@unal.edu.co

Resumen. En el presente trabajo se hace un estudio de los caminos reticulares, en particular, de los caminos de Dyck sesgados, estudiando a su vez las principales técnicas usadas en combinatoria enumerativa como el uso de las funciones generatrices, el método simbólico, el Teorema de inversión de Lagrange, matrices de Hankel, matrices de Riordan, relaciones de recurrencia, argumentos combinatorios, métodos asintóticos, usos de bases de Gröbner y biyecciones entre conjuntos.

Después de hacer una revisión teórica de estas técnicas se procede a estudiar resultados encontrados en la literatura sobre caminos de Dyck

sesgados que incluyen relaciones entre estos y los números de Fibonacci, biyecciones con otros objetos combinatorios como árboles hexagonales, caminos 3-Motzkin y árboles marcados y, resultados sobre la matriz de Hankel asociada. En los últimos dos capítulos se presentan resultados propios realizando conteos sobre los prefijos sesgados y estudiando la matriz de Riordan asociada. Finalmente, se presenta un estudio enumerativo sobre clases de equivalencia generadas por subpalabras de caminos de Dyck sesgados.

Palabras clave: Caminos de Dyck sesgados, método simbólico, grupo de Riordan, subpalabras, prefijos, biyecciones, clases de equivalencia.

13. **Leyes de Reciprocidad: Ideas fundamentales desde Fermat hasta Artin**

Estudiante **Sebastian Torroledo Castillo***

Director *John Jaime Rodríguez Vega***

Emails *storroledo@unal.edu.co, **jjrodriguezv@unal.edu.co

Resumen. El estudio de las leyes de reciprocidad ha sido uno de los enfoques principales de la teoría de números. Su estudio ha llevado a diversos matemáticos a buscar y resolver dichas leyes. Empezando por la ley de reciprocidad cuadrática, con ideas iniciales de Fermat, enunciada por Euler, demostrada por Gauss y generalizada por Hilbert. Luego, revisando como se puede generalizar a otras potencias, como la ley de reciprocidad cúbica; y finalizando, con la ley de reciprocidad abeliana más general, la ley de reciprocidad de Artin.

14. **Cálculo de reserva IBNR usando técnicas de Machine Learning**

Estudiante **Daniel Useche Corchuelo***

Director *Jorge Mauricio Ruiz Vera***

Emails *dusechec@unal.edu.co, **jmruizv@unal.edu.co

Resumen. Entre las obligaciones de las aseguradoras se encuentra constituir reservas para poder cumplir con sus obligaciones asociadas a siniestros amparados por las pólizas previamente vendidas. Una de estas reservas recibe el nombre de IBNR (Incurred But Not Reported), que traduce al español *incurrido pero no reportado*. Esta reserva se constituye para atender con obligaciones futuras de siniestros que ya ocurrieron y no han sido reportados o suficientemente reportados, representando esto último la evolución de los siniestros a través del tiempo. Existen varios métodos utilizados por actuarios para estimar la reserve IBNR, nosotros estudiamos particularmente los métodos Chain-Ladder y Bornhuetter-Ferguson. Se estudió un acercamiento de Machine Learning propuesto por (Balona and Richman, 2020) para poder mejorar el desempeño de los métodos iniciales, aprovechando sus diferentes variaciones.

Palabras clave: Reservas de Seguros, Pérdidas Finales, IBNR, Método Chain-Ladder, Método Bornhuetter-Ferguson, Resultado del Desarrollo de Reclamos, Machine Learning.

15. **Sistemas integrables en variedades Poisson y su foliación**

Estudiante **Lennis Mariana Villarraga Cañón***

Director *Nicolás Martínez Alba***

Emails *lvillarragac@unal.edu.co, **nmartineza@unal.edu.co

Resumen. En un sistema dinámico, un sistema integrable reduce el número de variables del sistema mediante el uso de primeras integrales (cantidades conservadas); el caso de sistemas completamente integrables dice que el problema se puede reducir de forma máxima en cuanto a la dimensión, para así facilitar los cálculos a realizar y el entendimiento de la evolución temporal del sistema. En el caso de la mecánica y otras ramas de la física, el espacio de fase del sistema se puede describir mediante una variedad de Poisson representada por un corchete dinámico. El caso de un corchete simpléctico es conocido, pero cuando se presentan degeneraciones del sistema físico no se encuentra bien definido un sistema integrable.

Los fenómenos naturales cinéticos dieron paso al planteamiento de ecuaciones de movimiento a través de su modelación matemática, que con los años llegó hasta el formalismo de Hamilton el cual permitió entender sistemas físicos desde una abstracción matemática con la implementación de las coordenadas generalizadas. Como siempre han sido de interés las cantidades conservadas en cualquier sistema físico, en este nuevo formalismo se introducen los sistemas integrables que caracterizan los subespacios en donde el sistema se comporta de la manera deseada conservando cantidades físicas. Estos problemas son clásicos sobre variedades simplécticas y se encuentran resueltos desde hace varias décadas; y en trabajos recientes se ha propuesto una versión más general que incluye las variedades Poisson para encontrar como la dinámica de un problema clásico degenerado se puede aproximar. Una herramienta fundamental es el uso de la foliación simpléctica.

Este trabajo presentará esta nueva definición y sus herramientas principales. Iniciará con la definición de las herramientas matemáticas necesarias para la formalización de los sistemas integrables y las variedades de Poisson, definiendo en estas principalmente lo que es un corchete de Poisson, a partir de este su foliación, se seguirá con el planteamiento de problemas clásicos en mecánica y luego se considerará un ejemplo físico sencillo que ilustra la dificultad al encontrar estos sistemas en general. Por último se dará la definición de sistemas integrables en los casos no-degenrados (simplécticos) y también el caso con degeneración (Poisson), terminando con la mención a las variables acción-ángulo que buscan simplificar el encuentro de soluciones explícitas para los sistemas integrables.

Ciencias de la Computación

1. **Pasantía en Programación de Videojuegos en Teravisión Games**

Estudiante **David Halliday Martínez***

Director *José Luis Ramírez Ramírez***

Emails *dhalliday@unal.edu.co, **jlramirezr@unal.edu.co

Resumen. El presente informe describe la experiencia de pasantía de un estudiante del pregrado de Ciencias de la Computación de la Universidad Nacional de Colombia. La pasantía fue realizada en una empresa de desarrollo de videojuegos, Teravisión Games, como programador de videojuegos en el motor *Unreal Engine*. El proyecto de pasantía se enfocó en el área de programación gráfica y renderizado en tiempo real. Este documento da una introducción al área de computación gráfica y describe el desarrollo del proyecto final sobre la implementación de una réplica de generación procedural de césped.

2. **Fraude Marketplace en la Vertical de Mercado Envíos**

Estudiante **Lizeth Catherine Ortiz Pulido***

Director *Jose Luis Ramírez Ramírez***

Emails *liortiz@unal.edu.co, **jlramirezr@unal.edu.co

Resumen. La pasantía que se está presentando para Ciencias de la Computación es realizada en la empresa MERCADO LIBRE COLOMBIA LTDA, empresa dedicada al comercio por internet. El trabajo consiste en desarrollar un modelo que permita disminuir el riesgo de fraude en el proceso de envío de mercancías.

Palabras Clave: Prevención Fraude, Análisis de Datos, Maching Learning.

3. **Aprendizaje de Estructuras Relacionales Usando Lógica - una exploración de la Literatura**

Estudiante **David Ricardo Pedraza Silva***

Director *Juan Andrés Montoya Arguello***

Emails *drpedrazas@unal.edu.co, **jamontoyaa@unal.edu.co

Resumen. Los campos de la lógica y la teoría de la coplejidad constituyen el corazón de la computación. Desde el inicio de su historia, se ha percibido el aprendizaje de juegos de mesa como un terreno fértil en el cual afilar las nuevas técnicas y artificios producto de su avance. En este escrito se exploran los rudimentos lógicos que permiten el aprendizaje de juegos por medio de estructuras relacionales y se expone, además, un ejemplo del estado del arte.

4. **Prácticas como científico de datos en la empresa Ocxci SAS**

Estudiante **Daniel Felipe Quiñones Ordoñez***

Director *Francisco Albeiro Gómez Jaramillo***

Emails *dfquinoneso@unal.edu.co, **fagomezj@unal.edu.co

Resumen. Los datos son llamados el oro del siglo XXI gracias a las técnicas, procedimientos y herramientas que poseemos para procesarlos actualmente. Pero no son valiosos por sí mismos. Para esto es necesario el rol de los analistas y científicos de datos, que de ellos sacan un valor relevante para la sociedad. En este caso, comunicaremos la experiencia vivida en la startup Ocxci en el rol de científico de datos practicante, y como desde la generación de encuestas dinámicas, el procesamiento de lenguaje natural y el análisis exploratorio de datos, buscamos dar a nuestros clientes, que pertenecen a la industria de restaurantes, analisis constructivos, claros, sencillos y certeros que les ayuden, entre otras cosas en el mejoramiento de la reputación de sus negocios, en la evaluación de su servicio, producto y experiencia.

Palabras clave: Análisis de datos, EDA, procesamiento del lenguaje natural, inteligencia de negocios.

5. **The Virtual Finite Element Method and its applications**

Estudiante **Andrés Eduardo Rubiano Martínez***

Director *Juan Carlos Galvis Arrieta***

Emails *aerubianoma@unal.edu.co, **jacgalvisa@unal.edu.co

Resumen. En esta monografía presentamos una breve introducción al VFEM con su formulación débil asociada a la ecuación de Laplace y luego el planteamiento de este método con el problema de elasticidad lineal en 2D.

Comenzamos presentándolo desde la formulación estándar del FEM y extendiéndolo a mallas poligonales arbitrarias usando las funciones de forma apropiadas. La principal diferencia entre estos dos métodos radica en la construcción de esas funciones de forma. Por un lado, el FEM estándar representa la solución localmente mediante polinomios. Sin embargo, para VFEM, las funciones de forma no se conocen explícitamente, para resolver este problema usamos proyecciones e integración por partes para aproximar la solución localmente. Esto proporciona una de las principales ventajas de VFEM frente a FEM, es decir, podemos incluir una estructura poligonal arbitraria a la malla para discretizar el dominio, esta libertad de discretización ayuda a los procedimientos de refinamiento local y simplifica el manejo de la malla, lo cual es muy útil para problemas de cambio de dominio en física o dominios con una geometría complicada. Además, la discretización VFEM puede evitar el bloqueo volumétrico y disminuir la dependencia del error de solución de la calidad de la malla.

6. **Guía para la comprensión de la importancia de la calidad en el desarrollo de software mediante técnicas, metodologías y determinación de decisiones para la optimización y automatización de procesos**

Estudiante **María Paula Vizcaíno Forero***

Director *José Luis Ramírez Ramírez***

Emails *mvizcaino@unal.edu.co, **jlramirezr@unal.edu.co

RESUMEN. Durante la carrera, se nos presentan ciertas introducciones a los diversos campos de ejercicio profesional como estudiantes de Ciencias de la Computación, muchos de estos campos van orientados gran parte en aplicar las habilitades de razonamiento matemático adquiridas en el proceso de aprendizaje directamente en el campo de la programación. Así, tomando provecho de las tecnologías informáticas en auge a nivel nacional, la intención de esta guía es proporcionar las herramientas necesarias para incursionar en el desarrollo web orientado al back-end, procurando abarcar las áreas de esta estructuración más relevantes tales como la usabilidad y la experiencia de usuario con el fin de automatizar y sistematizar procesos empresariales.

Palabras Clave: Framework, principios de arquitectura de software, microservicios, sistematizar, automatizar, refactorizar.