Superestabilidad en Q-Clases Elementales Abstractas

Superstability in Q-Abstract Elementary Classes

Nicolás Nájjar Salinas^{1,2,a}

Resumen. En 2006 Andrew Coppola introdujo el concepto de Q-Clase Elemental Abstracta como una generalización de la clase de modelos de una sentencia en la lógica $\mathcal{L}_{\omega, \omega_1}(Q)$ [5]. Basado en [7], Coppola hace una adaptación del argumento de transferencia de categoricidad de Grossberg y VanDieren bajo tres supuestos adicionales. Para justificar uno de los supuestos hechos por Coppola, en [13] se hace una adaptación de los conceptos básicos de superestabilidad en Clases Elementales Abstractas para justificar uno de los supuestos hechos por Coppola. El objetivo de este resumen extendido es explicar esta adaptación de una manera esquemática.

Palabras claves: Q-Clase Elemental Abstracta, superestabilidad, teorema de Shelah-Villaveces, ruptura, carácter local de la no-ruptura.

Abstract. In 2006 Andrew Coppola introduced the Q-Abstract Elementary Class concept as a generalization of the class of models of a sentence in the logic $\mathcal{L}_{\omega, \omega}(Q)$ [5]. Based on [7], Coppola makes an adaptation of the Grossberg and VanDieren argument of categoricity transfer under three additional assumptions. To justify one of Coppola's assumptions, an adaptation of basic superstability concepts in Abstract Elementary Classes, is made in [13] to justify one of the assumptions of Coppola. The objective of this extended summary is to explain this adaptation in a schematic way.

Keywords: Q-Abstract Elementary Class, superstability, Shelah-Villaveces Theorem, splitting, local character of non-splitting.

Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C45, 03C48, 03C50, 03C52, 03C80, 03C95.

Recibido: mayo de 2023

Aceptado: octubre de 2023

---

¹Departamento de Matemáticas e informática, Fundación Universidad de América, Bogotá, Colombia.

²Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

^aose.najjar@profesores.uamerica.edu.co, jonnajarsa@unal.edu.co

1. Introducción

La noción de Clase Elemental Abstracta (AEC por su sigla en inglés) es dada por primera vez por S. Shelah en [16] y [17] y corresponde a una generalización de la clase de modelos de una sentencia en una lógica infinitaria con la relación de ser subestructura sobre un fragmento adecuado de la lógica. El concepto de AEC axiomatiza varias propiedades que tiene la clase de modelos de una teoría de primer orden con la relación de ser subestructura elemental, tales como cerradura bajo $\prec$ -cadenas crecientes y continuas, el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, cerraduras bajo isomorfismos, entre otras. Uno de los resultados más importantes de la lógica matemática es el teorema de transferencia de categoricidad de Morley [12] para el cual el teorema de compacidad es una herramienta fundamental pues nos permite tener una versión ascendente del teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski y con ayuda de la ω -estabilidad tener la transferencia de categoricidad. Una pregunta natural es si en una lógica infinitaria $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ se tiene un resultado de transferencia de categoricidad tipo Morley y por tanto puede ser adaptada al contexto de las AECs.

Conjetura 1.1 (Conjetura de categoricidad eventual para AECs de Shelah). Una AEC $\mathcal{K}$ categórica en algún cardinal lo suficientemente grande es categórica en todos los cardinales suficientemente grandes.

Como sabemos que la lógica $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ no satisface compacidad, entonces adaptar el resultado de Morley a este contexto no es posible directamente y habría que buscar otro tipo de técnicas. M. Makkai y S. Shelah en [11] demuestran que en el contexto de las lógicas $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ donde κ es un cardinal fuertemente compacto (esto quiere decir que $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ satisface una versión débil de compacidad) se tiene un resultado de transferencia de categoricidad tipo Morley.

Hecho 1.1 (sumario 5.1 en [11]). Sea κ un cardinal fuertemente compacto y sea ϕ una sentencia en $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$. Si ϕ es categórica en un cardinal suficientemente grande, entonces es categórica en cardinales arbitrariamente grandes.

Para el contexto general de las AECs, R. Grossberg y M. VanDieren en [7] responden parcialmente la conjetura bajo supuestos de categoricidad en un cardinal sucesor y docilidad, una propiedad local sobre tipos de Galois (una generalización de tipo en la teoría de modelos de primer orden).

Hecho 1.2 (corolario 4.3 en [7]). Sea $\mathcal{K}$ una AEC con modelos arbitrariamente grandes, que satisface la propiedad de amalgamación y que es χ -dócil para $\chi \geq LS(\mathcal{K})$. Si $\lambda \geq \max\{\chi, LS(\mathcal{K})^+\}$ y $\mathcal{K}$ es categórica en λ y λ^+ , entonces $\mathcal{K}$ es categórica en todo $\mu \geq \lambda$.

En [2] W. Boney demuestra que la existencia de cardinales fuertemente compactos arbitrariamente altos implica que toda AEC es dócil.

Hecho 1.3 (teorema 4.5 en [2]). Si $\mathcal{K}$ es una AEC y κ un cardinal fuertemente compacto, entonces $\mathcal{K}$ es $(\kappa + LS(\mathcal{K})^+)$ -dócil.

En [23] se muestra que los hechos 1.2 y 1.3 implican que:

Corolario 1.1. *Si existe una clase propia de cardinales fuertemente compactos y $\mathcal{K}$ es una AEC λ y λ^+ -categórica, para λ un cardinal lo suficientemente grande, entonces $\mathcal{K}$ es categórica en todo cardinal $\geq \lambda$.*

La ventaja de suponer categoricidad en un cardinal sucesor en el trabajo de Grossberg y VanDieren, es que sólo trabajamos con modelos de un tamaño fijo como se ve en el argumento del teorema 4.1 en [7], que es el resultado clave para la transferencia de categoricidad. Para dar respuesta completa a la conjetura 1.1, debemos ver qué pasa cuando suponemos categoricidad en un cardinal límite.

Como lo vimos en el corolario 1.1, una repuesta parcial de la conjetura de categoricidad eventual de Shelah utiliza hipótesis conjuntistas fuertes como lo es la existencia de cardinales fuertemente compactos. Esto nos hace pensar que para dar una repuesta completa a la conjetura 1.1 se deberían hacer supuestos conjuntistas fuertes¹, como la existencia de cardinales fuertemente compactos.

En [19], S. Vasey y S. Shelah demostraron la conjetura 1.1 bajo la Hipótesis Generalizada del Continuo Débil (WGCH) que resulta ser consistente con ZFC.

Definición 1.2 (Definición 13.5 en [19], hipótesis generalizada del continuo débil (WGCH)). Sea S una clase propia de cardinales. $WGCH(S)$ si y sólo si para todo $\lambda \in S$ se cumple que $2^\lambda < 2^{\lambda^+}$. Escribiremos $WGCH$ vale si la afirmación se cumple para todos los cardinales.

El concepto fundamental de la prueba realizada por Shelah y Vasey en [19] es el de marco bueno, el cual puede ser entendido como una noción local de superestabilidad. Intuitivamente hablando, diremos que una AEC $\mathcal{K}$ tiene un marco bueno si $\mathcal{K}$ tiene propiedades *buenas* localmente, tales como amalgamación o modelos no maximales, y hay una noción de independencia para tipos de Galois sobre modelos.

Una condición para que una AEC $\mathcal{K}$ tenga un marco bueno, es que los modelos saturados de $\mathcal{K}$ de un tamaño dado formen una AEC. Para ver esto, lo que tiene más trabajo es demostrar que la subclase de los modelos saturados de cierto tamaño, es cerrada bajo sucesiones crecientes y continuas de dichos modelos. Esto último es una de las caracterizaciones de superestabilidad en el contexto de las AECs y por tal motivo, lo que haremos nosotros en el presente trabajo es estudiar el concepto de superestabilidad en el contexto de las Q-AECs para así poder plantear algunas posibles soluciones a los problemas presentados en

¹En agosto de 2019, Christian Espíndola hace una demostración de la conjetura de categoricidad eventual de Shelah, con ayuda de la teoría de topos, para la cual sólo requiere la Hipótesis Generalizada del Continuo (corolario 5.2 en [6]). El resultado de Espíndola aún no ha sido publicado. En comunicaciones recientes entre el autor y Samuel Roldan sobre el trabajo de este último [14], Roldan dice que bajo el supuesto que κ sea fuertemente inaccesible, “hay ciertas teorías infinitarias sobre $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ (relacionadas con filtros en $\mathcal{P}(\kappa)$) para las cuales, si se tiene modelos usuales (i.e. modelos sobre la categoría de conjuntos) entonces se tiene que κ es fuertemente compacto. A la fecha, parece que el resultado de Espíndola (generalización del teorema de Deligne) se puede aplicar a estas teorías, por lo tanto, no solo se usa la hipótesis se usan grandes cardinales”. Roldan resalta que esto no afecta los resultados de Espíndola cuando se trabaja en la lógica $\mathcal{L}_{\kappa^+,\kappa}$.

la transferencia de categoricidad surgidos en [5], donde se introduce el concepto de Q-AEC.

Como lo mencionamos en el párrafo anterior, el objetivo de Nájjar Salinas en [13] son las Q-clases elementales abstractas (Q-AEC por su sigla en inglés) y aproximaciones del concepto de superestabilidad en este contexto. Para hacer esto, él utiliza la teoría de la superestabilidad existente en el contexto de las AECs y adapta los resultados en esta materia al objeto de estudio. Así obtiene las bases de los resultados de transferencia de categoricidad de R. Grossberg y M. VanDieren en [7] y S. Shelah y S. Vasey en [19].

2. Resultados centrales en Q-AECs

El concepto de Q-AEC es una variación al concepto de AEC que corresponde a una generalización natural para la clase de modelos de una sentencia en una lógica $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}(Q)$, donde Q es el cuantificador “existen no contables tales que”. Notemos que si una estructura $\mathcal{M}$ satisface la sentencia $\neg Qx\varphi(x)$, entonces en el universo de $\mathcal{M}$ hay a lo sumo contables testigos para la fórmula $\varphi(x)$ y que si la estructura $\mathcal{N}$ satisface la sentencia $Qx\varphi(x)$, entonces en el universo de $\mathcal{N}$ deben haber no contables testigos de $\varphi(x)$; esto hace que los conjuntos *pequeños* o a lo sumo contables y los conjuntos *grandes* o no contables sean indispensables en el estudio de sentencias de la lógica $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}(Q)$.

Dicho concepto es introducido por A. Coppola en [5] basándose en [15] y la diferencia esencial con el concepto de AEC está en que en una AEC trabajamos con una relación de orden parcial mientras que en una Q-AEC trabajamos con dos relaciones: un orden parcial, que no deja crecer los conjuntos *pequeños* de una estructura a otra, y otra que simplemente es transitiva, que hace que los conjuntos *grandes* crezcan de una estructura a otra. Notemos que si trabajamos sólo con la relación de orden parcial, no podríamos saber que es lo que sucede con los conjuntos grandes de un modelo a otro y podría suceder que un modelo crea que un conjunto contable sea no contable, esto hace la necesario definir la relación fuerte de tal manera que garantice que los conjuntos grandes crezcan.

En su trabajo, A. Coppola hace un estudio de las Q-AECs motivado principalmente en el hecho que una AEC no puede *capturar* la clase de modelos de sentencias de una lógica que tenga *cuantificadores cardinales* sin utilizar una relación *artificial* de submodelo. Para ello, él introduce dos nociones de submodelo (una refinando a la otra) que resultan ser naturales en el sentido discutido en el párrafo anterior.

El estudio realizado por A. Coppola en [5], que es similar al hecho por Nájjar Salinas en [13], consiste en adaptar varios de los conceptos que se estudian en el contexto de las AECs y así obtener las herramientas en el contexto de las Q-AECs necesarias para demostrar un teorema de transferencia de categoricidad al estilo del resultado de R. Grossberg y M. VanDieren (véase [7] corolario 0.2) en el contexto de las Q-AECs. La adaptación de dichos conceptos fue hecha por Coppola en su tesis doctoral y salvo algunas imprecisiones que se aclararan

en [13], dicha adaptación no tiene problemas. En cambio, el acondicionamiento del argumento de transferencia de categoricidad presentado en [7] sí tiene problemas.

En [7] el concepto principal para la construcción que realizan Grossberg y VanDieren es el de *tipo minimal* (definición 2.1 en [7]); este concepto nos dice que dados una estructura $\mathcal{M}$ de una AEC $\mathcal{K}$ y un tipo de Galois p no algebraico sobre $\mathcal{M}$, esto quiere decir que no tiene realizaciones en $\mathcal{M}$, entonces p tiene una única extensión no algebraica a toda superestructura $\mathcal{M}'$ tal que $|M'| = |M|$. Después de definir el concepto de tipo minimal, Grossberg y VanDieren enuncian y demuestran algunas propiedades de esta clase especial de tipos para luego demostrar un resultado de transferencia de pares de Vaught para tipos minimales (teorema 3.3 en [7]) que resulta ser indispensable al momento de demostrar la transferencia de categoricidad. El concepto de par de Vaught (definición 3.1 en [7]) nos dice que para un tipo p sobre estructura dada $\mathcal{M}$, existen dos estructuras $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ que extienden a $\mathcal{M}$ de tal manera que no hay nuevas realizaciones de p entre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ si $\mathcal{M}_2$ extiende propiamente a $\mathcal{M}_1$. En la demostración del resultado de transferencia de pares de Vaught, es importante el hecho que bajo categoricidad no hay pares de Vaught (hecho 3.2 [7]) y es acá donde Coppola encuentra problemas.

En la primera sección del primer capítulo de [13], se muestra que una de las principales diferencias entre el concepto de AEC y el de Q-AEC es que en el primero tenemos sólo una manera de extender estructuras mientras que en el segundo hay dos, de manera débil y fuerte; esto último hace necesario definir los conceptos de par de Vaught débil y fuerte (definición 3.4.1 en [5]) en el contexto de las Q-AECs. Es acá donde se presenta la mayor dificultad pues para tener un resultado de transferencia de categoricidad al estilo de Grossberg-VanDieren, se necesita que no existan pares fuertes de Vaught y Coppola solamente logra demostrar que no existen pares débiles de Vaught (lema 3.4.7 en [5]). Para solucionar esto, Coppola propone en las páginas 88 y 89 de [5] tres supuestos adicionales (no demostrados).

Condición 2.1 (condición 1 en [5]). Si no existen pares fuertes de Vaught, entonces no existen pares débiles de Vaught.

Condición 2.2 (condición 2 en [5]). Se pueden encontrar, ad hoc, tipos minimales sin pares fuertes de Vaught.

Condición 2.3 (condición 3 en [5]). Para toda estructura $\mathcal{M}$ en una Q-AEC $\mathcal{K}$, existe una superestructura fuerte $\mathcal{N}$ con el mismo tamaño de $\mathcal{M}$ con una cierta propiedad “b”. Además, si α es un ordinal y $\langle \mathcal{M}_i \rangle_{i < \alpha}$ y $\langle \mathcal{N}_i \rangle_{i < \alpha}$ son dos sucesiones fuertes crecientes y continuas en $\mathcal{K}$, si $\mathcal{M}_i$ es una subestructura fuerte de $\mathcal{N}_i$ y $\mathcal{N}_i$ tiene la propiedad “b” para todo $i < \alpha$, entonces $\bigcup_{i < \alpha} \mathcal{N}_i$ es una extensión fuerte de $\bigcup_{i < \alpha} \mathcal{M}_i$.

Coppola propone en las páginas 88 y 89 de [5] que la propiedad “b” de la condición 2.3 sea la universalidad, una saturación relativa a una subestructura,

y es esto lo que nos lleva a preguntarnos si la unión de cadenas de modelos saturados es también un modelo saturado. Esto último es lo que motiva a Nájjar Salinas a estudiar el concepto de superestabilidad en Q-AECs pues en primer orden esto es equivalente a que una teoría contable de primer orden sea superestable. También en el caso de una teoría contable, tenemos que la superestabilidad se sigue de la categoricidad en $\lambda \geq \aleph_1$.

En el contexto de las AECs la noción de superestabilidad podría ser definida, a priori, de diferentes maneras tales como: la unión de una cadena creciente de modelos saturados es saturada (capítulo 15 en [1], [22]), unicidad de modelos límite ([21], [8]) y existencia de marcos buenos ([25]). Durante mucho tiempo no fue claro si estas nociones eran equivalentes hasta que en [26] y [9] Vasey y Grossberg demuestran que (bajo hipótesis débiles) estas aproximaciones de superestabilidad resultan ser equivalentes. Las tres equivalencias de superestabilidad anteriormente mencionadas son consecuencia del Teorema de Shelah-Villaveces (teorema 2.2.1 en [20]) en el contexto de las AECs.

El principal objetivo Nájjar Salinas en [13] es estudiar una aproximación adecuada de superestabilidad en el contexto de las Q-AECs y para ello él sigue el trabajo que S. Vasey presenta en los capítulos 7, 9, 13 y 20 de su tesis doctoral ([25]) donde hace una descripción detallada de la superestabilidad en el contexto de las AECs y estudia todas las nociones conocidas de superestabilidad en dicho contexto; entre ellas la saturación de la unión de cadenas crecientes de modelos saturados.

En el primer capítulo de [13], se realizan adaptaciones de los conceptos básicos del contexto de las AECs que son necesarios para el estudio de la superestabilidad. Nájjar Salinas hace un estudio minucioso de los resultados básicos que utilizará a lo largo de su trabajo. Una de esas nociones que es adaptada por Coppola y estudiada por Nájjar Salinas es la de tipo *orbital* o tipo de Galois, y para ser más preciso en algunos argumentos, Nájjar Salinas introduce la noción de tipo de Galois como la clase de equivalencia de triplas en la sección 1.3 de [13]. En este capítulo también introducimos el concepto de saturación, clave en la aproximación a superestabilidad que trabajaremos en el capítulo cuatro, y los modelos de Ehrenfeucht-Mostowski, fundamentales en la demostración del teorema de Shelah-Villaveces (teorema 3.2.23 de [13]).

El objeto de estudio del segundo capítulo de [13] es la estabilidad y la docilidad; estos conceptos también son estudiados por Coppola en [5]. En este capítulo también se introduce el concepto de modelo límite en el contexto de las Q-AECs y se adapta el resultado de Boney (hecho 1.3) a las Q-AECs tomándolas como ejemplos de categorías accesibles (véase [10]).

En el capítulo tres Nájjar Salinas desarrolla las herramientas necesarias para adaptar el resultado principal de la superestabilidad en AECs al contexto de las Q-AECs: el teorema de Shelah-Villaveces. Este teorema nos dice, de manera intuitiva, que si tenemos un tipo de Galois sobre la unión de una cadena creciente de modelos, entonces todos los cambios de información (la ruptura) que pueda tener dicho tipo sobre submodelos de dicha unión están atestiguados por algún nivel de la cadena. Él comienza con el concepto de ruptura el cual,

intuitivamente hablando, nos dice cuándo un tipo de Galois sobre un modelo dado tiene cambios *fuertes* sobre submodelos del modelo dado. En la sección 3.2 Nájjar Salinas hace una adaptación minuciosa del teorema de Shelah-Villaveces que está basada el capítulo 2 de [20], en [3] y en [4]. Es importante resaltar que este teorema es la piedra angular de la aproximación de superestabilidad que es trabajada en [13] pues de este teorema se deduce la noción de superestabilidad trabajada de la categoricidad.

En el cuarto y último capítulo capítulo Nájjar Salinas adapta una definición de superestabilidad dada por Vasey en [24], la cual nos dice que localmente la clase tiene propiedades *buenas* como amalgamación, inmersiones conjuntas y que la relación de no ruptura satisface el teorema de Shelah-Villaveces, y concluye que esta propiedad se deduce de la λ -categoricidad para Q-AEC. Después de esto, él continúa su trabajo viendo que la noción de superestabilidad trabajada implica que la unión de modelos saturados es una estructura saturada de manera similar a lo hecho por Baldwin en el capítulo 15 de [1] y en la sección 6 de [18].

Como se ve a lo largo de la tesis doctoral de Vasey [25], el Teorema de Shelah-Villaveces es la piedra angular del concepto de superestabilidad en AECs; esto invita a pensar que en el contexto de las Q-AECs sería natural adaptar las definiciones de superestabilidad no tratadas por Nájjar Salinas en [13] pues él muestra que el teorema se puede adaptar a este contexto y además muestra que, bajo categoricidad, se tiene una de las nociones equivalentes de superestabilidad: la saturación de la unión de una cadena de estructuras saturadas.

Referencias

- [1] John T Baldwin, *Categoricity*, vol. 50, American Mathematical Soc., 2009.
- [2] Will Boney, *Tameness from large cardinal axioms*, The Journal of Symbolic Logic **79** (2014), no. 4, 1092–1119.
- [3] Will Boney, Rami Grossberg, Monica M VanDieren, and Sebastien Vasey, *Superstability from categoricity in abstract elementary classes*, Annals of Pure and Applied Logic **168** (2017), no. 7, 1383–1395.
- [4] Will Boney, Monica M VanDieren, and Sebastien Vasey, *Shelah-villaveces revisited*, arXiv preprint arXiv:1611.05292 (2016).
- [5] Andrew H Coppola, *The theory of q-abstract elementary classes*, Ph.D. thesis, University of Illinois at Chicago, 2006.
- [6] Christian Espíndola, *A topos-theoretic proof of shelah's eventual categoricity conjecture for abstract elementary classes*, arXiv preprint arXiv:1906.09169 (2019).

- [7] Rami Grossberg and Monica VanDieren, *Shelah's categoricity conjecture from a successor for tame abstract elementary classes*, Journal of Symbolic Logic (2006), 553–568.
- [8] Rami Grossberg, Monica VanDieren, and Andrés Villaveces, *Uniqueness of limit models in classes with amalgamation*, Mathematical Logic Quarterly **62** (2016), no. 4-5, 367–382.
- [9] Rami Grossberg and Sebastien Vasey, *Equivalent definitions of superstability in tame abstract elementary classes*, The Journal of Symbolic Logic **82** (2017), no. 4, 1387–1408.
- [10] Michael Lieberman and Jirí Rosický, *Classification theory for accessible categories*, The Journal of Symbolic Logic **81** (2016), no. 1, 151–165.
- [11] Michael Makkai and Saharon Shelah, *Categoricity of theories in $L_{\kappa\omega}$, with κ a compact cardinal*, Annals of Pure and Applied Logic **47** (1990), no. 1, 41–97.
- [12] Michael Morley, *Categoricity in power*, Mathematical Logic In The 20th Century, World Scientific, 2003, pp. 274–298.
- [13] José Nicolás Nájjar Salinas, *Sobre la superestabilidad en q -clases elementales abstractas*, Trabajo final de maestría, Universidad Nacional de Colombia, 2020 <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/77951>.
- [14] Samuel Roldan, *Around infinitary categorical logic (work in progress)*, 2023.
- [15] Saharon Shelah, *Categoricity in $\aleph_1$ of sentences in $L_{\omega_1, \omega}(q)$* , Israel Journal of Mathematics **20** (1975), no. 2, 127–148.
- [16] ———, *Classification of non elementary classes in abstract elementary classes*, Classification theory, Springer, 1987, pp. 419–497.
- [17] ———, *Universal classes*, Classification theory, Springer, 1987, pp. 264–418.
- [18] ———, *Categoricity for abstract classes with amalgamation*, Annals of Pure and Applied Logic **98** (1999), no. 1-3, 261–294.
- [19] Saharon Shelah and Sebastien Vasey, *Categoricity and multidimensional diagrams*, (2018).
- [20] Saharon Shelah and Andrés Villaveces, *Toward categoricity for classes with no maximal models*, Annals of Pure and Applied Logic **97** (1999), no. 1-3, 1–25.
- [21] Monica VanDieren, *Categoricity in abstract elementary classes with no maximal models*, Annals of Pure and Applied Logic **141** (2006), no. 1-2, 108–147.

- [22] Monica M VanDieren, *Symmetry and the union of saturated models in superstable abstract elementary classes*, Annals of Pure and Applied Logic **167** (2016), no. 4, 395–407.
- [23] Sebastien Vasey, *Downward categoricity from a successor inside a good frame*, Annals of Pure and Applied Logic **168** (2017), no. 3, 651–692.
- [24] ———, *Saturation and solvability in abstract elementary classes with amalgamation*, Archive for Mathematical Logic **56** (2017), no. 5-6, 671–690.
- [25] ———, *Superstability and categoricity in abstract elementary classes*, Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University, 2017.
- [26] ———, *Toward a stability theory of tame abstract elementary classes*, Journal of mathematical logic **18** (2018), no. 02, 1850009.