Independencia del Problema de Whitehead para Algebristas

Independence of Whitehead's Problem for Algebraists

Diego A. Mejía[1,a], **Carlos M. Parra-Londoño**[2,b]

Resumen. Basados en el trabajo de P. Eklof [4], ofrecemos una prueba completa de la independencia del Problema de Whitehead para grupos abelianos de cardinalidad arbitaria. Dicha demostración fue establecida originalmente por S. Shelah [16, 17] como consecuencia de su famoso Teorema de Compacidad para álgebras universales. Como parte de este trabajo proponemos, basados en [5], una prueba simplificada del Teorema de Compacidad de Shelah para grupos abelianos.

Palabras claves: grupo libre, grupo de Whitehead, subgrupo puro, principios de diamante, axioma de Martin.

Abstract. Supported on P. Eklof's work [4], we present a complete proof of the independence of Whitehead's Problem for abelian groups of arbitrary cardinality. Such proof was established by S. Shelah [16, 17] as a consequence of his famous Compactness Theorem for universal algebras. As a part of this paper we propose, based on [5], a simplified proof of Shelah's Compactness Theorem for abelian groups.

Keywords: free group, Whitehead group, pure subgroup, diamond principles, Martin's axiom.

Mathematics Subject Classification: 03E75, 20K20, 03E35, 03E50.

Recibido: marzo de 2023 Aceptado: febrero de 2024

1. Introducción

En este trabajo entendemos que una afirmación es *consistente* cuando esta no introduce contradicciones en ZFC (la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección, el formalismo donde está fundamentada toda la matemática moderna). También decimos que una afirmación es *independiente* cuando ella y su negación son consistentes con ZFC. Lo anterior

[1]Creative Science Course (Mathematics), Faculty of Science, Shizuoka University, Ohya 836, Suruga-ku, Shizuoka 422–8529, Shizuoka, Japan
[2]Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, Calle 59A 63-20, Medellín, Colombia
[a]diego.mejia@shizuoka.ac.jp
[b]cmparra@unal.edu.co

indica que una afirmación es independiente si, y solo si, no se puede demostrar ni refutar en ZFC cuando ZFC es consistente. Cabe aclarar, además, que *cualquier consecuencia de una afirmación (relativamente) consistente también es consistente.*

En los años cincuenta del siglo pasado, J. Whitehead conjeturó que todo grupo abeliano G es libre si, y solo si, $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Z}) = 0$ (ver e.g. [7, Prob. 79, pg. 184]). Esta afirmación se conoce como el *Problema de Whitehead*, el cual es cierto para grupos contables (Stein [19]). Es bien sabido que S. Shelah probó en 1974 (ver [16]) la independecia de este problema para grupos de cardinalidad $\aleph_1$ (el primer cardinal no contable), lo cual se puede generalizar, por inducción sobre $n > 0$, para grupos de cardinalidad $\aleph_n$. Pero pasar a probar la consistencia de dicho problema para grupos de cardinalidad $\aleph_\omega$ (el primer cardinal singular) involucraba nuevas ideas. El germen de dichas ideas es el siguiente resultado de P. Hill [8]: *"todo grupo abeliano libre de torsión de cardinalidad no contable con cofinalidad ω, cuyos subgrupos de cardinalidad menor son libres, es libre".* En 1975, Shelah [17] generalizó este resultado para ágebras universales *"libres"* (noción definida axiomáticamente). Este resultado se conoce como el *Teorema de Compacidad de Shelah*, el cual, junto con las técnicas dadas en [16], implica la consistencia del Problema de Whitehead para grupos abelianos de cardinalidad arbitraria.

La prueba del Teorema de Compacidad de Shelah es bastante técnica y compleja, e involucra nociones de Teoría de Modelos y ágebras universales. En búsqueda de una prueba autocontenida, P. Eklof [5] propuso una forma del Teorema de Shelah para módulos que reduce las nociones de Teoría de Modelos, pero que conserva la noción axiomática de "libre".

Por otra parte, en 1976, Eklof simplificó la prueba de Shelah de la independencia del Problema de Whitehead para grupos de cardinalidad $\aleph_1$ (ver [4]).

Para los fines de este artículo, generalizamos la prueba de Eklof en [4] para grupos de cardinalidad regular no contable, damos una prueba autocontenida, más simple que la de Eklof, del Teorema de Compacidad de Shelah para grupos abelianos bajo la noción usual de "libre" y, como consecuencia de ambos resultados, concluimos con una prueba completa de la consistencia del Problema de Whitehead. Adicionalmente, por completud, resumimos la parte final de [4] donde se prueba la consistencia de la negación del Problema de Whitehead, y comentamos algunos trabajos recientes que están relacionados.

2. Notación y definiciones en Teoría de Grupos Abelianos

El propósito de esta sección es introducir la notación algebraica. A lo largo del texto, todo grupo se considera abeliano. Los detalles sobre las nociones básicas se pueden encontrar en [6, 9, 15].

Un grupo F se llama *libre con base X* si todo elemento de F se puede escribir como una única combinación lineal de elementos de X con coeficientes de $\mathbb{Z}$. Todas las bases de un grupo libre F tienen el mismo cardinal, el cual se denomina *rango de* F. Por otra parte, decimos que un grupo es *libre de torsión* si no tiene elementos no nulos de orden finito. Así todo grupo libre es libre de torsión y, para un recíproco, es conocido el resultado que dice que *todo grupo libre de torsión, finitamente generado, es un grupo libre de rango finito.* También se sabe que todo subgrupo de un grupo libre es también libre. Dado un subconjunto S de un grupo G dado, denotamos por $\langle S\rangle$ al subgrupo generado por S; decimos que un subgrupo A de G es *puro* si, dado $s \in A$, toda ecuación del tipo $nx = s$ con $n \in \mathbb{Z}$, si tiene solución en G, entonces tiene solución en A. Es claro que si G es libre de torsión, entonces A es subgrupo puro de G si, y solo si, G/A es libre de torsión.

Para enunciar el Problema de Whitehead consideramos la siguiente notación. Un homomorfismo sobreyectivo $\pi\colon B \to C$ *se parte* cuando existe un homomorfismo $\rho\colon C \to B$ tal que $\pi\rho = 1_C$ (el homomorfismo identidad en C). En este caso decimos que ρ *es un homomorfismo transversal de* π. Del mismo modo, decimos que la sucesión exacta $0 \to A \to B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ *se parte* cuando el homomorfismo π se parte. De otro lado, para G y K grupos, denotamos por $\mathrm{Hom}(G,K)$ al grupo de homomorfismos de G en K. Ahora, dado cualquier grupo C se sabe que existe una sucesión exacta $0 \to R \xrightarrow{\mu} F \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$ donde F es libre (ver e.g. [15, Cor. 10.19]), de la cual se puede formar una sucesión exacta $0 \to \mathrm{Hom}(C,G) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}(F,G) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}(R,G)$, y así se define $\mathrm{Ext}(C,G) = \mathrm{Hom}(R,G)/\mu^*[\mathrm{Hom}(F,G)]$ ([15, Thm. 11.6]). Esta definición es independiente de la sucesión exacta que se tome (con F libre). No entramos en detalle sobre este planteamiento, pues solo nos interesa el caso en que $\mathrm{Ext}(C,G) = 0$.

Lema 2.1 (Ver e.g. [9, Pg. 93])**.**

(a) *Para dos grupos abelianos A y C,* $\mathrm{Ext}(C,A) = 0$ *si, y solo si, toda sucesión exacta de la forma* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *se parte.*

(b) *Un grupo F es libre si, y solo si,* $\mathrm{Ext}(F,G) = 0$ *para todo grupo abeliano G.*

El functor Ext permite definir los grupos de Whitehead:

Definición 2.2. Un grupo W es un *W-grupo* (o *grupo de Whitehead*) si $\mathrm{Ext}(W,\mathbb{Z}) = 0$.

Claramente se sigue:

Lema 2.3. *Todo grupo libre es un W-grupo.*

Los W-grupos cumplen las siguientes propiedades.

Lema 2.4 (Ver e.g. [4, Sec. 3])**.**

(a) *Todo subgrupo de un W-grupo es un W-grupo.*

(b) *Todo W-grupo es libre de torsión.*

Corolario 2.5. *Todo W-grupo finitamente generado es libre.*

Teorema 2.6 (Stein [19], ver e.g. [4, Thm. 4.1])**.** *Todo W-grupo contable es libre.*

El anterior resultado motiva el *Problema de Whitehead: ¿Es todo W-grupo libre?* Nos permitimos fijar la siguiente notación:

(WP) Todo W-grupo es libre.

En el trabajo de Shelah, la independencia de WP con ZFC se sigue al probar que esta afirmación es consecuencia del denominado Axioma de Constructibilidad $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ y, que su negación, es consecuencia del Axioma de Martin (MA) junto con la negación de la Hipótesis del Continuo. Estos axiomas son consistentes con la Teoría de Conjuntos ZFC. Ver la Sección 3 y Sección 8 para más detalles sobre estos axiomas.

Concluimos esta sección con las siguientes herramientas tomadas de [4].

Definición 2.7 ([4, Pg. 780])**.** Sea B un grupo arbitrario. Un grupo $\langle C, +\rangle$ con $C = B \times \mathbb{Z}$ (donde $+$ no es necesariamente la suma componente a componente) es un $(B, \mathbb{Z})$*-grupo* si cumple

(i) $(0, m) + (0, n) = (0, m + n)$ para $m, n \in \mathbb{Z}$. (Esto implica que $0 \oplus \mathbb{Z}$ es subgrupo de C, por lo cual $(0, 0)$ es el neutro de C).

(ii) La proyección canónica $\rho_1^C : C \to B$ es un homomorfismo (Aquí $\ker \rho_1 = 0 \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$).

Como ejemplo, tenemos que $B \oplus \mathbb{Z}$ es un $(B, \mathbb{Z})$-grupo.

Con la notación ρ_1, ρ_2 y $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2$ (con superíndices para diferenciarlos respecto a los conjuntos a los que apliquen) nos referiremos a las respectivas *proyecciones y embebimientos canónicos* entre un producto cartesiano y sus dos componentes.

Teorema 2.8 ([4, Lem. 4.3], ver también [13, Tma. 1.3.7])**.** *Sea B_1 un W-grupo, B_0 un subgrupo de B_1 tal que B_1/B_0 <u>no</u> es un W-grupo, y sea C_0 un $(B_0, \mathbb{Z})$-grupo con $\theta : B_0 \to C_0$ un homomorfismo transversal de $\rho_1^{C_0} : C_0 \to B_0$. Entonces existe un $(B_1, \mathbb{Z})$-grupo C_1 que contiene a C_0 como subgrupo y tal que θ <u>no</u> se extiende a un homomorfismo transversal de $\rho_1^{C_1} : C_1 \to B_1$.*

3. Notación y definiciones en Teoría de Conjuntos

A continuación, introducimos algunas nociones básicas de Teoría de Conjuntos (ver, por ejemplo, [12, 11]). Un conjunto x es *transitivo* si $y \subseteq x$ para todo $y \in x$, y un conjunto α es un *ordinal* si es transitivo y bien ordenado por la relación $\in$. Si denotamos por $\mathbf{ON}$ a la clase de los ordinales, entonces la relación $\in$ es un buen orden para dicha clase, el cual denotaremos también por $<$. Por lo tanto, todo ordinal α tiene la forma $\alpha = \{\xi \in \mathbf{ON} : \xi < \alpha\}$. Los ordinales se clasifican en $0 = \varnothing$, que es el primer ordinal, en *ordinales sucesor*, los cuales son de la forma $\beta+1 := \beta \cup \{\beta\}$ para algún ordinal β, y a los restantes se les llama *ordinales límite*, los cuales representan puntos de acumulación de ordinales. Entre los primeros ordinales figuran los números naturales $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ y el conjunto ω de los números naturales, el cual es el primer ordinal límite. Luego siguen $\omega + 1,\ \omega + 2,\ \ldots\ \omega + \omega = \omega 2,\ \omega 2 + 1,\ \ldots\ \omega 3,\ \ldots\ \omega n,\ \ldots\ldots\ \omega\omega = \omega^2,\ \ldots\ldots\ \omega^3,\ \ldots\ldots\ \omega^n,\ \ldots\ldots\ldots \omega^\omega,\ \omega^\omega + 1, \ldots$

Un cardinal está definido como los ordinales que no son equipotentes a los ordinales menores que él. Por lo tanto, los cardinales están bien ordenados. Así $\omega = \aleph_0$ es el primer cardinal infinito. Dado un ordinal α denotamos por α^+ al *menor cardinal mayor que* α. De este modo, $\omega_1 = \aleph_1 = \omega^+$ es el menor cardinal no contable. Dado un cardinal $\kappa > \omega$, este es un *cardinal sucesor* si $\kappa = \eta^+$ para algún ordinal η, o de lo contrario lo llamamos *cardinal límite*. Con esta notación, el cardinal de los números reales queda denotado por $2^{\aleph_0}$ y la conocida *Hipótesis del Continuo* toma la siguiente forma:

(CH) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Para los números cardinales también tenemos una clasificación respecto a la noción de *cofinalidad*: para un ordinal límite γ denotamos por $\mathrm{cf}(\gamma)$ la *cofinalidad de* γ, la cual es el menor ordinal (cardinal) α tal que existe una sucesión $\{\gamma_\xi\}_{\xi<\alpha}$, de ordinales menores que γ, con supremo igual a γ. Decimos que γ es un *ordinal singular* si $\mathrm{cf}(\gamma) < \gamma$, de lo contrario, decimos que γ es *regular*. En este último caso se tiene que $\mathrm{cf}(\gamma) = \gamma$, lo cual indica que *todo ordinal regular es un cardinal*. Tanto ω como todos los cardinales sucesores son cardinales regulares. Por lo tanto, todo cardinal singular tiene que ser un cardinal límite. Por ejemplo, $\aleph_\omega = \sup_{n\in\omega}\{\aleph_n\}$ es el primer cardinal singular, pues $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$. El siguiente enunciado es una caracterización útil de los cardinales regulares.

Teorema 3.1. *Sea κ un cardinal infinito. Entonces κ es regular si y solo si, para cualquier sucesión $\{X_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ de conjuntos de cardinalidad $<\kappa$, con $\gamma < \kappa$, se cumple que $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ tiene cardinalidad $<\kappa$.*

Dado un ordinal γ, decimos que $C \subseteq \gamma$ es *cerrado en* γ si, dado un ordinal límite $\beta < \gamma$ tal que $\beta \cap C$ es no acotado en β, entonces $\beta \in C$. Si además C es no acotado en γ, decimos que C es un *cub en* γ (*closed unbounded*: cerrado no acotado). Por otra parte, $E \subseteq \gamma$ es un *conjunto estacionario* en γ si intersecta a todos los cubs en γ.

Denotamos por $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ al conocido *Axioma de Constructibilidad*. Este axioma fue propuesto por K. Gödel en los años 30 para demostrar la consistencia del Axioma de Elección y la Hipótesis del Continuo con la Teoría de Conjuntos ZF. Primero, demostró que $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ es consistente con ZF y, luego, que estas afirmaciones eran consecuencias de $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. Del mismo modo, probamos que el Problema de Whitehead es una consecuencia de $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ y, por la consistencia de este axioma, concluímos que WP es consistente con ZFC.

No entramos en detalles sobre el significado de $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ sino en las siguientes consecuencias, conocidas como los *principios diamante*.

Teorema 3.2 (R. Jensen, ver [2, Pg. 138–140], [13, Tma. 2.3.15])**.** *Bajo* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$*, para cualquier cardinal regular κ no contable y $E \subseteq \kappa$ estacionario, se cumple la siguiente afirmación:*

$\diamondsuit_\kappa(E)$ *Existe una sucesión de conjuntos $\{S_\alpha\}_{\alpha\in E}$ tal que*

(i) *$S_\alpha \subseteq \alpha$ para todo $\alpha \in E$.*

(ii) *Dado $X \subseteq \kappa$, el conjunto $\{\alpha \in E : X \cap \alpha = S_\alpha\}$ es estacionario en κ.*

Dado un ordinal γ decimos que una *sucesión de conjuntos* $\{A_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ *es continua* si es creciente respecto a la contención y $A_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} A_\alpha$ para cualquier ordinal límite $\delta < \gamma$. Con esta notación, el resultado anterior queda generalizado de la siguiente forma (para una prueba detallada, ver [13, Cor. 2.3.16]).

Corolario 3.3. *Supongamos* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$*. Sea $\kappa > \omega$ regular, $E \subseteq \kappa$ un conjunto estacionario y sea C la unión de $\{C_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, una sucesión estrictamente creciente y continua, tal que $|C_\alpha| < \kappa$ para todo $\alpha < \kappa$. Entonces existe una sucesión de conjuntos $\{S_\alpha\}_{\alpha\in E}$ tal que*

(i) *$S_\alpha \subseteq C_\alpha$ para todo $\alpha \in E$.*

(ii) *Dado $X \subseteq C$ el conjunto $\{\alpha \in E : X \cap C_\alpha = S_\alpha\}$ es estacionario en κ.*

El siguiente corolario es una generalización del resultado correspondiente a $\kappa = \omega_1$, el cual aparece en [4, Cor. 6.2] como un preliminar de la consistencia de WP para grupos de tamaño $\aleph_1$.

Corolario 3.4. *Supongamos* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$*. Sea $\kappa > \omega$ regular, $E \subseteq \kappa$ un conjunto estacionario, B la unión de una sucesión $\{B_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ estrictamente creciente y continua, tal que $|B_\alpha| < \kappa$ para todo $\alpha < \kappa$, y sea Y un conjunto <u>no vacío</u> tal que $|Y| < \kappa$. Entonces existe una sucesión $\{g_\alpha\}_{\alpha\in E}$ que satisface*

(i) *$g_\alpha \colon B_\alpha \to B_\alpha \times Y$ para $\alpha \in E$.*

(ii) *Si $h \colon B \to B \times Y$ tal que $h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times Y$ para todo $\alpha < \kappa$, entonces existe un $\upsilon \in E$ tal que $h\restriction B_\upsilon = g_\upsilon$.*

Demostración. Haciendo $C_\alpha = B_\alpha \times (B_\alpha \times Y)$ para $\alpha < \kappa$, y $C = B \times (B \times Y)$, entonces $\{C_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una sucesión estrictamente creciente y continua de conjuntos de cardinalidad menor que κ, tal que su unión es C. Luego, existe una sucesión de conjuntos $\{S_\alpha\}_{\alpha\in E}$ que satisface (i) y (ii) del Corolario 3.3. Puesto que $S_\alpha \subseteq B_\alpha \times (B_\alpha \times Y)$ para $\alpha \in E$, definimos $g_\alpha := S_\alpha$ si S_α es una función con dominio B_α, o en el caso contrario g_α puede ser cualquier función de B_α en $B_\alpha \times Y$. Claramente se satisface (i). Ahora, si h es como en (ii), al ser subconjunto de C tenemos, por el Corolario 3.3, que

$$T_h = \{\alpha \in E : h \cap (B_\alpha \times (B_\alpha \times Y)) = S_\alpha\} = \{\alpha \in E : h{\restriction}B_\alpha = S_\alpha\}$$

es estacionario en κ, por lo cual es no vacío y de cardinalidad κ. Puesto que para cualquier $\upsilon \in T_h$ se tiene $S_\upsilon = g_\upsilon$, tenemos que $h{\restriction}B_\upsilon = g_\upsilon$. □

4. Variaciones de libertad

Para generalizar el Teorema 2.6 (bajo $\mathbf{V} = \mathbf{L}$) para W-grupos de cardinalidad arbitraria, extendemos a continuación las nociones de grupo libre de torsión y de subgrupo puro, las cuales aparecen en [4, Sec. 5] para $\kappa = \aleph_1$.

Definición 4.1. Sea κ un cardinal infinito.

(1) Cuando $\kappa > \aleph_0$, decimos que un grupo G es *κ-libre* si todo subgrupo de G de cardinalidad $<\kappa$ es libre. También decimos que G es *$\aleph_0$-libre* si es libre de torsión.[1]

(2) Para un grupo κ-libre A decimos que un subgrupo B *es κ-puro* si A/B es κ-libre.[2]

Directamente del Lema 2.4 y del Teorema 2.6, se sigue:

Teorema 4.2. *Todo W-grupo es $\aleph_1$-libre.*

Es claro que, si $\kappa < \lambda$ son cardinales infinitos, entonces todo grupo libre es λ-libre y todo grupo λ-libre es κ-libre. También, dado un grupo λ-libre G, todo sumando directo de G es un subgrupo λ-puro y todo subgrupo λ-puro es κ-puro. Lo anterior implica que un grupo es libre si, y solo si, es κ-libre para cualquier cardinal infinito κ y, para un grupo libre F, un subgrupo de F es sumando directo si, y solo si, es κ-puro para cualquier cardinal infinito κ.

Lema 4.3. *Dado un cardinal infinito κ:*[3]

(a) *Todo subgrupo de un grupo κ-libre también es κ-libre.*

(b) *Si A_1 y A_2 son grupos κ-libres, entonces $A_1 \oplus A_2$ es κ-libre.*

(c) *Sea B subgrupo de A. Si B y A/B son κ-libres, entonces A es κ-libre.*

[1] Para $\kappa \geq \aleph_0$ esta definición equivale a que todo subgrupo generado por $<\kappa$ elementos es libre.

[2] En general, para cualquier grupo abeliano A, un subgrupo B se define como κ-puro si, dado un subgrupo C de A que contiene a B tal que $|C/B| < \kappa$, se tiene que B es sumando directo de C (aquí $\aleph_0$-puro equivale a puro). Se sigue directamente de las definiciones que ambas nociones de κ-pureza equivalen para grupos κ-libres.

[3] Este resultado también se cumple al cambiar la palabra "κ-libre" por "libre", y "κ-puro" por "sumando directo". Su prueba se sigue directamente del Lema 4.3.

(d) *Sea G un grupo κ-libre. Si B es subgrupo κ-puro de G y C es subgrupo κ-puro de B, entonces C es un grupo κ-puro de G.*

Demostración. La propiedad (a) es inmediata. El ítem (b) para $\kappa = \aleph_0$ es inmediato; cuando $\kappa > \aleph_0$ y C es un subgrupo de $A_1 \oplus A_2$ de cardinalidad $<\kappa$, se pueden encontrar dos conjuntos $S_1 \subseteq A_1$ y $S_2 \subseteq A_2$ de cardinalidad $<\kappa$ tal que $C \subseteq \langle S_1 \times S_2 \rangle$. Claramente $\langle S_1 \times S_2 \rangle \subseteq \langle S_1 \rangle \oplus \langle S_2 \rangle$, $|\langle S_1 \rangle| < \kappa$ y $|\langle S_2 \rangle| < \kappa$, por lo cual $\langle S_1 \rangle$ y $\langle S_2 \rangle$ son libres y, por lo tanto, $\langle S_1 \rangle \oplus \langle S_2 \rangle$ es libre. Luego, C es libre.

(c): Sea D un subgrupo de A tal que $|D| < \kappa$ (o finitamente generado cuando $\kappa = \aleph_0$). Como $(D+B)/B = \langle \{x + B : x \in D\} \rangle$ entonces $|(D+B)/B| < \kappa$ (o finitamente generado). Luego, como A/B es κ-libre, entonces $(D+B)/B$ es libre. Por lo tanto, $D + B \cong \big((D+B)/B\big) \oplus B$ y, como B es κ-libre, de (b) se sigue que $D+B$ es κ-libre. Finalmente, como D es un subgrupo de $D+B$ con cardinalidad $<\kappa$ (o finitamente generado), entonces D es libre.

(d): Como $\frac{(G/C)}{(B/C)} \cong G/B$ y G/B y B/C son κ-libres, se sigue de (c) que G/C es κ-libre. □

Buscamos, con estas definiciones, dar una caracterización de la noción de grupo libre. Un punto de partida es el llamado *criterio de Pontryagin* que afirma que todo grupo contable libre de torsión que satisface la condición de Pontryagin es libre ([14], ver también [4, Thm. 4.2] y el Teorema 5.4 para $\kappa = \aleph_0$). Aquí decimos que un grupo satisface la *condición de Pontryagin* si todo subgrupo finitamente generado se puede extender a un subgrupo $\aleph_0$-puro finitamente generado. Generalizamos la condición de Pontryagin del siguiente modo, la cual aparece en [4, Sec. 5] para $\kappa = \aleph_1$ con el nombre *condición de Chase*.

Definición 4.4. Dado un cardinal $\kappa > \aleph_0$, decimos que un grupo G es *fuertemente κ-libre* si satisface las siguientes dos condiciones.

(i) G es κ-libre.

(ii) Todo subgrupo de G de cardinalidad $<\kappa$ se puede extender a un subgrupo κ-puro de cardinalidad $<\kappa$.

También decimos que G es un grupo *fuertemente $\aleph_0$-libre* si G es un grupo libre de torsión que satisface la condición de Pontryagin.

Lema 4.5. *Para un cardinal infinito κ,*

(a) *Todo subgrupo de un grupo fuertemente κ-libre también es fuertemente κ-libre.*

(b) *Todo grupo libre es fuertemente κ-libre.*

(c) *Si $\lambda > \kappa$ entonces todo grupo fuertemente λ-libre es fuertemente κ-libre.*

Demostración. (a): Sea A un grupo fuertemente κ-libre y B un subgrupo de A, el cual es κ-libre por Lema 4.3. Ahora, si C es subgrupo de B de cardinalidad $<\kappa$ (o finitamente generado cuando $\kappa = \aleph_0$) entonces este se extiende a un subgrupo κ-puro S de A de cardinalidad $<\kappa$ (o finitamente generado). Luego, $S \cap B$ contiene a C, es de cardinalidad $<\kappa$ (o finitamente generado) y es un subgrupo κ-puro de B, pues $B/(S \cap B) \cong (S+B)/S$ y A/S es κ-libre.

(b): Sea F un grupo libre y B subgrupo de F de cardinalidad $<\kappa$ (o finitamente generado cuando $\kappa = \aleph_0$). Sea X una base de F. Como $B \subseteq F$ entonces cada elemento de B puede expresarse de manera única a partir de finitos elementos de X. Por lo tanto, existe $Y \subseteq X$ tal que $B \subseteq \langle Y \rangle$ y $|Y| < \kappa$. Claramente, $\langle Y \rangle$ es un sumando directo de F, lo cual implica que es un subgrupo κ-puro de F.

(c): Sea L un grupo fuertemente λ-libre. Claramente L es κ-libre. Ahora, veamos que si B es un subgrupo de L de cardinalidad $<\kappa$ (o finitamente generado cuando $\kappa = \aleph_0$), este se puede extender a un subgrupo κ-puro de cardinalidad $<\kappa$ (o finitamente generado). Como L es fuertemente λ-libre, B se extiende a un subgrupo λ-puro C de cardinalidad $<\lambda$. Como L es λ-libre, entonces C es libre y, según (b), es fuertemente κ-libre. Luego, como B es un subgrupo de C de tamaño $<\kappa$, este se puede extender a un subgrupo κ-puro S de C de cardinalidad $<\kappa$. Así, del Lema 4.3, S es un subgrupo κ-puro de L. □

Con esta definición, la caracterización de grupos libres contables y el Teorema 2.6 quedan enunciados como sigue.

Teorema 4.6. *Un grupo es $\aleph_1$-libre si y solo si es fuertemente $\aleph_0$-libre.*

Demostración. Si G es un grupo $\aleph_1$-libre y B es un subgrupo finitamente generado de G, entonces existe un subgrupo contable D de G que es puro y contiene a B (ver [6, Prop. 26.2, pg. 115]). Además, D es libre porque G es $\aleph_1$-libre, de donde se sigue que D es fuertemente $\aleph_0$-libre por el Lema 4.5. Ahora, como B es un subgrupo finitamente generado de D, este se extiende a un subgrupo puro C de D finitamente generado. Pero como D es subgrupo puro de G, del Lema 4.3 se sigue que C es subgrupo puro de G.

Recíprocamente, supongamos que G es un grupo fuertemente $\aleph_0$-libre. Si C es un subgrupo contable de G entonces este también es fuertemente $\aleph_0$-libre por el Lema 4.5, es decir, C es libre de torsión y cumple la condición de Pontryagin. Además, como C es contable, entonces es libre (por el criterio de Pontryagin). □

5. Consistencia de WP para grupos de cardinalidad regular

En esta sección generalizamos algunos de los resultados presentados en [4], donde se prueba que $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ *implica que todo W-grupo de cardinalidad* $\aleph_1$ *es* *libre*. A lo largo de esta sección, fijamos un cardinal regular κ.

Los siguientes son herramientas útiles sobre propiedades de sucesiones crecientes de grupos que producen grupos libres.

Lema 5.1 ([4, Thm. 2.6], [13, Cor. 1.1.8])**.** *Sea γ un ordinal y $\{A_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ una sucesión continua de grupos tal que A_0 es libre y $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ es libre cuando $\alpha+1<\gamma$. Entonces:*

(a) *A_α es libre para $\alpha<\gamma$.*

(b) *Existe una sucesión continua $\{X_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ tal que X_α es base de A_α para $\alpha<\gamma$.*

(c) *$A=\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$ es libre.*

(d) *A/A_α es libre para todo $\alpha<\gamma$.*

Teorema 5.2. *Sea A un grupo libre, $|A|=\kappa$ con $\kappa>\aleph_0$. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una sucesión continua de subgrupos de A de cardinalidad $<\kappa$ tal que $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha = A$, entonces existe un cub C en κ tal que A/A_υ es libre para todo $\upsilon\in C$.*

Demostración. Sea X una base de A. Definamos, por recursión, dos sucesiones $\{X_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ y $\{\upsilon_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ continuas y estrictamente crecientes, tales que para $\alpha<\kappa$, $X_\alpha\subseteq X$ es base de A_{υ_α} con $\upsilon_\alpha<\kappa$:

(i) $\upsilon_0=0$, y X_0 es alguna base de A_0.

(ii) Procedemos por recursión en $n<\omega$:

  (ii-1) Sea $X_\alpha\subsetneq Y_0\subseteq X$ tal que $|Y_0|<\kappa$, y sea $\upsilon_\alpha<\sigma_0<\kappa$ tal que $Y_0\subseteq A_{\sigma_0}$

  (ii-2) Habiendo definido $Y_n\subseteq X$ y $\sigma_n<\kappa$ tal que $Y_n\subseteq A_{\sigma_n}$ con $|Y_n|<\kappa$, sea $Y_n\subseteq Y_{n+1}\subseteq X$ tal que $|Y_{n+1}|<\kappa$ y $A_{\sigma_n}\subseteq\langle Y_{n+1}\rangle$, y sea $\sigma_n<\sigma_{n+1}<\kappa$ tal que $Y_{n+1}\subseteq A_{\sigma_{n+1}}$.

  Obtenemos entonces una sucesión creciente $\{Y_n\}_{n<\omega}$ de subconjuntos de X que contienen propiamente a X_α, y una sucesión creciente $\{\sigma_n\}_{n<\omega}$ de ordinales $<\kappa$ y mayores que υ_α. Definimos $X_{\alpha+1}=\bigcup_{n<\omega} Y_n$ y $\upsilon_{\alpha+1}=\sup_{n<\omega}\sigma_n<\kappa$. De la continuidad de $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ se sigue que $A_{\upsilon_{\alpha+1}}=\bigcup_{n<\omega} A_{\sigma_n}$ y, de la contención $A_{\sigma_n}\subseteq\langle Y_{n+1}\rangle\subseteq A_{\sigma_{n+1}}$, obtenemos que $X_{\alpha+1}$ es una base de $A_{\upsilon_{\alpha+1}}$.

(iii) $X_\gamma=\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ y $\upsilon_\gamma=\sup_{\alpha<\gamma}\upsilon_\alpha<\kappa$ cuando $\gamma<\kappa$ es un ordinal límite. Se tiene, por continuidad de $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, que X_γ es una base de A_{υ_γ}.

Como $\{\upsilon_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es estrictamente creciente y continua, $C=\{\upsilon_\alpha:\alpha<\kappa\}$ es un cub en κ y, además, $X=\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, pues dicha unión es una base de $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_{\upsilon_\alpha}=A$ contenida en X. De aquí se sigue claramente que A/A_{υ_α} es libre para todo $\alpha<\kappa$. □

La siguiente es una caracterización de los grupos fuertemente κ-libres.

Lema 5.3. *Sea A un grupo, $|A| \leq \kappa$. Entonces A es fuertemente κ-libre si, y solo si, existe una sucesión continua $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de subgrupos libres, de cardinalidad $<\kappa$ (o finitamente generados si $\kappa = \aleph_0$), tal que*

(i) $A_0 = 0$,

(ii) $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$, *y*

(iii) $A_{\alpha+1}$ *es κ-puro para todo $\alpha < \kappa$.*

Demostración. Como $|A| \leq \kappa$, enumeremos $A = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Supongamos que A es fuertemente κ-libre, y definamos $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ por recursión:

(1) $A_0 = 0$.

(2) $A_{\alpha+1}$ es algún subgrupo κ-puro de cardinalidad $<\kappa$ (o finitamente generado) que extiende al subgrupo generado por $A_\alpha \cup \{a_\alpha\}$. Entonces $A_{\alpha+1}$ es libre porque A es κ-libre.

(3) $A_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$ cuando $\gamma < \kappa$ es un ordinal límite. Claramente, $|A_\gamma| < \kappa$, de donde A_γ es libre (este paso no sucede cuando $\kappa = \aleph_0$).

Esta sucesión cumple el enunciado.

Recíprocamente, supongamos que existe dicha sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$. Sea B un subgrupo de A de cardinalidad $<\kappa$ (o finitamente generado). Como $B \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$, se sigue de la regularidad de κ que $B \subseteq A_\alpha$ para algún $\alpha < \kappa$. Por lo tanto B es libre y $A_{\alpha+1}$ es un subgrupo κ-puro de cardinalidad $<\kappa$ (o finitamente generado) que extiende a B. $\square$

Como consecuencia, los grupos libres quedan caracterizados a partir de grupos fuertemente κ-libres de la siguiente forma.

Teorema 5.4. *Sea A un grupo fuertemente κ-libre, $|A| = \kappa$ y sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una sucesión como en el Lema 5.3. Entonces A es libre si y solo si $E = \{\gamma < \kappa : A_\gamma \text{ no es } \kappa\text{-puro}\}$ no es estacionario en κ.*

Demostración. Si E no es estacionario, entonces existe un cub $C = \{\upsilon_\alpha : \alpha < \kappa\}$ (sucesión estrictamente creciente y continua) en κ que no intersecta a E. Definamos $\widehat{A}_\alpha = A_{\upsilon_\alpha}$ para $\alpha < \kappa$. Como C es un cub entonces $\{\widehat{A}_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una sucesión continua de subgrupos κ-puros de A cuya unión es A. Por lo tanto, para todo $\alpha < \kappa$, $A/\widehat{A}_\alpha$ es κ-libre y, como $|\widehat{A}_{\alpha+1}| < \kappa$ (o finitamente generado cuando $\kappa = \aleph_0$), entonces $\widehat{A}_{\alpha+1}/\widehat{A}_\alpha$ es libre. Luego, como $A_0 = 0$ es libre, del Lema 5.1 obtenemos que A es libre.

Recíprocamente, supongamos que A es libre. Si $\kappa > \aleph_0$ entonces, por el Teorema 5.2, existe un cub C en κ tal que A/A_υ es libre para todo $\upsilon \in C$. Claramente, $E \cap C = \varnothing$, lo cual implica que E no es estacionario. Por otro lado, cuando $\kappa = \aleph_0$ se tiene que $E = \varnothing$, el cual no es estacionario en ω. $\square$

El siguiente resultado, bajo $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, es la herramienta técnica principal para probar WP.

Teorema 5.5. *Supongamos $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ y que "Todo W-grupo es κ-libre". Si $\kappa > \aleph_0$ y $\{B_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una sucesión continua, estrictamente creciente, de grupos libres de cardinalidad $<\kappa$, $B = \bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha$, y $E = \{\alpha < \kappa : B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no libre}\}$ es un conjunto estacionario en κ, entonces B no es un W-grupo.*

Demostración. Al aplicar el Corolario 3.4 a la sucesión $\{B_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, E y $Y = \mathbb{Z}$, existe una sucesión $\{g_\alpha\}_{\alpha\in E}$ tal que

(i) $g_\alpha \colon B_\alpha \to B_\alpha \times \mathbb{Z}$ para $\alpha \in E$ y,

(ii) si $h \colon B \to B \times \mathbb{Z}$ tal que $\forall_{\alpha<\kappa}(h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times \mathbb{Z})$, entonces existe un $\upsilon \in E$ tal que $h{\restriction}B_\upsilon = g_\upsilon$.

Definamos, por recursión, una sucesión continua $\{C_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, donde cada C_α es un $(B_\alpha, \mathbb{Z})$-grupo.

(1) $C_0 = B_0 \oplus \mathbb{Z}$.

(2) Para definir $C_{\alpha+1}$ consideramos dos casos:

  (2-1) Cuando $\alpha \in E$ y g_α es un homomorfismo transversal de $\rho_1^\alpha \colon C_\alpha \to B_\alpha$ (la proyección canónica). Como $\alpha \in E$ entonces $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre y, por lo tanto, no es W-grupo (si fuese W-grupo sería κ-libre y por lo tanto libre ya que $|B_{\alpha+1}/B_\alpha| < \kappa$). Luego, por el Teorema 2.8, existe un $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo $C_{\alpha+1}$ que extiende a C_α tal que g_α no puede extenderse a un homomorfismo transversal de $\rho_1^{\alpha+1} \colon C_{\alpha+1} \to B_{\alpha+1}$.

  (2-2) En el caso contrario, tomamos a $C_{\alpha+1}$ igual a cualquier $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo que extienda a C_α. Este existe puesto que, como B_α es libre, por el Lema 2.1 la sucesión exacta $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{i}_2} C_\alpha \xrightarrow{\rho_1^\alpha} B_\alpha \to 0$ se parte, dando lugar a que $C_\alpha \cong B_\alpha \oplus \mathbb{Z}$. Luego, podemos extender naturalmente C_α a un $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo $C_{\alpha+1} \cong B_{\alpha+1} \oplus \mathbb{Z}$.

(3) $C_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} C_\alpha$ con $\gamma < \kappa$ ordinal límite, el cual es un $(B_\gamma, \mathbb{Z})$-grupo bajo las condiciones de la recursión.

Consideremos el $(B, \mathbb{Z})$-grupo $C = \bigcup_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. Para probar que B no es W-grupo, basta demostrar que la proyección canónica $\rho_1 \colon C \to B$ no admite un homomorfismo transversal. Supongamos por el contrario que $h \colon B \to C$ es un homomorfismo transversal de ρ_1. Para cada $\alpha < \kappa$, $h{\restriction}B_\alpha$ es un homomorfismo transversal de $\rho_1^\alpha = \rho_1{\restriction}C_\alpha$, por lo cual $h[B_\alpha] \subseteq C_\alpha$. Así h cumple las condiciones dadas en (ii), y se sigue que existe un $\upsilon \in E$ tal que $h{\restriction}B_\upsilon = g_\upsilon$. Luego, $h{\restriction}B_{\upsilon+1}$ es un homomorfismo transversal de $\rho_1^{\upsilon+1}$ que extiende a g_υ, el cual no puede existir por la definición de $C_{\upsilon+1}$. $\square$

El resultado principal de esta sección se presenta a continuación.

Teorema 5.6. *Supongamos* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$*,* $\kappa > \aleph_0$ *es regular y que "Todo W-grupo es* κ*-libre". Entonces*

(a) *Todo W-grupo es fuertemente* κ*-libre.*

(b) *Todo W-grupo de cardinalidad* κ *es libre.*

Demostración. Sea W un W-grupo , el cual es κ-libre por hipótesis.

(a): Si W no es fuertemente κ-libre entonces existe un subgrupo B_0 de W con $|B_0| < \kappa$, tal que *todo subgrupo* C *de* W *con* $|C| < \kappa$*, que extiende a* B_0*, se puede extender a un subgrupo* C' *de* W*, con* $|C'| < \kappa$*, tal que* C'/C *no es libre.* Usamos este hecho para construir, a partir de B_0, la siguiente sucesión $\{B_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, estrictamente creciente y continua, de subgrupos de W de cardinalidad $<\kappa$ (y por lo tanto libres):

(i) $B_{\alpha+1}$ es algún C' que resulta al aplicar la afirmación anterior a $C = B_\alpha$.

(ii) $B_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} B_\alpha$, con $\gamma < \kappa$ ordinal límite. Es claro por el Teorema 3.1 que $|B_\gamma| < \kappa$.

Además, $\kappa = \{\alpha < \kappa : B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no libre}\}$, el cual es estacionario en κ. Por lo tanto, del Teorema 5.5, $B = \bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha$ es un subgrupo de W que no es W-grupo, lo cual contradice el Lema 2.4.

(b): Ahora supongamos que $|W| = \kappa$. Por (a), existe una sucesión continua $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de subgrupos de W, como en el Lema 5.3, tal que su unión es W. Consideremos $E = \{\gamma < \kappa : A_{\gamma+1}/A_\gamma \text{ no libre}\}$. Por el Teorema 5.5, E no es estacionario en κ.

Ahora veamos que $E = \{\gamma < \kappa : A_\gamma \text{ no es } \kappa\text{-puro}\}$. Es claro que se cumple $\subseteq$. Recíprocamente, si $\gamma \notin E$ entonces, para $\gamma < \delta < \kappa$, $(A_\delta/A_\gamma)/(A_{\gamma+1}/A_\gamma) \cong A_\delta/A_{\gamma+1}$ donde $A_{\gamma+1}/A_\gamma$ y $A_\delta/A_{\gamma+1}$ son libres (el primero porque $\gamma \notin E$ y el segundo porque $A_{\gamma+1}$ es un subgrupo κ-puro de W). Luego, A_δ/A_γ es libre. Ahora, si D/A_γ es subgrupo de W/A_γ de cardinalidad $< \kappa$, entonces $|D| < \kappa$ y está contenido en $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$, luego existe $\gamma < \delta < \kappa$ tal que $D \subseteq A_\delta$. Por lo tanto, D/A_γ es subgrupo de A_δ/A_γ, lo cual implica que es libre. Así A_γ, es un subgrupo κ-puro de A.

Del Teorema 5.4, concluímos que W es libre. □

Del Teorema anterior, aplicado a $\kappa = \aleph_1$, y del Teorema 4.2, se sigue directamente el siguiente resultado.

Corolario 5.7. *Bajo* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$*, todo W-grupo de cardinal* $\aleph_1$ *es libre.*

El Teorema anterior se traduce en

Teorema 5.8. *Supongamos* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$*,* $\kappa > \aleph_0$ *es regular y que "Todo W-grupo es* κ*-libre". Entonces todo W-grupo es* κ^+*-libre.*

6. El Teorema de Compacidad de Shelah

Los resultados de esta sección están basados en los resultados propuestos por Eklof en [5] para módulos *"libres"*, *"κ-libres"* y *"fuertemente κ-libres"*[4], definidos de forma axiomática. En dicho trabajo, la prueba del Teorema de Compacidad de Shelah utiliza una técnica ingeniosa e interesante llamada *"el juego de Shelah"*. Para grupos abelianos, ofrecemos una prueba mucho más sencilla.

Arrancamos con una generalización (de una sola dirección) del Criterio de Pontryagin formulado en el Teorema 4.6.

Teorema 6.1. *Sea κ un cardinal regular. Entonces todo grupo κ^+-libre es fuertemente κ-libre.*

Demostración. Si $\kappa = \aleph_0$, el resultado se sigue del Teorema 4.6. Supongamos ahora que $\kappa > \aleph_0$ y que G es un grupo κ^+-libre que no es fuertemente κ-libre. Como en la prueba de (a) del Teorema 5.6, construímos una sucesión $\{B_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, estrictamente creciente y continua, de subgrupos de G de cardinalidad $<\kappa$ tal que, para todo $\alpha < \kappa$, $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre. Por otro lado, definimos $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha$, el cual es un subgrupo de G de cardinalidad κ y, como G es κ^+-libre, entonces A es libre. Por otra parte, por el Teorema 5.2, existe un cub C en κ tal que A/B_υ es libre para todo $\upsilon \in C$. Al tomar cualquier $\upsilon_0 \in C$, como $B_{\upsilon_0+1}/B_{\upsilon_0}$ es subgrupo de A/B_{υ_0}, entonces es libre, lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 6.2. *Si λ es un cardinal límite y A es un grupo λ-libre, entonces A es fuertemente κ-libre para todo cardinal infinito $\kappa < \lambda$.*

Demostración. Dado $\kappa < \lambda$ tenemos que $\kappa^{++} < \lambda$ y, como A es λ-libre, es también κ^{++}-libre. Luego, por el Teorema 6.1, A es fuertemente κ^+-libre y, del Lema 4.5, A es fuertemente κ-libre. $\square$

Teorema 6.3 (Compacidad de Shelah)**.** *Si λ es un cardinal singular y A es un grupo λ-libre con $|A| = \lambda$, entonces A es libre.*

Demostración. Sea $\tau = \mathrm{cf}(\lambda)$ y $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ una sucesión estrictamente creciente y continua de cardinales, con supremo λ, tal que $\kappa_0 > \tau$. Luego, como $|A| = \lambda$, existe una sucesión continua $\{H_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ de subconjuntos de A tal que $|H_\alpha| = \kappa_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$, y $A = \bigcup_{\alpha<\tau} H_\alpha$. Ahora definamos, por recursión, una sucesión creciente $\{F_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ de subgrupos de A tal que F_α es un subgrupo κ_α^+-puro de cardinalidad κ_α que extiende a H_α y a $\bigcup_{\xi<\alpha} F_\xi$ (pues A es fuertemente κ_α^+-libre por el Corolario 6.2). Luego, por recursión sobre $n \in \omega$, definamos las sucesiones $\{F_\alpha^n\}_{\alpha<\tau}$, $\{X_\alpha^n\}_{\alpha<\tau}$, $\{Y_\alpha^n\}_{\alpha<\tau}$ y $\{u_{\alpha,\xi}^n\}_{\substack{\alpha<\tau \\ \xi<\kappa_\alpha}}$, de modo que, para $\alpha < \tau$, se satisfacen las siguientes propiedades:

[4]Estas nociones, para grupos abelianos bajo la noción usual de libre, son equivalentes a las definiciones respectivas dadas en la sección 4.

(i) $\{F^n_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ es una sucesión creciente de subgrupos de A tal que F^n_α es un subgrupo κ^+_α-puro de cardinalidad κ_α con base X^n_α,

(ii) $\bigcup_{\alpha<\tau} F^n_\alpha = A$,

(iii) $F^n_\alpha \subseteq F^{n+1}_\alpha$ y $X^n_\alpha \subseteq X^{n+1}_\alpha$ (esto implica que $F^{n+1}_\alpha/F^n_\alpha$ es libre),

(iv) $Y^n_\alpha \subseteq X^n_{\alpha+1}$, $|Y^n_\alpha| = \kappa_\alpha$ y $Y^n_\alpha \subseteq Y^{n+1}_\alpha$,

(v) $F^n_\alpha \subseteq \langle Y^n_\alpha \rangle \subseteq F^{n+1}_\alpha$,

(vi) $F^n_\alpha = \left\{u^n_{\alpha,\xi} : \xi < \kappa_\alpha\right\}$ (simplemente una enumeración), y

(vii) $\left\{u^n_{\upsilon,\xi} : \upsilon < \tau, \xi < \kappa_\alpha\right\} \subseteq F^{n+1}_\alpha$.

Dado $\alpha < \tau$, definamos por $F^0_\alpha = F_\alpha$ y X^0_α cualquier base de F^0_α. Como $F^0_\alpha \subseteq F^0_{\alpha+1}$, entonces existe $Y^0_\alpha \subseteq X^0_{\alpha+1}$ de cardinalidad κ_α tal que $F^0_\alpha \subseteq \langle Y^0_\alpha\rangle$. Para el paso inductivo definamos, por recursión sobre $\alpha < \tau$, a F^{n+1}_α como un subgrupo κ^+_α-puro, de cardinalidad κ_α, que extiende a

$$\left\langle \left\{u^n_{\upsilon,\xi} : \upsilon < \tau, \xi < \kappa_\alpha\right\} \cup Y^n_\alpha \cup \bigcup_{\xi<\alpha} F^{n+1}_\xi \right\rangle.$$

Claramente, $F^n_\alpha \subseteq F^{n+1}_\alpha$ y, como F^n_α es subgrupo κ^+_α-puro de A, entonces $F^{n+1}_\alpha/F^n_\alpha$ es libre. Por lo tanto, existe una base X^{n+1}_α de F^{n+1}_α que extiende a X^n_α. Luego, como $Y^n_\alpha \cup F^{n+1}_\alpha \subseteq F^{n+1}_{\alpha+1}$ es de cardinalidad κ_α, entonces existe $Y^{n+1}_\alpha \subseteq X^{n+1}_{\alpha+1}$, de cardinalidad κ_α, que extiende a Y^n_α, tal que $F^{n+1}_\alpha \subseteq \langle Y^{n+1}_\alpha\rangle$.

Es claro que se satisface (i)–(vii). Ahora, dado $\alpha < \tau$, definamos $C_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} F^n_\alpha$, el cual es libre por (iii) y por Lema 5.1 con base $X_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} X^n_\alpha$. Como $F^n_\alpha \subseteq \langle Y^n_\alpha\rangle \subseteq F^{n+1}_\alpha$, entonces $\bigcup_{n\in\omega} Y^n_\alpha \subseteq X_{\alpha+1}$ es base de C_α. Por lo tanto, $C_{\alpha+1}/C_\alpha$ es libre.

Como $A = \bigcup_{\alpha<\tau} C_\alpha$, para probar que A es libre basta demostrar, en virtud del Lema 5.1, que $\{C_\alpha\}_{\alpha<\tau}$ es una sucesión continua. De (i) tenemos que esta sucesión es creciente. Ahora, si $\gamma < \tau$ es un ordinal límite, es claro que $\bigcup_{\alpha<\gamma} C_\alpha \subseteq C_\gamma$. Por otra parte, como $\kappa_\gamma = \sup_{\alpha<\kappa} \kappa_\alpha$, de (vi) y (vii) se sigue que

$$\begin{aligned} C_\gamma &= \bigcup_{n\in\omega} F^n_\gamma = \bigcup_{n\in\omega} \left\{u^n_{\gamma,\xi} : \xi < \kappa_\gamma\right\} = \bigcup_{n\in\omega}\bigcup_{\alpha<\gamma} \left\{u^n_{\gamma,\xi} : \xi < \kappa_\alpha\right\} \\ &\subseteq \bigcup_{n\in\omega}\bigcup_{\alpha<\gamma} F^{n+1}_\alpha = \bigcup_{\alpha<\gamma} C_\alpha. \end{aligned}$$ □

Corolario 6.4. *Si λ es un cardinal singular, entonces todo grupo λ-libre es λ^+-libre.*

7. Consistencia del Problema de Whitehead

Como consecuencia de los resultados principales de la Sección 5 y Sección 6, probamos la consistencia de WP con ZFC.

Teorema 7.1. *Supongamos* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. *Si* κ *es un cardinal infinito, entonces todo W-grupo es* κ^+*-libre.*

Demostración. Por inducción sobre κ. Supongamos que para todo cardinal infinito $\mu < \kappa$, todo W-grupo es μ^+-libre, es decir, todos los subgrupos de cardinal $\leq\mu$ de un W-grupo son libres. Esto equivale a decir que *todo W-grupo es* κ*-libre*. Veamos que todo W-grupo es κ^+-libre. Cuando $\kappa = \aleph_0$ el resultado se sigue del Teorema 4.2, cuando $\kappa > \aleph_0$ es regular, se sigue del Teorema 5.8 y, cuando κ es singular, se sigue del Corolario 6.4. □

Corolario 7.2. $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ *implica que todo W-grupo es libre.*

Demostración. Si W es un W-grupo, entonces se sigue directamente que W es libre al aplicar el Teorema 7.1 a $\kappa = \text{máx}\{\aleph_0, |W|\}$. □

Corolario 7.3. WP *es consistente con* ZFC*.*

8. Consistencia de la negación de WP

En esta sección resumimos el contenido de [4, Sec. 7] sobre la construcción, bajo el Axioma de Martin, de un grupo de Whitehead que no es libre. Al final, comentamos algunos trabajos recientes relacionados con la construcción de dicho grupo.

La prueba de la independencia del Problema de Whitehead consiste en demostrar que ¬WP es consecuencia del Axioma de Martin y la negación de la Hipótesis del Continuo (MA + ¬CH). Más aún, un W-grupo no libre se puede construir a partir de $\text{MA}_{\aleph_1}$, el cual es un fragmento de MA que se sigue de MA + ¬CH y que implica a ¬CH.

Solovay y Tennenbaum [18] probaron que MA + ¬CH es consistente con ZFC, junto con la creación del método de iteraciones de forcing con soporte finito. No entramos en detalles sobre el significado de MA sino sobre una de sus consecuencias (para detalles sobre MA recomendamos ver [12]).

Teorema 8.1. *Supongamos* $\text{MA}_{\aleph_1}$. *Si* $|A| \leq \aleph_1$ *y* $\mathbb{P} \subseteq \{f : C \to B : C \subseteq A\}$ *satisface las siguientes condiciones:*

(i) $\mathbb{P}$ *es no vacío y* $|\mathbb{P}| \leq \aleph_1$,

(ii) *dado* $a \in A$ *y* $p \in \mathbb{P}$, *existe una función* $q \in \mathbb{P}$ *que extiende a* p *y tal que* $a \in \operatorname{dom} q$, *y*

(iii) *si* $P \subseteq \mathbb{P}$ *es no contable, entonces existen dos funciones distintas* $p, q \in P$ *tal que se pueden extender a alguna función* $r \in \mathbb{P}$, *entonces existe una función $g\colon A \to B$ tal que, para todo conjunto finito $F \subseteq A$, existe un $p \in \mathbb{P}$ que contiene a F en su dominio, tal que $p(x) = g(x)$ para todo $x \in F$.*

Demostración. Ver [13, Tma. 2.4.2]. □

Ahora fijemos un grupo A fuertemente $\aleph_1$-libre de cardinalidad $\aleph_1$, un grupo B y una sucesión exacta $0 \to \mathbb{Z} \to B \xrightarrow{\pi} A \to 0$. Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de los homomorfismos $\varphi\colon S \to B$ que cumplen $\pi\varphi = 1_S$, donde S es un subgrupo puro de A finitamente generado. Claramente, $\mathbb{P} \subseteq \{f\colon C \to B : C \subseteq A\}$. Además,

Teorema 8.2. *$\mathbb{P}$ satisface las tres condiciones del Teorema 8.1.*

Demostración. Nuestra prueba se basa en [4, Sec. 7]. La prueba de este teorema contiene muchos detalles técnicos de Teoría de Conjuntos. Para una demostración completa, ver [13, Sec. 3.2.2].

Abajo chequeamos las tres condiciones del Teorema 8.1.

(i): Como 0 es un subgrupo puro de A, el único homomorphismo de 0 en B está en $\mathbb{P}$, por lo cual $\mathbb{P} \neq \emptyset$. Por otro lado, como A tiene tamaño $\aleph_1$ y es isomorfo al cociente de B con un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}$, obtenemos que $|B| = \aleph_1$. Ahora, todo elemento de $\mathbb{P}$ está determinado por una función parcial finita de A en B, y solo hay una cantidad $\aleph_1$ de tales funciones. Por lo tanto, $|\mathbb{P}| \leq \aleph_1$.

(ii): Sean $\varphi \in \mathbb{P}$ con dominio S y $F \subseteq A$ finito. Como $\langle S \cup F \rangle$ es finitamente generado, existe un subgrupo puro S' de A finitamente generado que contiene a $S \cup F$ (porque A también es fuertemente $\aleph_0$-libre por Lema 4.5). Luego, S'/S es libre de torsión y finitamente generado, por lo cual es libre. Por otro lado, todo subgrupo contable de A es libre, así que S es libre con una base finita X. Consecuentemente, S' tiene una base finita $X' \supseteq X$. Para cada $x \in X' \smallsetminus X$ escogemos un $b_x \in B$ tal que $\pi(b_x) = x$, y definimos $f\colon X' \to B$ como

$$f(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in X, \\ b_x & \text{si } x \in X' \smallsetminus X. \end{cases}$$

Luego, existe un único homomorfismo $\varphi'\colon S' \to B$ que extiende a f. Por lo tanto, $\varphi' \in \mathbb{P}$, extiende a φ y $F \subseteq \operatorname{dom}\varphi'$.

(iii): Sea $\{\varphi_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{P}$. El primer paso (que omitimos) es encontrar un $W_1 \subseteq \omega_1$ no contable y un subgrupo A' de A libre y puro tal que $\operatorname{dom}\varphi_\alpha \subseteq A'$ para todo $\alpha \in W_1$. Fijemos una base Y' de A'. Luego, como $\operatorname{dom}\varphi_\alpha \subseteq A'$ es finitamente generado para $\alpha \in W_1$, por (ii) podemos encontrar un $\varphi'_\alpha \in \mathbb{P}$ que extiende a φ_α tal que $\operatorname{dom}\varphi'_\alpha$ tiene una base finita X'_α contenida en Y'. Por el lema del Δ-sistema, podemos encontrar un $W_2 \subseteq W_1$ no contable tal que $\{X'_\alpha : \alpha \in W_2\}$ forma un Δ-sistema con raiz R. Notemos que $\operatorname{dom}\varphi'_\alpha \cap \operatorname{dom}\varphi'_\beta = \langle R \rangle$ para todo $\alpha \neq \beta$ en W_2.

Por otro lado, para todo $a \in A$ y $\varphi, \psi \in \mathbb{P}$ que contienen a a en su dominio, $a = \pi\varphi(a) = \pi\psi(a)$, así que $\varphi(a)$ y $\psi(a)$ pertenecen a la misma clase lateral del kernel de π. Ahora, como este kernel es contable, el conjunto

$\{\varphi(a) : \varphi \in \mathbb{P},\ a \in \operatorname{dom}\varphi\}$ es contable. Por lo tanto, existe un $W_3 \subseteq W_2$ no contable y una función $f\colon R \to B$ tal que $\varphi'_\alpha{\restriction}R = f$ para todo $\alpha \in W_3$.

Finalmente, φ'_α y φ'_β (y por ende φ_α y φ_β) tienen una extensión común en $\mathbb{P}$ para todo $\alpha, \beta \in W_3$, lo cual concluye la demostración. En efecto, definimos $h\colon X'_\alpha \cup X'_\beta \to B$ como

$$h(x) := \begin{cases} \varphi'_\alpha(x) & \text{si } x \in X'_\alpha, \\ \varphi'_\beta(x) & \text{si } x \in X'_\beta. \end{cases}$$

Esta función está bien definida porque $\varphi'_\alpha(x) = \varphi'_\beta(x)$ para todo $x \in X'_\alpha \cap X'_\beta = R$. Luego, existe un único homomorfismo $\psi'\colon \langle X'_\alpha \cup X'_\beta\rangle \to B$ que extiende a h. Claramente, $\psi' \in \mathbb{P}$ y extiende a φ'_α y φ'_β. $\square$

El axioma $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ implica una conexión entre grupos fuertemente $\aleph_1$-libres y W-grupos.

Teorema 8.3. *Supongamos* $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$. *Entonces todo grupo fuertemente $\aleph_1$-libre de cardinalidad $\aleph_1$ es también un W-grupo.*

Demostración. Sea A un grupo fuertemente $\aleph_1$-libre de tamaño $\aleph_1$. Veamos que toda sucesión exacta del tipo $0 \to \mathbb{Z} \to B \xrightarrow{\pi} A \to 0$ se parte. En efecto, al tomar $\mathbb{P}$ como se indicó anteriormente, este satisface todas las condiciones del Teorema 8.1. Por lo tanto, existe un $g\colon A \to B$ tal que, dado $F \subseteq A$ finito, existe $\varphi \in \mathbb{P}$ que contiene a F en su dominio, tal que φ y g coinciden en F. Esta propiedad hace que g sea un homomorfismo, pues si $x, y \in A$, existe $\varphi \in \mathbb{P}$, el cual es un homomorfismo, que coincide con g en los puntos x,y y $x + y$. Además, $\pi g = 1_A$. En efecto, dado $x \in A$ existe $\varphi \in \mathbb{P}$ que coincide con g en el punto x, por lo cual $\pi g(x) = \pi\varphi(x) = 1_{\operatorname{dom}\varphi}(x) = x$. Esto implica que g es un homomorfismo transversal de π. $\square$

Finalmente, el deseado contraejemplo se obtiene del siguiente resultado en ZFC.

Teorema 8.4. *Existe un grupo fuertemente $\aleph_1$-libre de cardinalidad $\aleph_1$ que <u>no</u> es libre.*

Demostración. Ver [4, Sec. 7] y [13, Sec. 3.2.1]. $\square$

Corolario 8.5. *Supongamos* $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$. *Entonces existe un W-grupo de cardinalidad $\aleph_1$ que <u>no</u> es libre.*

Demostración. Por el Teorema 8.4 existe un grupo A fuertemente $\aleph_1$-libre de cardinalidad $\aleph_1$ que no es libre. De Teorema 8.3 se sigue que A es un W-grupo. $\square$

Más aún, existe un contraejemplo para cualquier cardinal no contable (tomado de [4, Sec. 8]).

Corolario 8.6. *Supongamos* $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$*. Entonces, dado un cardinal no contable* κ*, existe un W-grupo de cardinalidad* κ *que* <u>*no*</u> *es libre.*

Demostración. Por el Corolario 8.5 existe un W-grupo A de cardinalidad $\aleph_1$ que no es libre. Consideremos el grupo $K = \sum_{\alpha<\kappa} A$, el cual tiene cardinalidad κ. Luego, $\mathrm{Ext}(K, \mathbb{Z}) = \prod_{\alpha<\kappa} \mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = 0$, por lo cual K es un W-grupo. Además, K no es libre, ya que contiene un subgrupo isomorfo a A, el cual no es libre. $\square$

Corolario 8.7. $\neg$WP *es consistente con* ZFC*.*

En conexión con el resultado de consistencia de esta sección, Devlin y Shelah [3] encontraron un principio intermedio entre $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ y la existencia de un W-grupo no libre, a saber, el *principio de uniformización de coloraciones de sistemas de escaleras* (ULC). Ellos probaron que, en efecto, $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ implica ULC, y que con ULC se puede construir un W-grupo no libre.

El primer autor, con A. Itaba y T. Yorioka [10], desarrollan un trabajo similar en el contexto de módulos sobre *path algebras* infinitamente generados, donde ULC implica que hay una especie de módulo de Whitehead que no es proyectivo.

Recientemente, Aoki [1] propone una debilitación considerable del axioma de Martin que implica a ULC junto con la existencia de un homomorfismo discontinuo de $C(X, \mathbb{C})$ a algún álgebra de Banach, para algún espacio de Hausdorff X compacto e infinito (en conexión con el denominado *Problema de Kaplansky*).

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por: Grant-in-Aid for Early Career Scientists 18K13448, Japan Society for the Promotion of Science (primer autor), y el proyecto No. 41636 de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín (segundo autor).

Referencias

[1] Yushiro Aoki, *Discontinuous homomorphisms on $C(X)$ with the negation of CH and a weak forcing axiom*, aceptado en Journal of the London Mathematical Society.

[2] Keith J. Devlin, *Constructibility*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[3] Keith J. Devlin and Saharon Shelah, *A weak version of $\diamondsuit$ which follows from $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$*, Israel J. Math. **29** (1978), no. 2-3, 239–247.

[4] Paul C. Eklof, *Whitehead's problem is undecidable*, Amer. Math. Monthly **83** (1976), no. 10, 775–788.

[5] ______, *Shelah's singular compactness theorem*, Publ. Mat. **52** (2008), no. 1, 3–18.

[6] László Fuchs, *Infinite abelian groups. Vol. I*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 36, Academic Press, New York-London, 1970.

[7] ______, *Infinite abelian groups. Vol. II*, Pure and Applied Mathematics. Vol. 36-II, Academic Press, New York-London, 1973.

[8] Paul Hill, *On the freeness of abelian groups: A generalization of Pontryagin's theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 1118–1120.

[9] Peter John Hilton and Urs Stammbach, *A course in homological algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 4, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[10] Ayako Itaba, Diego A. Mejía, and Teruyuki Yorioka, *Some infinitely generated non-projective modules over path algebras and their extensions under Martin's axiom*, J. Math. Soc. Japan **72** (2020), no. 2, 413–433.

[11] Thomas Jech, *Set theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003, The third millennium edition, revised and expanded.

[12] Kenneth Kunen, *Set theory: An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983, Reprint of the 1980 original.

[13] Diego A. Mejía, *Independencia del Problema de Whitehead*, Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, 2008, p. 51.

[14] L. Pontrjagin, *The theory of topological commutative groups*, Ann. of Math. (2) **35** (1934), no. 2, 361–388.

[15] Joseph J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, third ed., Allyn and Bacon, Inc., Boston, MA, 1984.

[16] Saharon Shelah, *Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions*, Israel J. Math. **18** (1974), 243–256.

[17] ______, *A compactness theorem for singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals*, Israel J. Math. **21** (1975), no. 4, 319–349.

[18] R. M. Solovay and S. Tennenbaum, *Iterated Cohen extensions and Souslin's problem*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 201–245.

[19] Karl Stein, *Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem*, Math. Ann. **123** (1951), 201–222.