DOI: https://doi.org/10.15446/bol.mat.v31n1.121296

Boletín de Matemáticas **31**(2) (2024)

# Origin and development of the theory of core models I

## Origen y desarrollo de la teoría de modelos núcleo I

**José Adrián Gallardo Quiroz**[1,a],
**Édgar Alonso Valenzuela Nuncio**[1,b], **Luis Miguel Villegas Silva**[1,c]

**Resumen.** We examine the origin and development of core model theory, up to Mitchell's model of sequences of measures. We describe the difficulties associated with such models and related techniques, and constructions. Moreover, we address the large cardinals and covering theorems associated with these models. We discuss the appropriate bibliography to follow along with the development of the theory and its various applications. Towards the end, we introduce extenders to prepare the development of higher core models.

**Palabras claves:** Set theory, Inner Models, Core model theory, Large Cardinals, Sequences of measures, Covering Theorem, Extenders, Sharps.

**Abstract.** Se presenta una descripción del origen y desarrollo de la teoría de modelos núcleo hasta el modelo de Mitchell con sucesiones de medidas. Se describe la problemática asociada a ellos, técnicas, resultados y construcciones relacionados, así como las propiedades de grandes cardinales que los distinguen. Se discuten las fuentes apropiadas para seguir el desarrollo de la teoría, así como diversas referencias para sus aplicaciones. Al final se introducen los extensores para preparar (segunda parte) el desarrollo de modelos núcleo superiores.

**Keywords:** teoría de conjuntos, modelos internos, teoría de modelos núcleo, grandes cardinales, sucesiones de medidas, teoremas de cubierta, extensores, sostenidos.

Mathematics Subject Classification: Mathematics Subject Classification According to AMS: Primary 03C20, 03C30, 03C55, 03E30, 03E35, 03E45, 03E55; Secondary 03-02, 03B80, 03C98, 03E47, 03E65.

Recibido: abril de 2024 Aceptado: abril de 2025

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, CDMX, CP09340, México
[a]adrian.gaq@gmail.com
[b]gar_ed_93@hotmail.com
[c]villegas63@gmail.com

# 1. Introducción

En este artículo nos proponemos tratar diversas cuestiones sobre un tópico de enorme importancia en la teoría de conjuntos moderna: la teoría de modelos núcleo. Se trata de un tema muy complejo, cuya comprensión requiere gran cantidad de conocimientos, técnicas, resultados, y diversas nociones, por lo que es fácil perderse en la literatura existente, no saber distinguir entre nociones actuales y antiguas, no lograr diferenciar entre modelos para diversos grandes cardinales, etc. Nuestra idea es presentar las nociones principales involucradas, ténicas necesarias en cada etapa, aspectos históricos, algunos detalles, obstáculos para pasar a nuevos grandes cardinales, pero sin que esto último sea inabordable para el lector, y sugerencias de lecturas apropiadas en cada caso. El objetivo es llevar a buen término, en la medida de lo posible, a aquellos que quieran incorporarse a esta área de investigación, a los que trabajan en teoría de conjuntos pero quieran averiguar sobre esta disciplina, en general a matemáticos que consideren aplicar resultados de teoría de conjuntos. La comprensión cabal de lo que aquí se expondrá requiere una buena formación en teoría de conjuntos, aunque la ausencia de la misma no implica que no se puedan obtener conocimientos de este artículo. Para un estudioso de la teoría de modelos núcleo surgen varias dificultades: ¿ cómo e mpezar? ¿ cómo transitar entre las diversas fuentes bibliográficas? ¿ cómo d iscriminar q ué nociones han perdurado y cuáles han perdido actualidad (no se usan más)? ¿qué debe aprender en cada etapa? Por supuesto, no pretendemos escribir un manual de operación, sino una referencia a la cual acudir y que puede ser de utilidad en situaciones específicas.

Vale la pena mencionar que trabajamos con modelos del sistema axiómatico Zermelo-Fraenkel-Axioma de elección (ZFC), en el cual se construyen las matemáticas; ocasionalmente se pueden añadir algunos axiomas, pero siempre quedará claro cuando así ocurre. Los modelos núcleo son entonces estructuras donde se cumplen los axiomas de ZFC, contienen algunos grandes cardinales (si éstos existen), y poseen ciertas propiedades específicas q ue d escribiremos a lo largo del trabajo. Así, cuando mencionemos modelos, nos referimos a estructuras en las que se cumplen ciertos axiomas, como los de ZFC o algún subconjunto de ZFC (que llamaremos fragmento). El segundo teorema de incompletud de Gödel impide que, en ZFC, podamos probar su propia consistencia, así que si trabajamos en ese sistema (o uno más fuerte) no podemos garantizar que la teoría sea consistente, que tenga un modelo. Sólo nos queda suponer que sí es consistente y trabajar con esta premisa. Una clase transitiva que satisfaga los axiomas de ZFC y contenga a todos los ordinales se conoce como un modelo interno. Los modelos núcleo son, en particular, modelos internos pero tienen otras propiedades decisivas.

Quizá la principal dificultad en estos asuntos es dar una definición formal de la noción de ≪modelo núcleo≫, precisamente porque no existe tal. Para lograr dar la idea acertada al respecto, habremos de revisar diversos desarrollos e ideas involucradas en la construcción de estos modelos. También en este devenir quedará claro por qué son tan importantes este tipo de modelos en la teoría de conjuntos moderna y, en general, en la matemática. Para avanzar un poco en este sentido, vale la pena decir que los modelos núcleo se pueden desmontar en estratos (como los de la jerarquía de Zermelo), estos permiten un estudio extra fino de la forma en qué aparecen nuevos conjuntos, y la presencia de ciertos grandes cardinales, si es que estos existen en el universo $V$. Este tipo de modelos se representa generalmente como $L[\mathscr{E}]$, donde $\mathscr{E}$ es un conjunto o una clase propia, y puede ser vacío, en cuyo caso $L[\mathscr{E}] = L$, y otra propiedad destacada es que suponer $V = L[\mathscr{E}]$ no es demostrable ni refutable en ZFC.

Es importante señalar que esta es la primera parte del trabajo, por lo que el tratamiento de algunas nociones, construcciones, técnicas, etc. corresponden históricamente al tipo de modelos núcleo considerados en esta parte. La teoría moderna se examina con más detalle en la parte 2, donde además se puede perfilar mejor una posible definición de modelo núcleo, en vista de los resultados más recientes. Por consiguiente, advertimos al lector que conforme los modelos núcleo ≪crecen≫, es decir, pueden incorporar clases de grandes cardinales mayores, más cercanos estamos a dar una definición aceptable de modelo núcleo, y los modelos mayores en cierto sentido incluyen a los menores. Pero lo que tratamos de evitar es complicar la lectura desde el inicio, pretendemos facilitar la incorporación del lector a esta disciplina, haciendo este viaje lo menos complicado posible. Tratar de establecer una definición más formal de modelo núcleo en esta parte, a la vista de los resultados recientes, no aporta nada al lector novicio.

## 2. El modelo núcleo primigenio

Ya mencionamos que no podemos establecer resultados absolutos de consistencia, sino sólo de consistencia (independencia) relativa respecto a ZFC. Una de las primeras preguntas fue si el axioma de elección o la HGC eran independientes de ZF. K. Gödel resolvió esta cuestión parcialmente (después se completaría mediante el método de forcing) creando lo que se conoce como el universo construible de Gödel $L$, lo que da inicio a nuestra materia (modelo que describimos más adelante). Este modelo (clase propia) es un modelo interno, y vale la pena hacer algunas consideraciones. Como es bien sabido, hay diversos principios combinatorios o aseveraciones matemáticas que no se pueden demostrar o refutar en el ámbito de ZFC. Sirva de ejemplo la conocida Hipótesis del Continuo que afirma que:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

En una situación similar aparecen la Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC), el axioma de Martin (MA) o los principios introducidos por Jensen: el diamante $\diamondsuit$ y el cuadrado $\square$. Para probar que un principio o aseveración no se puede demostrar o refutar en ZFE se recurre a dos métodos: el método de Forcing (inventado por Cohen y desarrollado por muchos otros: Solovay, Jensen, Easton, etc.) y el de modelos internos, donde la idea es como sigue.

Supongamos que $\Phi$ es algún principio matemático, si logramos encontrar un modelo $M$ de ZFC con

$$M \models \Phi,$$

decimos que $\Phi$ es consistente con ZFE, que $\Phi$ no se puede refutar en ZFE. Si, además, obtenemos un modelo $N$ de ZFE tal que

$$N \models \neg\Phi$$

resulta que $\Phi$ es independiente de ZFE. En el caso del método de modelos internos, generalmente se obtiene un modelo del tipo $L$ (que a continuación tratamos). El método de forcing tiene sus propias particularidades y no será tratado en este escrito.

Una noción imprescindible en toda nuestra disertación es la de gran cardinal. No podemos dar una definición formal de gran cardinal; para ilustrarnos debemos recurrir a los axiomas de ZFE. Se demuestra que el universo $V$ se puede representar mediante estratos indizados por ordinales. No hablamos de otra cosa que de la jerarquía de Zermelo,

$$\begin{aligned} V_0 =& \emptyset \\ V_{\alpha+1} =& Pot(V_\alpha) \\ V_\beta =& \bigcup_{\alpha\in\beta} V_\alpha \qquad \text{para } \beta \text{ un ordinal límite.} \end{aligned}$$

En ZFE se prueba, entonces, que $V = \bigcup_{\alpha\in Or} V_\alpha$.

El sistema ZFE tiene una cantidad infinita de axiomas; para cada subconjunto finito $\Phi$ de ZFE existe (demostrable en ZFE) un estrato $V_\alpha$ que es modelo de $\Phi$. El teorema de incompletud de Gödel implica que no podemos aspirar a demostrar en ZFE que exista un estrato $V_\alpha$ que sea modelo de ZFE. Pero el hecho de que no podamos demostrar en ZFE que existan tales estratos no impide que los haya.

Un cardinal innumerable $\kappa$ es inaccesible si es regular y para cada $\alpha < \kappa$ la cardinalidad de $V_\alpha$ es estrictamente menor que $\kappa$. Un cardinal grande es aquel que, en particular, es inaccesible. Si $\kappa$ es un cardinal inaccesible, $V_\kappa$ es modelo de ZFE. Esta es la característica distintiva de un gran cardinal, además nos indica que la existencia de estos no puede demostrarse en ZFE, pues se opondría al teorema de incompletud de Gödel. En general, los grandes cardinales dan lugar a modelos de ZFE cada vez más poderosos. Mientras más fuerte sea la consistencia relativa del gran cardinal, mejor se aproxima el universo $V$. Esto se expresa en términos de encajes elementales $j : V \hookrightarrow M$, donde $M$ es un modelo interno y $j$ no es trivial, en cualquier caso $M \neq V$ (Kunen).

Podríamos decir que una buena parte de la investigación actual en teoría de modelos se dedica al estudio de fortaleza en consistencia. Es decir, se indaga la relación entre los diferentes postulados independientes de ZFE.

**Definición 2.1.** Decimos que un principio combinatorio $A$ es más fuerte en consistencia que un principio $B$, $A \geq B$, si la consistencia del sistema $ZF + A$ implica la consistencia de $ZF + B$.

Se obtiene una imagen más que sorprendente de este orden parcial, basándonos en diversos resultados; para principios matemáticamente motivados, el orden es total, es decir, cualesquier dos principios son comparables en $\leq$. Más aún, se pueden representar clases de equiconsistencia en este orden mediante axiomas de grandes cardinales. Esto es, en una clase de equiconsistencia aparecen exactamente los modelos que admiten un cierto gran cardinal. Por principios matemáticamente motivados queremos decir axiomas acerca de cardinales, funciones, ultrafiltros, entre otros, frecuentemente motivados por otras áreas de las matemáticas. La consistencia de un enunciado se demuestra proporcionando un modelo (en lógica de primer orden). Para mostrar que un principio $B$ es consistente relativo con $A$, ($B \leq A$), se describe un método para transformar un modelo $M$ de $ZF + A$ en un modelo $M'$ de $ZF + B$. Sin contar aquellos casos simples, por ejemplo, si $A$ implica $B$, se utilizan básicamente dos técnicas que ya mencionamos.

- El método de forcing que da lugar a extensiones $M'$ de $M$. Típicamente, este procedimiento se aplica para colapsar un gran cardinal en $M$ y conseguir un $M'$ con las propiedades requeridas.

- El método de modelos internos que conduce a un submodelo $M'$ de $M$. Por lo general, mediante este proceder se encuentra un gran cardinal equiconsistente con la propiedad combinatoria.

Recientemente se ha empezado a plantear otra técnica para construir modelos internos: a partir de lógicas abstractas; en lugar de construir a los conjuntos definibles en primer orden, se escoge alguna lógica abstracta que extienda a $L_{\omega\omega}$, y se considera definibilidad en este marco nuevo. El ejemplo clásico es cuando $L$ es la lógica de segundo orden, o también, cuando es una lógica infinitaria (Chang).

Esto corresponde a la idea de que los cardinales «crecen» al reducir el modelo, pues desaparecen algunas biyecciones entre conjuntos. Pero la mayoría de los grandes cardinales no pueden existir en modelos demasiado «delgados»; por ejemplo, en $L$ no existen cardinales medibles, así que debemos mejorar nuestra intuición.

## 3. El universo construible de Gödel $L$

Un caso excepcional, por ser el primero, en el desarrollo de los modelos núcleo lo representa el modelo $L$ introducido por K. Gödel y que se ha estudiado con gran detalle, en gran medida, debido al asombroso trabajo de R. Jensen en teoría de estructura fina. Por cierto, señalamos aquí que este tipo de estructura fina, el introducido y trabajado por R. Jensen, es el que nos interesa usar en nuestra reseña. Existen diversas variantes de la misma o teorías desarrolladas en forma independiente, que pueden ser igualmente válidas, pero nosotros privilegiamos la de Jensen, porque la consideramos la más adecuada, flexible y susceptible de adaptarse a diversos escenarios. Más aún, existe un refinamiento, dado también por el Prof. Jensen, de la teoría de estructura fina, conocido como $\Sigma^*$-estructura fina, que involucra una lógica ligeramente distinta de la de primer orden, pues aparecen variables de diverso tipo. Esta nueva teoría es fundamental en los resultados recientes y en la incorporación de extensores.

Como ya dijimos, el primer modelo interno y el más sencillo es el universo construible $L$, desarrollado por Gödel con el ánimo de comprobar la independencia de ZF del axioma de elección y la consistencia de la HGC, véase [20], [21] y [22]. El universo construible $L$ está estratificado, y sus niveles se definen por recursión, como se establece a continuación,

$$\begin{aligned} L_0 &= \emptyset \\ L_{\alpha+1} &= Def(\langle L_\alpha, \in \rangle) \\ L_\beta &= \bigcup_{\alpha \in \beta} L_\alpha \qquad \text{para } \beta \text{ un ordinal límite} \\ L &= \bigcup_{\alpha \in Or} L_\alpha . \end{aligned}$$

Aquí $Def(\langle L_\alpha, \in \rangle)$ es el conjunto de subconjuntos de $L_\alpha$ que son definibles en la estructura $\langle L_\alpha, \in \rangle$ mediante una fórmula de lenguaje de la teoría de conjuntos LTC, posiblemente con parámetros. Esta función es absoluta entre modelos transitivos de ZF, por lo que tendremos el mismo $L$ cuando lo construyamos en un modelo interno. Para comprobar la validez de la HGC (y de numerosos resultados en $L$) se apela al lema de condensación, que a grandes rasgos establece que si $X \preccurlyeq L_\alpha$, donde $\alpha$ es un ordinal límite, entonces $X$ es en realidad un estrato $L_\beta$ con $\beta \leq \alpha$.

Muchas de las características importantes de la teoría de modelos núcleo están presentes en $L$: la existencia de una estratificación ≪fina≫ con propiedades de condensación, la existencia de un buen orden definible, la absolutez de la construcción (entre universos similares) y la posibilidad de demostrar teoremas de cubierta. Más aún, si en el universo existen grandes cardinales (no demasiado grandes), estos también aparecen en $L$. Por ejemplo, si en el universo existen cardinales inaccesibles, Mahlo, sutiles, inefables compacto débiles, desdoblables y muchos otros, ellos también viven en $L$. En cambio, como después trataremos, si existen cardinales medibles en el universo, entonces $V \neq L$.

No podemos dejar de lado la primera generalización de la construcción de $L$. Recuerde que éste se construyó usando la función $Def$ que arroja los conjuntos definibles en una estructura respecto al lenguaje de la teoría de conjuntos $\{=, \in\}$. ¿Qué pasa si agrandamos el lenguaje? De hecho, esta fue la idea que implementaron, por separado, A. Hajnal ([23], [24]) y A. Levy ([33], [34]). Estas construcciones dan lugar a jerarquías muy diferentes, aunque ambas logran probar la consistencia de la HGC o la independencia de $V = L$. La jerarquía de Hajnal es casi como la de $L$, con la salvedad de que el primer estrato es $L_0(A) = A$, donde $A$ es un conjunto transitivo arbitrario. La construcción prosigue como la de $L$ para estratos $L_\alpha(A)$ con $\alpha > 0$, por lo que $L(A)$ es el menor modelo de ZF que contiene a $A \cup \{A\}$. Esta clase no necesariamente satisface el axioma de elección. No trataremos esta construcción.

La jerarquía construible relativa dada por Levy es la siguiente, donde $A$ es una clase posiblemente propia.

$$
\begin{aligned}
L_0[A] =& \emptyset \\
L_{\alpha+1}[A] =& Def(\langle L_\alpha[A], \in, A\rangle) \\
L_\beta[A] =& \bigcup_{\alpha\in\beta} L_\alpha[A], \qquad \text{para } \beta \text{ un ordinal límite} \\
L[A] =& \bigcup_{\alpha\in Or} L_\alpha[A].
\end{aligned}
$$

En lugar de escribir $L_\alpha[A]$, y $L[A]$ también se anota $L^A_\alpha$ y $L^A$, respectivamente. En este orden de ideas, $L^A$ es modelo de ZFE, es de hecho, el menor modelo $M$ de ZFE que tiene a $A \cap M$ como elemento. En general, $A$ no es un subconjunto de $L^A$. La elección de la clase $A$ confiere propiedades especiales a $L^A$. Veremos que en muchos casos de interés, $A$ es un subconjunto de un cardinal, un ultrafiltro (filtro), o una sucesión de ultrafiltros o extensores. También $L^A$ presenta muchas de las propiedades amigables de $L$, aunque una excepción importante, y de hecho, que genera una dificultad esencial en los modelos núcleo, es que el lema de condensación deja de ser válido, al menos, en la forma tan poderosa que enunciamos antes. Si $X \preccurlyeq L^A_\alpha$, podemos colapsar $X$ (Teorema de Mostowski) y obtener $\pi : M \cong X \preccurlyeq L^A_\alpha$, donde $M$ es transitivo. Por propiedades de la aplicación colapso $\pi$, deducimos que $M = L_\beta[\overline{A}]$ para algún ordinal $\beta \leq \alpha$. Además, $\overline{A} = \pi^{-1}[A \cap X]$. Si $\overline{A} = A \cap L_\beta[\overline{A}]$, entonces $X \cong L_\beta[A]$. Pero en general, $L_\beta[\overline{A}]$ no es un estrato de la jerarquía original $L^A$. Un caso particular es cuando $A$ está contenido en un conjunto transitivo $X \preccurlyeq L^A_\alpha$, dando lugar a que $X \cong L_\beta[A]$, pues $\overline{A} = A$ en esta situación. En particular, si $A \subseteq \kappa$, entonces $2^\lambda = \lambda^+$ para todo $\lambda \geq \kappa$. De hecho, $L^A$ se comporta en buena medida como $L$ encima de $\kappa$.

Si $A \neq A'$, no parece haber mucha información disponible para comparar los modelos $L^A$ y $L^{A'}$. Las clases $A$ que codifican encajes elementales resultan ser muy útiles para este tipo de comparaciones; cuando $A$, $A'$ codifican encajes elementales distintos de $L[A]$, $L[A']$, respectivamente, con ciertas condiciones es posible usar los encajes para modificar los modelos de tal forma que puedan ser comparados. Esta idea será de enorme relevancia después, para comparar ratones y establecer la validez de la HGC y otros principios combinatorios.

En cuanto a la jerarquía $L^A$, ciertos conjuntos pueden codificar la estructura de gran cardinal y propiciar que en $L[A]$ aparezcan grandes cardinales mayores que los permitidos en $L$.

# 4. Modelos núcleo

Sea $P$ una propiedad de grandes cardinales. Quisiéramos exhibir una clase $C^P$ que defina el menor modelo interno que contenga un $P$-cardinal, si tal modelo interno existe. Para verificar que el principio $B$ es más fuerte en consistencia que $P$ es suficiente probar que $ZF+B$ implica que $C^P$ contiene un $P$-cardinal. Ahora podemos enunciar el propósito de la teoría de modelos núcleo: producir modelos internos «naturales» $C^P$ para una amplia variedad de grandes cardinales. ¿Qué queremos decir por «naturales»? Los modelos núcleo son modelos internos construibles. Ya mencionamos que el más simple de ellos es $L$. La absolutez de $L$ implica que $L^W = L$ para cualquier modelo interno $W$, por ello $L$ es el menor modelo interno.

El modelo $L$ fue concebido para probar la consistencia de la HGC y del AE; la prueba de la HGC se basa, como ya dijimos, en las propiedades de condensación de $L$: cualquier subestructura elemental (de hecho algo más débil es suficiente) de un estrato $L_\alpha$ es isomorfa a un $L_\beta$ con $\beta \leq \alpha$. Esto implica, en particular, que cada subconjunto de $\omega$ es elemento de algún $L_{\alpha+1} - L_\alpha$ con $\alpha$ numerable lo que inmediatamente implica la HC. La definición original de $L$ no permitía estudiar con suficiente precisión la aparición de nuevos conjuntos, así que R. Jensen desarrolló la jerarquía $J$ ([25]) que en cierto sentido «estira» cada estrato $L_\alpha$, introduce $\omega\alpha$ nuevos peldaños entre $L_\alpha$ y $L_{\alpha+1}$. Para definir esta nueva jerarquía requerimos la noción de función rudimentaria ([25], [26]), y el lenguaje de la teoría de conjuntos se extiende para incorporar dos nuevos símbolos de predicado $A$ y $B$. Los modelos correspondientes, llamados $J-$modelos, tienen la forma $\langle J_\alpha^A, B\rangle$ y son dóciles. Dado que en muchas áreas de la teoría de conjuntos no son conocidas y juegan un papel relevante en lo sucesivo, consideramos apropiado detallar un poco este tipo de funciones.

**Definición 4.1.** Sea $A$ un conjunto o una clase propia. Una función $f : V^k \to V$, donde $k < \omega$, es rudimentaria en $A$ (o $rud_A$) si se puede obtener mediante composición de algunas de las siguientes:

1. $f(x_1, \ldots, x_k) = x_i$.
2. $f(x_1, \ldots, x_k) = x_i - x_j$.
3. $f(x_1, \ldots, x_k) = \{x_i, x_j\}$.
4. $f(x_1, \ldots, x_k) = \bigcup_{y\in x_1} g(y, x_2, \ldots, x_k)$, donde $g$ es rudimentaria.
5. $f(x) = x \cap A$.

$f$ es rudimentaria (o rud) si es $rud_\emptyset$.

Si $U$ es un conjunto, denotamos mediante $rud_A(U)$ la cerradura rudimentaria de $U$, es decir, el conjunto

$$U \cup \{f(\vec{x}) : f \,\text{es}\, rud_A \,\text{y}\, \vec{x} \in U\}.$$

Ahora estamos listos para definir la jerarquía $J^A$.

$$\begin{aligned} J_0^A &= \emptyset \\ J_{\alpha+1}^A &= rud_A(J_\alpha^A \cup \{J_\alpha^A\}) \\ J_\lambda^A &= \bigcup_{\alpha<\lambda} J_\alpha^A, \qquad \lambda \text{ límite} \\ L[A] &= \bigcup_{\alpha \in Or} J_\alpha^A. \end{aligned}$$

Un $J$-modelo tiene la forma $M = \langle J_\alpha^A, B \rangle$ y es dócil, es decir, para cada $x \in J_\alpha^A$, ocurre que $B \cap x \in J_\alpha^A$. En general, las propiedades de los $J$-modelos requieren fortalecerse y se pide que estos sean aceptables, una variante fuerte de la HGC. Los estratos de la jerarquía $J$ son siempre aceptables (y correctos, la correctud es imposible de definir a este nivel). Si tomamos $A = \emptyset$, obtenemos $L$. Condensación es una virtud que esta nueva jerarquía resalta: si $x \in J_{\alpha+1} - J_\alpha$, $x \subseteq \omega$, entonces el hecho de que $x$ sea numerable ya lo sabe $J_{\alpha+1}$, es decir, en $J_{\alpha+1}$ existe una función sobre de $\omega$ en $x$. La $J$-jerarquía permite implementar ventajosamente las nociones de la estructura fina: proyectos, códigos maestros, condensación, etc. También admite un control estricto sobre la formación de nuevos conjuntos. Si una subestructura adecuada de $J_\alpha$ se condensa a $J_\beta$, y si un cierto conjunto es definible en $J_\alpha$, entonces una definición similar es realizable en $J_\beta$. El problema aparece cuando consideramos un predicado adicional $A$, esto es, $A \neq \emptyset$, pues como ya vimos, no funciona tan bien el lema de condensación. Para remediar esto, generalmente se trabaja con estratos $J_\alpha^A$ aceptables. Esto permite recrear muchos fenómenos convenientes de $L$ en $J^A$, y demostrar los principios combinatorios como el cuadrado o las morasses. Pero ¿qué relación guardan los hechos hasta ahora presentados?

Se puede decir que el estudio de modelos internos para grandes cardinales se inicia con la prueba de D. Scott ([44]) que establece que no pueden existir cardinales medibles en $L$. Si existieran tales cardinales en $L$, existiría un modelo interno $i^U : L \to M = Ult(L, U)$ en $M$ tal que $i^U(\kappa) > \kappa$, donde $\kappa$ es el menor medible en $L$ y $Ult(L, U)$ es la ultrapotencia de $L$ módulo el ultrafiltro $U$. Esto es imposible porque $M = L$ e $i(\kappa)$ sería el menor medible en $L$, pero $\kappa$ también lo es. Este resultado promovió investigaciones en dos direcciones.

- Examinar la existencia de medibles en $L$ condujo a J. Silver ([46]) al descubrimiento de $0^\#$.
- En la otra dirección se desarrolló el modelo $L[U]$ como el mínimo, análogo a $L$, que contiene un medible.

Estos resultados usan, en buena medida, las mismas técnicas y dieron lugar finalmente al modelo núcleo de Dodd-Jensen. Pero para ello faltan algunos ingredientes. Gaifmann ([17]) se dió cuenta pronto de que la construcción de la ultrapotencia de Scott podía iterarse y lograrla en una subestructura elemental numerable de un $V_\lambda$ apropiado. Por su parte, Silver [45] observó que si se parte de un cardinal Ramsey, o incluso de un $\omega_1$-Erdős, se puede construir un conjunto innumerable de indiscernibles para $L$. Silver extendió este conjunto de indiscernibles a una clase propia $I$, y si se elige su $\omega$-ésimo elemento como el menor posible, la clase $I$ será cerrada y no acotada, por lo que queda determinada en forma única. Con este conjunto $I$ a la mano, se define el conjunto $0^\# \subseteq \omega$ como el conjunto de números de Gödel de fórmulas que se satisfacen con los primeros $\omega$ indiscernibles. Posteriormente Kunen [32] demostró que la existencia de $0^\#$ se deriva de la presencia de un encaje elemental no trivial de $L$ en $L$. Otra consecuencia importante dada por Silver es que la existencia de $0^\#$ es la propiedad de gran cardinal más débil incompatible con $V = L$, esto es, si $0^\#$ existe, entonces $V \neq L$. En este sentido, $a^\#$, $a \subseteq \omega$, se define como la teoría de una clase cerrada y no acotada de indiscernibles para la estructura $\langle L[a], \in, a\rangle$.

En este punto vale la pena recordar la siguiente construcción de un ultraproducto, que ya mencionamos. Supongamos que $\{M_i : i \in I\}$ es una familia de estructuras en algún lenguaje $\mathcal{L}$, o simplemente, son conjuntos. Supongamos que $I$ es un conjunto infinito que porta un filtro $F$; es conocido que se puede construir el producto reducido de los $M_i$ módulo $F$, considerando clases de equivalencia en el producto cartesiano $\prod_{i\in I} M_i$, donde como se sabe, el producto cartesiano consiste en funciones $f : I \to \bigcup_{i\in I} M_i$, $f(i) \in M_i$ para cada $i \in I$. En el caso en que tratemos con $\mathcal{L}$-estructuras, el producto reducido se convierte en una $\mathcal{L}$-estructura, y si $F$ es un ultrafiltro, hablamos de un ultraproducto, mientras que si $M_i = M$ para toda $i \in I$, donde $M$ es un conjunto o una $\mathcal{L}$-estructura dada, en lugar de ultraproducto, decimos ultrapotencia. Hemos tratado con conjuntos, pero también se puede formar la ultrapotencia del universo $V$, cuando tenemos un ultrafiltro, por ejemplo, en un cardinal $\kappa$. En este caso se consideran funciones $f : \kappa \to V$, necesariamente $f \in V$.

Si $\kappa$ es un cardinal medible y $U$ es un ultrafiltro $\kappa$-completo en $\kappa$, la ultrapotencia de $V$ módulo $U$, $Ult(V, U)$, es de excepcional interés en diversos aspectos. Como $U$ es $\kappa$-completo, la ultrapotencia está bien fundada y podemos colapsarla a una clase transitiva $M$, que resulta entonces un modelo interno. En particular, obtenemos un encaje elemental

$$i : V \hookrightarrow M$$

no trivial con punto crítico $\kappa$, esto es, $\kappa$ es el primer ordinal que no queda fijo respecto a $i$. De hecho, se verifica que $\kappa$ es medible si y sólo si existe un encaje elemental

$$i : V \to M \tag{$\circledast$}$$

no trivial con punto crítico $\kappa$ y $M$ transitivo. Suele usarse esto último como definición de cardinal medible. No obstante, esta definición tiene el inconveniente de que no se puede formular en ZFE, pues involucra clases propias ($V$, $M$) que no son conjuntos. En cambio, la definición en términos de un ultrafiltro se logra en ZFE. Este tipo de definiciones equivalentes son las que se buscan en grandes cardinales mayores que medibles. Si definimos medible de acuerdo con el encaje (❋), en principio no contamos con un ultrafiltro normal en $\kappa$; pero podemos obtener uno a partir del encaje mediante la prescripción

$$U = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in i(X)\}.$$

Tal construcción de ultrafiltros, a partir de encajes elementales, se abstrae de tal suerte que, dependiendo del encaje $i : V \hookrightarrow M$, se logran definir ultrafiltros en $Pot_{<\kappa}(\mu)$ (subconjuntos de $\mu$ de tamaño menor que $\kappa$), o bien extensores que son sucesiones coherentes de ultrafiltros. Al final, la construcción del ultrafiltro o extensor, depende de la función identidad. En el caso de un ultrafiltro normal $U$ en $\kappa$, la clase de equivalencia de la función identidad satisface $[id \restriction \kappa]_U = \kappa$, por lo que se escoge $\kappa \in i(X)$ como criterio. Pero $[id \restriction \kappa]_U$ puede variar según las propiedades de $U$ y esto da lugar a un encaje con propiedades distintas, con esto se logra aproximar $M$ a $V$, aunque nunca serán iguales.

# 5. $L[U]$

Si suponemos que existe un cardinal medible, digamos $\kappa$, sabemos que contamos con un ultrafiltro $\kappa$-completo $U$ que podemos considerar también normal (aunque no siempre se requiere la normalidad); llamaremos a este tipo de ultrafiltros una medida en $\kappa$; antes construimos la jerarquía construible relativa $L^A$, por lo que tomamos $A = U$ y obtenemos $L[U]$. Solovay dedicó parte de su investigación al modelo $L[U]$. Si $U$ es una medida en un cardinal $\kappa$, $U \cap L[U] \in L[U]$ es también una medida en $\kappa$ según $L[U]$, y ya vimos que $L[U]$ es modelo de ZFE, para el caso general $L^A$, y que el lema de condensación no se cumple, en general, en $L[U]$, pero sí en ocasiones, por ejemplo para conjuntos $X \preccurlyeq L_\gamma[U]$ con $\kappa \subseteq X$ y $\kappa < \gamma$. Esto conduce a la validez de la HGC de $\kappa$ hacia arriba, donde para verificarla debajo de $\kappa$ se requirió un examen más detallado, para lo cual Silver empleó un teorema de partición de Rowbottom e indiscernibles para lograrlo; Solovay también demostró que $\kappa$ es el único medible en $L[U]$. Posteriormente, Kunen refinó [32] el estudio de $L[U]$ mediante el empleo de iteración de ultrapotencias, para lo que Kunen definió $M$-ultrafiltro en un modelo transitivo $M$ y construyó ultrapotencias con este tipo de ultrafiltros. Esto es, si $M$ es un conjunto o una clase propia (no necesariamente $V$), $\kappa \in M$, $M$ puede pensar que $U$ es un ultrafiltro normal

$$(M, U) \models U \text{ es una medida en } \kappa$$

(note que $U \subseteq M$, pero puede ocurrir que $U$ no es elemento de $M$, que $M$ no «conozca» a $U$) aunque $U$ puede no ser una medida en $\kappa$ según $V$, pues puede ocurrir que los testigos de que $U$ no es una medida en $\kappa$ según $V$, no vivan en $M$.

Se verifica que si los modelos $L[U]$, $L[U']$ satisfacen que $U, U'$ son medidas en el mismo cardinal $\kappa$, entonces $L[U] = L[U']$. Así que, $U \cap L[U]$ es la única medida en $L[U]$ y $L[U]$ es definible en cualquier término clase modelo de ZFE+"$\kappa$ es un cardinal medible”. Kunen usa técnicas que son importantes para la teoría de modelos internos. Si $M$ es un modelo y $U$ es una medida en $\kappa$ según $M$, las ultrapotencias iteradas $i_\alpha^U : M \to Ult_\alpha(M, U)$ se definen mediante la siguiente prescripción,

$$\begin{aligned} Ult_0(M, U) &= M \\ Ult_{\alpha+1}(M, U) &= Ult(Ult_\alpha(M, U), i_\alpha(U)) \end{aligned}$$

y en la etapa límite se considera el límite directo. Los $Ult_\alpha(M, U)$ se llaman iterados (el $\alpha$-ésimo iterado) de $(M, U)$.

Ya mencionamos que Silver demostró la HGC en $L[U]$ «debajo» de $\kappa$, esto es, que $2^\lambda = \lambda^+$, apelando a indiscernibles. La prueba de la HGC en $L$ se puede vislumbrar de la siguiente manera. Sabemos que siempre ocurre $\lambda^+ \leq 2^\lambda$; para la otra desigualdad, lo que se demuestra es que dado cualquier $x \subseteq \lambda$, el conjunto de $<_L$-predecesores ($<_L$ es un orden lineal, de hecho, un buen orden) de $x$ que son subconjuntos de $\kappa$ tiene tamaño $\leq \lambda$, lo que implica que $|Pot(\lambda)| \leq \lambda^+$. Para lograr lo anterior se recurre a condensación. Ahora, tratemos de recrear esto para probar $2^\lambda \leq \lambda^+$ en $L[U]$, $\lambda < \kappa$. Dado que $V = L[U]$, para $x \in Pot(\lambda)$ podemos encontrar un cardinal regular $\tau$ tal que $x \in L_\tau[U]$, donde $L_\tau[U] \models ZF^-$. Generamos una subestructura elemental $X \preccurlyeq L_\tau[U]$, con $x \in X$, $\lambda \subseteq X$, $|X| = \lambda$, la cual colapsamos para obtener $M_x$ que tiene la forma $M_x = L_{\alpha_x}[U_x]$ para algún $\alpha_x < \lambda^+$ y un ultrafiltro normal $U_x$ según $M_x$ en un cardinal $\mu$ según $M_x$ con $\lambda < \mu$. Note que, posiblemente, $U_x \neq U$. Requerimos probar que el conjunto $P$ de subconjuntos de $\lambda$ que son predecesores de $x$ (en $L[U]$) tiene tamaño $\leq \lambda$, para lo cual es suficiente verificar que $P \subseteq M_x$. El problema es que no tenemos $U_x = U$, por lo que $M_x$ puede desconocer algunos elementos de $P$. Para descartar esta posibilidad, se recurre a iteración de ultrapotencias a través de la cual, en un sentido bien definido, se muestra que $M_x$ es comparable con un iterado de $L[U]$, y la definición de comparable implica que $P \subseteq Pot^{L_{\alpha'_x}[U]} \subseteq M_x$ para un $\alpha'_x$ adecuado. Aquí se usa la noción de ultrapotencias comparables y que todas las aplicaciones ultrapotencia (en la iteración) dejan fijo a $\lambda$, es decir, su punto crítico es $> \lambda$. No obstante, el proceso de comparación tiene éxito en este caso porque en un iterado suficientemente posterior, coincide con el filtro club correspondiente. Como veremos, esto no se puede lograr en modelos núcleo superiores, pero sí son rescatables muchas ideas sobre la comparación.

Si $L[U]$, $L[U']$ son como antes, entonces

$$Ult_{\kappa^{++}}(L[U], U) = Ult_{\kappa^{++}}(L[U'], U'),$$

porque ambos modelos son iguales a $L[\mathbb{C}_{\kappa^{++}}]$, donde $\mathbb{C}_{\kappa^{++}}$ es el filtro club en $\kappa^{++}$. De esto y otras observaciones se desprende que $L[U] = L[U']$. Si $U$, $U'$ fuesen medidas en cardinales diferentes $\kappa$, $\kappa'$, $\kappa < \kappa'$, entonces $L[U']$ es un iterado de $L[U]$, lo que conduce a una contradicción. Esto es, el único cardinal medible en $L[U]$ es $\kappa = \kappa'$. Por su parte, Solovay definió $0^\dagger$ usando indiscernibles para $L[U]$, en la misma forma que se construye $0^\#$ respecto a $L$.

De lo anterior surge la pregunta obvia: ¿cómo conseguir más medidas en un modelo interno? En [32] se presenta una prueba por inducción de que todo cardinal medible tiene una medida que se concentra[1] en cardinales más pequeños no medibles. Sea $\kappa$ un cardinal medible y $U$ una medida en $\kappa$. Supongamos que $U$ no se concentra en cardinales medibles más pequeños, entonces existe una medida $U_\kappa \neq U$ que sí lo hace; sería natural pensar que $L[U, U_\kappa]$ tiene dos medidas distintas, pero no es así. Se verifica que $L[U] = L[U, U_\kappa]$ porque la definición recursiva de $U_\kappa$ implica que las medidas $U$, $U_\kappa$ coinciden en cualquier conjunto que se construya usándolas como predicados. Kunen planteó la pregunta de si podría existir un modelo interno con 2 o más medidas distintas.

En el caso en que $U \neq U_\kappa$, en el proceso de construcción de $U_\kappa$ se generan medidas $U_\lambda$ para cada $\lambda < \kappa$. Resulta que $L[(U_\lambda : \lambda < \kappa), U, U_\kappa]$ sí es un modelo con al menos dos medidas en $\kappa$, porque la presencia de la sucesión de medidas como predicados permite discernir en este modelo que $U \neq U_\kappa$. En este orden de ideas, se corrobora que $U_\kappa \in Ult(V, U)$.

W. Mitchell ([36], [38]) continuó con la idea de incorporar sucesiones de medidas para construir modelos internos. Una herramienta esencial en este devenir es el orden de Mitchell (entre medidas): si $U$, $U'$ son ultrafiltros normales en un cardinal $\kappa$, escribimos $U' \lhd U$ cuando $U' \in Ult(V, U)$, y se verifica que este orden está bien fundado, por lo que se pueden introducir las siguientes nociones, mismas que serán preponderantes en modelos núcleo superiores, aunque su definición, lo mismo que la del orden de Mitchell, se traslade después a sucesiones de extensores. El orden de una medida es $o(\mathcal{U}) = \sup\{o(U') + 1 : U' \lhd U\}$ y el orden de un cardinal se define como $o(\kappa) = \sup\{o(U) + 1 : U \text{ es una medida en } \kappa\}$. Solovay [47] demostró que si $U$ es un ultrafiltro normal en un cardinal $\kappa$, entonces $o(U) \leq (2^\kappa)^+$, por lo que en presencia de la HGC, $o(U) \leq \kappa^{++}$. En cuanto a resultados en esta dirección, pero sin influir mayormente en la teoría de modelos núcleo se cuentan los siguientes.

Silver y Kunen establecieron que las técnicas usadas para $L[U]$ se extienden a $L[\mathcal{U}]$ en tanto $\alpha$ (la cantidad de medidas) sea numerable (Silver) o que $\alpha$ sea menor que el primer medible $\kappa_0$ en la sucesión $\mathcal{U}$ (Kunen). Después Kunen construye modelos con una cantidad arbitraria de medibles si se supone que $\kappa$ es compacto fuerte, o que la HGC falla en un medible $\kappa$ o que todo filtro $\kappa$-completo se puede extender a un ultrafiltro $\kappa$-completo.

La pretensión de Mitchell fue definir modelos internos con sucesiones de medidas. Por supuesto, definir $L[\vec{U}]$, donde $\vec{U}$ es una sucesión de medidas no representa ningún desafío, pues como ya mencionamos, simplemente tomamos $A = \vec{U}$ en la definición de la jerarquía construible. El problema es que el modelo $L[\vec{U}]$ construido así, con tan poco cuidado, permite probar muy poco; no hay nada que indique qué grandes cardinales viven en este modelo, o que se cumpla la HGC (HC), u otros principios combinatorios. Incluso $L[U]$ es difícil

[1]Esto es, si $\kappa$ es el cardinal medible en cuestión, existe una medida $U$ en $\kappa$ tal que el conjunto $\{\mu < \kappa : \mu \text{ no es medible}\}$ pertenece a $U$.

de tratar, aunque sólo tenga una medida, de suerte que $L[\vec{U}]$ sería demasiado esquivo, a menos que impongamos algunas restricciones en la sucesión $\vec{U}$, y aquí es donde se recuperan las ideas previas, aparecen nuevos fenómenos que a su vez trascenderán a modelos con sucesiones de extensores.

Una sucesión coherente de medidas es una función $\mathcal{U}$ con diversas propiedades, entre ellas las siguientes.

- $dom(\mathcal{U}) = \{(\kappa, \beta) : \beta < o^{\mathcal{U}}(\kappa)\}$ (aquí el superíndice $\mathcal{U}$ refiere a medidas en la sucesión $\mathcal{U}$).
- Si $(\kappa, \beta) \in dom(U)$, $U = \mathcal{U}(\kappa, \beta)$ es un ultrafiltro normal en $\kappa$.
- Si $U = \mathcal{U}(\kappa, \beta)$, entonces $o^{i^U(\mathcal{U})}(\kappa) = \beta$ e $i^U(\mathcal{U})(\kappa, \beta') = \mathcal{U}(\kappa, \beta')$ para cada $\beta' < \beta$.

Más allá de lo mucho que dice la definición, la coherencia (la última claúsula) asegura que las medidas no se traslapan. Con esta definición se demuestra que en $L[\mathcal{U}]$, los únicos ultrafiltros normales son los elementos de la sucesión $\mathcal{U}$. Además, cada cardinal $\kappa$ tiene $|o^{\mathcal{U}}(\kappa)|$ ultrafiltros normales en $L[\mathcal{U}]$, y $L[\mathcal{U}]$ es modelo de ZFE+HGC. Se sigue que si podemos construir una sucesión coherente $\mathcal{U}$ adecuada, $L[\mathcal{U}]$ será un modelo con una cantidad dada $\delta$ de medidas en un cardinal $\kappa$, $0 \leq \delta \leq \kappa^{++}$. Por supuesto, esto depende de $o(\kappa)$. Mitchell introdujo los cardinales $\mu$-medibles ([37]) para obtener sucesiones con $o(\kappa) = \lambda$ para cada $\lambda \leq \kappa^{++}$. Por cierto, en este contexto, aparece con mucha frecuencia la hipótesis $\exists\kappa(o(\kappa) = \kappa^{++})$. En aquel tiempo, para satisfacer esta hipótesis sólo se conocían a los cardinales supercompactos. Después se debilitó la exigencia de coherencia en $V$, sólo se pide un cierto orden entre las medidas, pero la sucesión se convierte en coherente en $L[\mathcal{U}]$. Es notorio que para construir $L[\mathcal{U}]$ se requiere un cambio drástico en el uso de estructura fina, mientras que en el modelo de Dodd-Jensen, la misma aparece, digamos, «a posteriori», en la construcción de $L[\mathcal{U}]$ se requiere para definir la sucesión $\mathcal{U}$ por recursión. De hecho, uno de los resultados esenciales es el siguiente: *Si $\mathscr{F}$ es una sucesión de filtros tal que para cada $(\alpha, \beta)$ en el dominio de $\mathscr{F}$, el filtro $\mathscr{F}(\alpha, \beta)$ es normal de orden $\beta$ en $L[\mathscr{F} \restriction (\alpha, \beta)]$ y es numerablemente completo, entonces $\mathscr{F}$ es una sucesión fuerte en el sentido de que cualquier filtro $\mathscr{F}(\alpha, \beta)$ es un ultrafiltro en el modelo núcleo resultante.* Esto se emplea para construir una versión preliminar $K^c$, el modelo núcleo numerablemente completo; se hace $K^c$ igual a $K[\mathscr{F}]$, donde $\mathscr{F}$ es la sucesión máxima de medidas numerablemente completas definida por recursión añadiendo un filtro $\mathscr{F}(\alpha, \beta)$ siempre que se satisfagan ciertas condiciones.

Antes vimos que una forma de probar la HGC (y otros principios combinatorios) en $L[U]$ es mediante comparación de ultrapotencias iteradas, lo que en $L[U]$ se basa en la aparición del filtro club, en un cardinal suficientemente grande; en las iteraciones, se comparan dos ultrafiltros normales $U, U'$ mediante el filtro club. En el caso de sucesiones de medidas, se iteran dos sucesiones de medidas $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ para compararlas, donde en lugar del filtro club aparece una sucesión de medidas $\mathcal{W}$. Así, si $L_\alpha[\mathcal{U}]$ y $L_\beta[\mathcal{U}']$ satisfacen $ZF^-$, $\mathcal{U}$,$\mathcal{U}'$ son coherentes en $L_\alpha[\mathcal{U}]$ y $L_\beta[\mathcal{U}']$, respectivamente, entonces existen una sucesión $\mathcal{W}$, y ordinales $\xi, \zeta$, tales que existen ultrapotencias iteradas $i : L_\alpha[\mathcal{U}] \to L_\xi[\mathcal{W} \restriction \xi]$ e $i' : L_\beta[\mathcal{U}'] \to L_\zeta[\mathcal{W} \restriction \zeta]$ (en realidad, esto funciona también cuando alguno o los dos modelos originales son clases propias); para lograr probar esto, se usa una técnica conocida como iterar la menor diferencia, mediante la cual, con sumo cuidado, durante la iteración se «eliminan» los conjuntos diferentes en $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$, hasta llegar a una iteración en la que no se distingan estas sucesiones. Aquí juega un papel preponderante que las iteraciones se realicen de tal suerte que los puntos críticos de las aplicaciones ultrapotencia crezcan estrictamente. Una consecuencia de esto es que los puntos críticos de los ultrafiltros no se mueven en iteraciones posteriores (algo que se conoce como inamovilidad de los generadores y que sera importante también en sucesiones de extensores). Esta técnica también permite mostrar que las únicas medidas en $L[\mathcal{U}]$ son los elementos de $\mathcal{U}$. Por supuesto, algo implícito en este proceso es que podamos iterar y continuar la iteración tanto como sea necesario. En el caso de sucesiones de medidas, el criterio prevaleciente para asegurar iterabilidad es que los ultrafiltros sean numerablemente completos.

# 6. El teorema de cubierta

Es momento de regresar a $L$, en concreto al llamado teorema de cubierta (Jensen) para $L$, porque este es uno de los ingredientes en la «definición» de modelo núcleo. Después de presentar la teoría de estructura fina para $L$, Jensen introdujo (y demostró su validez en $L$) numerosos principios combinatorios, ahora fundamentales: el diamante, el cuadrado, Morasses, etc. (para los primeros, véase [25], en cuanto Morasses consulte [2] o [48]). Una de las principales motivaciones para Jensen fue dar una solución a un problema muy relevante en ese momento: la hipótesis del cardinal singular (SCH), donde la hipótesis del cardinal singular es la aseveración de que $\lambda^{cf(\lambda)} = \text{máx}(\lambda^+, 2^{cf(\lambda)})$ para todo cardinal singular $\lambda$. En 1974 R. Jensen distribuye un manuscrito con la primera versión del teorema de cubierta, para dar, en el mismo año, la versión final del mismo. La prueba definitiva aparece en [3].

**Teorema 6.1** (Teorema de cubierta para $L$)**.** *Suponga que $\neg 0^\#$ y sea $X$ un conjunto innumerable de ordinales. Entonces, existe un conjunto $Y \in L$ tal que $|X| = |Y|$ y $X \subseteq Y$.*

La prueba del teorema de cubierta depende fuertemente de la teoría de estructura fina, y en alguna de las versiones de la prueba aparece el embrión de lo que posteriormente se conocerá como *Liftup*, una suerte de ultrapotencia, construcción que se torna muy relevante en [26]; demostraciones recientes incorporan también extensores. Lo anterior da lugar a dos cuestiones fundamentales para nosotros: la necesidad de estructura fina y el teorema de cubierta. Como ya mencionamos, R. Solovay había hecho un estudio minucioso del modelo

$L[U]$, de hecho, en cierta medida extendió la estructura fina de $L$ a este modelo, pero había muchas dificultades, sin contar que se requiere de inicio la existencia de la medida $U$. Jensen y Dodd emprendieron el estudio de la estructura fina de $L[U]$, desde otra perspectiva. En lugar de suponer que existe un modelo $L[U]$ con un medible, usaron aproximaciones a tal modelo, llamadas ratones. Un ratón es una estructura $M = J_\alpha[U]$ con tres propiedades.

(i) $M$ piensa que $U$ es una medida en algún $\kappa$.

(ii) Sus iterados están bien fundados.

(iii) Admite estructura fina y su proyecto $\rho^M$ es menor que el punto crítico de la ultrapotencia.

Sobre la noción de proyecto: es una medida de la «rigidez» del modelo $M$, hasta qué punto es cerrado respecto a subconjuntos, en primera instancia, $\Sigma_1$-definibles.

Si $U$ es una medida en $\kappa$, $J_{\kappa+1}[U]$ es igual a $J_{\kappa+1}$, pero $0^\sharp$ es $\Sigma_1$-definible en $(J_{\kappa+1}[U], \in, U)$: el número de Gödel $\ulcorner\varphi(c_0, \ldots, c_n)\urcorner$ pertenece a $0^\sharp$ si y sólo si

$$\exists X \in U^n \cap J_{\kappa+1}[U] \forall(\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}) \in X (J_{\kappa+1}[U] \models \varphi(\nu_0, \ldots, \nu_{n-1})).$$

Si tomamos el colapso de una $\Sigma_1$-subestructura elemental apropiada, obtenemos una estructura numerable $M = J_{\overline{\kappa}+1}[\overline{U}]$, sobre la que $0^\sharp$ es definible, así que $M$ y $0^\sharp$ son equiconstruibles. Es importante señalar que la medida $U$ en un ratón $M = J_\alpha[U]$ no es una medida en $V$; de hecho, la teoría de estructura fina asegura que $J_{\alpha+1} \models |\alpha| = \rho^M < cri(U)$, (donde $\rho^M$ es el proyecto de $M$) así que $U$ no es una medida en ningún modelo más grande que $M$. Se sigue que si $M = J_\alpha[U]$ y $J_{\alpha'}[U']$ son dos ratones, ninguno de ellos es un segmento inicial del otro, como ocurre con cualesquier dos niveles de la jerarquía $J$. No obstante, se pueden comparar iterándolos porque los ratones tienen estructura fina y el proyecto de $M$ es menor que el punto crítico, lo que asegura que los iterados preservan las definiciones apropiadas. El uso de comparación entre iterados propicia un buen orden entre ratones:

$$M \lhd M' \iff M \text{ aparece en un iterado de } M'.$$

Esto permitió a Jensen y Dodd formular el modelo núcleo $L[\mathscr{M}]$, donde $\mathscr{M}$ es la clase de todos los ratones ([6], [7], [8] y [4]). Este modelo se llamó originalmente $K$ y actualmente también se emplea la notación $K^{DJ}$. Mediante propiedades de los ratones, se reproducen propiedades básicas de $L$ en $K^{DJ}$, a saber, variaciones del diamante, cuadrado, morasses, etc. (véase [49]). Dodd y Jensen mostraron que $K^{DJ}$ es el puente entre $L$ y $L[U]$ en el sentido de que si $0^\sharp$ no existe, $K^{DJ} = L$. De no existir un cardinal medible, pero sí $0^\#$, este último pertenece a $K^{DJ}$. Si existe un modelo $L[U]$ con una medida $U$ en $\kappa$, entonces $K^{DJ}$ es igual al segmento inicial de longitud ordinal de $Ult_{Or}(L[U], U)$, o en forma equivalente, a $\bigcap_{\alpha \in Or} Ult_\alpha(L[U], U)$. En particular $V_\kappa^{K^{DJ}} = V_\kappa^{L[U]}$. Ellos probaron dos lemas de cubierta.

- Suponga que no existe un modelo interno con un cardinal medible. Entonces, para cualquier conjunto de ordinales innumerable $x$ existe un conjunto $y \supseteq x$ en $K^{DJ}$ de la misma cardinalidad.
- Si existe $L[U]$ pero no $0^\dagger$, la conclusión se bifurca. (a) $L[U]$ tiene la propiedad de cubierta o (b) existe una sucesión de Prikry $C$ tal que $L[U, C]$ tiene la propiedad de cubierta.

Aquí, $C$ es la sucesión numerable de ordinales dada por el forcing de Prikry, $C$ es cofinal en $\kappa$. Ellos probaron que la existencia de un encaje elemental no trivial $i : K^{DJ} \to K^{DJ}$ implica que existe un modelo $L[U]$ con un cardinal medible; el punto crítico de $i$ es medible, pero puede ser menor que el cardinal medible en $L[U]$ (Jensen). Con el modelo $K^{DJ}$ disponible se pudo demostrar que si la HCS es falsa, entonces existe $0^\dagger$ (el correspondiente $0^\#$ para $L[U]$). La idea de la prueba de este hecho es que si $0^\dagger$ no existe, entonces existe un modelo de la forma $K^{DJ}$, $L[U]$ o $L[U, C]$ que tiene la propiedad de cubierta. Dado que estos modelos satisfacen la HGC, esto implica que la HCS se cumple en $V$. En [11] se demuestra que cualquier cardinal $\delta$-Erdős, de hecho cada cardinal $\delta$-Jónsson, es $\delta$-Erdős en $K^{DJ}$ con lo que se obtiene un modelo mínimo para estos cardinales.

En este punto podemos, al menos tratar, de dar una especie de definición preliminar de modelo núcleo, para lo que es importante considerar algunas de las propiedades recién descritas.

- El modelo se estructura en una jerarquía, en la que cada etapa contiene sólo conjuntos que, en forma evidente, deben estar en cualquier modelo que contenga los estratos previos. Así, el modelo resultante es el menor posible.
- Se satisface un teorema de cubierta.
- Contiene ciertos grandes cardinales.

Según este orden de ideas, el modelo que hoy se conoce como modelo núcleo, y se denota $K$, se puede definir como el modelo de ZFE mínimo que está jerarquizado, contiene toda la estructura de grandes cardinales en el universo, satisface un teorema de cubierta, y permite un análisis de estructura fina. El hecho de que el modelo núcleo se presente como una jerarquía tiene varias consecuencias, una de ellas es que cada estrato contiene sólo aquellos conjuntos que ≪deben≫ pertenecer en cualquier modelo que contenga los estratos previos, así que el modelo núcleo resultante es el menor posible que contenga a todos los ordinales, inclusive cualquier fragmento de un cardinal medible.

Hasta este punto hemos descrito cuatro modelos núcleo $L, K^{DJ}, L[U]$ (aunque este propiamente puede no ser considerado modelo núcleo), y $L[\mathcal{U}]$; cada uno de ellos aparece según la estructura de grandes cardinales en $V$. Describimos tres teoremas de cubierta. A saber, para $L$ si $0^\#$ no existe, para $K^{DJ}$ cuando $0^\#$ existe pero no $L[U]$, y para $L[U]$ cuando $L[U]$ existe pero no $0^\dagger$.

Estos modelos núcleo $K$ son rígidos, esto es, no existe un encaje elemental no trivial $i : K \to K$, aunque esto se debilita en el caso de $L[U]$, pues al construir la ultrapotencia de $L[U]$ módulo $U$, obtenemos $i : L[U] \to M$. Además, el modelo núcleo es absoluto; en el caso de $L$ y $K^{DJ}$ esto se cumple en la forma $K^M = K \cap M$ para cualquier modelo innumerable $M$ de $ZFE$, en cambio en el caso $L[U]$ la absolutez es más débil pues $K^M$ puede ser un iterado de $L[U]$. El teorema de cubierta indica que $K$ debe ser cercano a $V$, aunque esto puede involucrar la estructura de grandes cardinales en $V$. En cuanto a grandes cardinales presentes en $L$, $K^{DJ}$ o $L[U]$ son desde inaccesibles hasta medibles. ¿Qué queremos decir con ello? si suponemos $V = K$ existen algunas restricciones sobre la existencia de ciertos grandes cardinales. En el caso $K = L$, no pueden existir cardinales medibles, de hecho, no pueden existir cardinales $\omega_1$-Erdős; si $K = K^{DJ}$ y no existen cardinales medibles, entonces en $K$ sí pueden existir cardinales Ramsey, $\alpha$-Erdős, etc. Cuando existe un cardinal medible, ya vimos que $K$ es la intersección de las ultrapotencias iteradas $Ult_\alpha(L[U], U)$, para toda $\alpha \in Or$. Finalmente, si $K = L[U]$, sabemos que sólo puede existir un cardinal medible. Dado que no pueden existir siquiera 2 cardinales medibles, no pueden existir cardinales mayores como fuertes, superfuertes, etc.

Pero en estos asuntos del teorema de cubierta hemos dejado de lado un modelo que ya conocemos: $L[\mathcal{U}]$. El desarrollo del correspondiente teorema de cubierta para estos modelos incorpora situaciones no vistas antes. En el caso de $L$ o $L[U]$ la construcción de estos modelos está «dada» de antemano y «después» se desarrolla la teoría de estructura fina. Para $K^{DJ}$ la situación es un tanto distinta, pues para su definición se incorpora, hasta cierto punto, la estructura fina, pues como vimos se define en términos de ratones y la definición de estos usa nociones de estructura fina.

En cambio, como ya se mencionó, para construir $L[\mathcal{U}]$ requerimos que la sucesión $\mathcal{U}$ sea coherente o al menos coherente débil y se vuelva coherente en $L[\mathcal{U}]$, pero para lograr esto se debe proceder con cuidado. Se parte de una sucesión $\mathscr{F}$ de filtros en $V$ que se pretende se conviertan en ultrafiltros en $K[\mathscr{F}]$, el modelo núcleo para sucesiones de medidas. En realidad, en la construcción no se hace uso de la estructura de $\mathscr{F}$, se considera como un conjunto arbitrario pero sirve de apoyo. La construcción es muy compleja, lo importante en nuestro caso es que la construcción de la sucesión $\mathscr{F}$ real procede por recursión, apelando a $\mathscr{F}$-ratones, y requiere de la teoría de estructura fina para llevar a buen término la construcción recursiva, pues a la sucesión de filtros se incorporan aquellos en $\mathscr{F}$ que se convierten en ultrafiltros en $K[\mathscr{F}]$. Destacamos esto último porque será una herramienta indispensable en la construcción de modelos núcleo superiores. Para lograr la construcción y dado que se están incorporando filtros adecuados a la sucesión, se define una versión preliminar del modelo núcleo, arriba mencionada, $K^c$, donde $K^c$ es igual al modelo $K[\mathscr{F}]$ y $\mathscr{F}$ es una sucesión máxima de medidas numerablemente completas que se define por recursión como recién describimos.

Mitchell demuestra que $K^c$ satisface el teorema de cubierta débil, esto es, para todo cardinal suficientemente grande $\lambda$ límite fuerte el sucesor de $\lambda$ calculado en $K^c$ es igual al sucesor calculado en $V$. En este desarrollo aparece un resultado (técnica) de enorme utilidad posteriormente que se conoce como el lema de Dodd-Jensen; éste establece esencialmente que una ultrapotencia iterada es mínima entre los encajes $\Sigma_0$-elementales a un mismo modelo final. Es importante describirlo con exactitud. Suponga que $i : M \to M'$ es una ultrapotencia iterada del preratón $M$ y $\sigma : M \to M'$ es un encaje $\Sigma_0$-elemental. Entonces $ran(\sigma)$ es cofinal en $M'$, y $\sigma(\alpha) \geq i(\alpha)$ para cada ordinal $\alpha$ en $M$. Es de mencionar que la construcción de Mitchell del modelo núcleo $K$ da lugar a $L$ cuando $\neg 0^{\#}$, a $K^{DJ}$ cuando no existe un modelo interno con un cardinal medible, a $L[U]$ si existe un modelo interno con un cardinal medible y $\neg 0^{\dagger}$.

Una vez que hemos descrito varias características de los modelos internos involucrados, vale la pena proponer fuentes literarias que permitan al lector profundizar en estos asuntos.

## 7. ¿Dónde consultar?

Este es un asunto nada trivial, pues lo que se debe aprender para incorporarse a la teoría de modelos núcleo es sensiblemente extenso. Lo primero a tener en cuenta es que la teoría de estructura fina es indispensable para seguir adelante. No obstante, históricamente ésta se desarrolló primero para $L$ y después para la jerarquía construible relativa. La primera presentación formal para $L$ se puede consultar en [25] o [2]. Con esta última referencia se debe tener cuidado, pues en la primera parte del libro se constuye $L$ en gran detalle (sin tratar aún la estructura fina), pero Devlin intentó simplificar la teoría trabajando en un fragmento débil de ZFE; el fragmento resulta demasiado débil para demostrar los resultados requeridos por Devlin. Existen diversas maneras de reparar esta deficiencia, quizá la fuente recomendable sea [35], donde se propone un sistema suficientemente fuerte para construir $L$ y probar diversos resultados de este universo. En la segunda parte del libro de Devlin se construye la estructura fina en forma detallada, se presentan diversas aplicaciones, como la demostración de algunas equivalencias de ser compacto débil en $L$, morasses, árboles, etc. Hasta cierto punto, esta presentación corresponde a la de [25]. Sin embargo, encontramos un problema en ambas, que no es menor. Una de las nociones fundamentales de la teoría de estructura fina es la de proyecto. La definición de éste dada originalmente por Jensen ha cambiado a lo largo del tiempo, y la que aparece en [25] o [2] no es la que actualmente se usa; esto no es motivo para desechar ambos trabajos, pues ambos presentan algunos detalles que son de enorme utilidad. Para remediar esto, se recomienda leer los inicios de la teoría de estructura fina en [26], auxiliándose de los trabajos mencionados. Otra fuente recomendable es [48]. En [18] se presenta también un desarrollo detallado de la teoría de estructura fina, así como de los antecedentes necesarios. Es importante que el lector esté conciente de que la definición de proyecto sí puede ser un problema mayúsculo para seguir la literatura actual.

Como ya dijimos, se recomienda leer [26] donde aparece la teoría de estructura fina para la jerarquía $J^A$, de hecho, se presenta en abstracto, para los así llamados $J$-modelos. Un desarrollo similiar se encuentra en [4], [42], [43], y [51]. Con muchos más detalles y otros resultados se desarrolla en [18]; existe un refinamiento de la teoría de estructura fina, debido enteramente a R. Jensen, que se conoce como la teoría de $\Sigma^*$-estructura fina. En este caso se introduce una jerarquía distinta a la de Levy para estudiar, aún con mayor detalle, a $J^A$ o $J$. Para estudiar los modelos núcleo a la manera de Jensen, esta nueva teoría es indispensable, y debe advertirse al lector que es realmente compleja. Uno de sus ingredientes es el uso de un lenguaje polifacético (emplea variables de tipos distintos), en lugar del usual de la teoría de conjuntos. Esta teoría se puede consultar en [51] o [50]. La referencia recomendable es [26], así como [18]. Por ejemplo, para la construcción de morasses es de enorme utilidad proceder con esta $\Sigma^*$-teoría. En [43] se presenta una forma de evadirla, definiendo de cierta forma los encajes elementales relevantes, para poder probar, por ejemplo, el principio cuadrado empleando sólo la teoría de estructura fina original.

Otra vez, un problema a destacar es que las estructuras involucradas en modelos núcleo son casi siempre aceptables. La noción de aceptabilidad también ha cambiado con el tiempo y esto, de nueva cuenta, impacta dramáticamente en la teoría. Por ejemplo, la noción de aceptable en [4] no corresponde a la noción de aceptable en [27]; pronto explicaremos porque esto es realmente importante. También se puede tratar a la jerarquía $L^A$ con métodos menos sofisticados, pero que extienden algunos de los empleados en $L$, incluso lográndose probar varios principios combinatorios y construcciones complicadas (como semimorasses) para ciertos $A$ (véase [41]). Vale la pena mencionar que la noción de aceptabilidad en [26] adiciona una nueva claúsula la definición dada en, por ejemplo, [27], [51], o [50], aunque no es tan difícil recuperar los resultados con la definición «vieja».

El modelo $L[U]$ se puede estudiar en [1], [30] y [32]. Con mucho más detalle en [41]. En ninguno de estos se trata con estructura fina aunque en el último se logran varios resultados cercanos a esta teoría.

Llegamos entonces al modelo $K^{DJ}$ y la referencia inmediata es [4], así como [5], [6], [7] y [8]. Aquí es donde aparece la dificultad antes mencionada con el proyecto. La construcción y desarrollo de este modelo núcleo es absolutamente correcta, al igual que las aplicaciones que de él se derivan: [12], [9], [11], [13], [16], [10], [15], [14] y [49] entre otras. Que se emplee una noción antigua del proyecto no invalida ninguno de los resultados, el problema radica en que esta forma de construir $K^{DJ}$ ya no se utiliza, de hecho dejó de emplearse para construir los modelos núcleo de medidas de orden cero o superiores. Así, si el lector quiere seguir [4] (que en realidad es un excelente libro con muchas construcciones interesantes y resultados indispensables) debe estar conciente que la forma moderna de construir $K$ ya no es esa; el problema principal estriba en la definición de ratón, que son estructuras iterables, pero siempre se busca que en la iteración se respeten ciertos parámetros de estructura fina. Por supuesto, es posible, después de entender a cabalidad los preliminares en [26], regresar a [4] y reconstruir $K^{DJ}$ con la nueva noción de aceptable. Esto es lo que se hace en [18]. En [40] se presenta una versión simplificada de la teoría de estructura fina, lo indispensable para las pruebas ahí presentadas y se construye, hasta cierto punto, $K^{DJ}$ para poder probar el teorema de cubierta.

¿Qué sigue? Históricamente se construyeron los modelos $L[\mathcal{U}]$ con sucesiones de medidas (Mitchell [36] y [38]), para los cuales se desarrolla un versión de estructura fina y se define el correspondiente modelo núcleo ([39]). Si bien la teoría y las construcciones son absolutamente correctas, no corresponden a los desarrollos posteriores (modelos con extensores), por lo que Mitchell abandonó esta dirección. Por otra parte, Jensen incursiona en modelos núcleo para medidas de orden cero (orden de Mitchell); en el manuscrito [27] se desarrolla esta construcción. Es necesario aclarar algunas cuestiones en torno a este valioso manuscrito. Por principio de cuentas, en él se desarrolla la teoría de estructura fina en abstracto, y se introduce la $\Sigma^*$-teoría de estructura fina que antes mencionamos. Suponiendo conocida la teoría de extensores, se construyen varios tipos de ultrapotencias que preservan en diverso grado la estructura fina. Un detalle relevante es que el modelo núcleo para medidas de orden cero se construye con cierta generalidad usando extensores, pues tratándose de medidas de orden cero, los extensores en realidad se reducen a ultrafiltros normales. No obstante, esta generalidad en la construcción permite sentar las bases para modelos núcleo superiores. Como se vislumbra en el relato previo en este artículo, lograr el modelo núcleo correspondiente requiere de una construcción cuidadosa incorporando la teoría de estructura fina (en este caso, también $\Sigma^*$). Si bien [27] no es muy detallado al principio, conforme avanza, el lector acucioso podrá seguir el manuscrito sin demasiada dificultad. Para subsanar la presentación extremadamente sucinta al inicio, se recomienda acudir a [51], o [19] y [18]. En el caso de [51] es de mencionar que uno de los objetivos del libro es precisamente la presentación del modelo núcleo para medidas de orden cero, pero que trata de dar un tratamiento muy general a diversos aspectos de la construcción, anticipándose a modelos con un cardinal fuerte o superiores. Esto no es necesariamente recomendable para el lector. En [27] se prueba que el modelo núcleo tiene la propiedad de cubierta con cierta hipótesis correspondiente a $\neg 0^{\#}$, y se describen algunas propiedades del modelo núcleo $K$. En cuanto a aplicaciones son de resaltar [29] y [31]. En la primera (y en parte en la segunda referencia) se desarrolla un sistema conocido como categoría suave. Una equivalencia importante que no aparece en el artículo se puede encontrar en [28] o [18]. Estas categorías permiten demostrar en una forma general el principio global $\square$. También es posible introducir Morasses a partir de estos sistemas (en [50] se realiza esto para $L$).

Como ya dijimos, en [27] se construye el modelo núcleo usando extensores; el motivo de las siguientes secciones es precisamente motivarlos.

# 8. Grandes cardinales

Antes hablamos de la noción de gran cardinal y es tiempo de retomar el estudio de algunos de ellos. Otra forma de definir un cardinal medible es mediante encajes elementales entre modelos de ZF: el cardinal $\kappa$ es medible si existe un encaje elemental $\pi : V \to M$, donde $M$ es transitivo $\pi \upharpoonright \kappa = id$ y $\pi(\kappa) > \kappa$. Esta caracterización permitió generalizar la construcción de $K$ a otros grandes cardinales. Muchas clases de grandes cardinales se definen mediante encajes elementales como ilustramos a continuación. El cardinal $\kappa$ es,

1. $\gamma$-superompacto si existe un $j : V \hookrightarrow M$ tal que
   - $cri(j) = \kappa$ y $\gamma < j(\kappa)$.
   - $M^{\gamma} \subseteq M$.
2. supercompacto si es $\gamma$ supercompacto para todo $\gamma$.
3. $\gamma$-compacto si existe $j : V \hookrightarrow M$ con punto crítico $\kappa$ y tal que para cualquier $X \subseteq M$, con $|X| \leq \gamma$, existe $Y \in M$ tal que $Y \supseteq X$ y $M \models |Y| < j(\kappa)$.
4. compacto fuerte si es $\gamma$-compacto para toda $\gamma \geq \kappa$.
5. $\gamma$-fuerte si existe $j : V \hookrightarrow M$ tal que
   - $cri(j) = \kappa$, $\gamma < j(\kappa)$.
   - $V_{\kappa+\gamma} \subseteq M$.
6. fuerte si es $\gamma$-fuerte para todo $\gamma$.
7. superfuerte si existe $j : V \hookrightarrow M$ con punto crítico $\kappa$ y $V_{j(\kappa)} \subseteq M$.
8. Woodin si para cada $f \in \kappa^{\kappa}$ existe $\alpha < \kappa$ con $f[\alpha] \subseteq \alpha$ y $j : M \hookrightarrow M$ con punto crítico $\kappa$ y $V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$.

En las definiciones previas se observa lo antes mencionado, que los modelos $M$ cada vez aproximan más al universo $V$. Por ejemplo, los cardinales supercompactos aseguran que el modelo $M$ es cerrado respecto a sucesiones cada vez más largas de sus propios elementos, mientras que los cardinales fuertes garantizan que $M$ conoce a los estratos $V_{\alpha}$ por completo, para $\alpha$ cada vez más grande.

Note que la definición de estas clases de grandes cardinales, dadas en términos de encajes elementales, implica que, directa o indirectamente, debemos asegurar propiedades de ordinales mayores que el punto crítico, pero menores que su imagen respecto al encaje. Desde el momento en que aparece un encaje elemental entre clases propias, queda descartado que podamos dar tal definición en ZFE, y mucho menos si pretendemos expresar propiedades de ordinales como los recién mencionados. Otro resultado (Kunen) por demás significativo es que no puede existir un encaje elemental $j : V \hookrightarrow V$ no trivial (véase [41, Teorema 2.4.9]).

Hemos visto la construcción de los modelos $L, L[U]$ y $K^{DJ}$ que pueden contener grandes cardinales, digamos hasta un cardinal medible, en el caso en que estos estén presentes en $V$. Tanto Mitchell como A. Dodd y R. Jensen empezaron a explorar la posibilidad de modelos para otros grandes cardinales. De hecho, al incorporar la construcción $L[\mathcal{U}]$ se habría comprendido el modelo núcleo hasta $\exists\kappa(o(\kappa) = \kappa^{++})$ (por ejemplo, un cardinal fuerte $\kappa$ tiene $o(\kappa) = \infty$).

Así, sin crecer demasiado aprisa, el menor gran cardinal «mayor» que un medible es un cardinal $\mu$-medible, es decir, un cardinal $\kappa$ para el que existe un encaje $j : V \hookrightarrow M$ con punto crítico $\kappa$ y el filtro inducido $U = \{x \subseteq \kappa : \kappa \in i(x)\}$ es un elemento de $M$ (lo cual no ocurre para un cardinal medible, con la construcción descrita antes de la ultrapotencia). En este contexto $U$ se denota $\mu$, la razón para el nombre. Tal encaje no se puede obtener de una ultrapotencia usando un ultrafiltro normal, pero sí usando un ultrafiltro no normal en $V_\kappa$, a saber

$$W = \{x \subseteq \kappa : U \in j(x)\}.$$

La carencia de normalidad hace imposible obtener las propiedades que se lograron cuando antes usamos un ultrafiltro normal. La siguiente etapa es un cardinal $Pot^2(\mu)$-medible, que, otra vez, no es posible mediante un ultrafiltro en $V_\kappa$; salir de este círculo requiere ideas nuevas, una representación más flexible para grandes cardinales, que nos permita ir más allá de $\exists\kappa(o(\kappa) = \kappa^{++})$. Otro problema importante es que si $j : V \hookrightarrow M$, donde $M$ es la ultrapotencia de $V$ por el ultrafiltro normal $U$ en $\kappa$, no sabemos nada de los ordinales en el intervalo $(\kappa, j(\kappa))$, estos no son «accesibles» en $M$ mediante $j$, es decir, ninguno de ellos es imagen de un ordinal en $V$ respecto a $j$. Se requiere incorporar no uno, sino muchos ultrafiltros normales (incluso en distintos cardinales, pero generalmente se trabaja con todos los ultrafiltros sobre el mismo cardinal). Además, para conseguir incorporar a los ordinales entre el cardinal crítico y su imagen respecto al encaje debemos idear algo. Es claro que esto implica una gran cantidad de ultrafiltros, que si se tratan en forma arbitraria, no permiten ningún control sobre la relación entre las posibles ultrapotencias. Se necesitan familias de ultrafiltros que admitan algún grado de coherencia entre los ultrafiltros normales que las conforman.

Tal representación fue desarrollada por Mitchell, Jensen la retomó y le dió una presentación que permite trabajar más fácilmente, y es la que se ha vuelto estándar. Jensen la llamó extensor («Extender»), que a continuación describimos brevemente, para posteriormente hacerlo con más detalle (parte II). Para describir un extensor requerimos dos parámetros: su punto crítico $\kappa$ y un ordinal $\lambda$, donde punto crítico refiere a que la familia de ultrafiltros se toman sobre ese punto crítico y, en cierto sentido, $\lambda$ es la cota superior de los ordinales mayores que $\kappa$ sobre los cuales podremos obtener información. Una vez que se tiene un extensor, podemos formar la ultrapotencia respecto a éste. Un encaje $i : V \hookrightarrow M$ con punto crítico $\kappa$ es una ultrapotencia mediante un $(\kappa,\lambda)$-extensor si $M = \{i(f)(a) : a \in [\lambda]^{<\omega}\}$, donde las $f$ son funciones de $[\kappa]^{|a|}$ en $V$. En este caso el $(\kappa,\lambda)$-extensor $E$ tal que $M = Ult(V,E)$ se puede representar como $(E_a : a \in [\lambda]^{<\omega})$, con $E_a = \{x \in Pot([\kappa]^{|a|}) : a \in i(x)\}$. Aquí es importante destacar dos asuntos. Primero, lo anterior se refiere a un extensor sobre el mismo punto crítico (ya antes dijimos que se pueden considerar ultrafiltros sobre cardinales distintos), y segundo $\lambda$ puede estar por encima de las imágenes de los encajes elementales generados por cada ultrafiltro en el extensor (extensor largo) o ser a lo sumo el supremo de dichas imágenes (extensor corto). Asimismo, la construcción de la ultrapotencia por el extensor se puede formalizar ya sea directamente, recreando la construcción de una ultrapotencia por un ultrafiltro normal usando simultáneamente todos los ultrafiltros en el extensor, o bien como un límite directo, que es más sencilla de visualizar en un primer intento de estudiar a los extensores.

En este punto concluimos la primera parte de este trabajo, antes de incorporar por completo a los extensores, que son imprescindibles para la construcción de modelo núcleo de orden superior.

## Referencias


[1] K. Devlin, *Aspects of constuctibility*, Springer-Verlag, Berlín, 1973.

[2] ______, *Constructibility*, Springer-Verlag, Berlín, 1984.

[3] K. Devlin and R. Jensen, *Marginalia to a theorem of silver*, En Logic Conference Kiel 1974 Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics **499** (1975), 115–142.

[4] A. Dodd, *The core model*, Cambridge University Press, 1982.

[5] ______, *Core models*, J. Symbolic Logic **48** (1983), 78–90.

[6] A. Dodd and R. Jensen, *The core model*, Ann. Mathematical Log. **20** (1981), 43–75.

[7] ______, *The covering lemma for $K$*, Ann. Mathematical Log. **22** (1982), 1–30.

[8] ______, *The covering lemma for $L[U]$*, Ann. Mathematical Log. **22** (1982), 127–135.

[9] H. D. Donder, *Einige kombinatorische Ergebnisse in $L$*, Ph.D. thesis, Inagural-Dissertation zur Erlangung der Doktorgrades, Köln, 1977.

[10] ______, *Regularity of ultrafilters and the core model*, Israel J. Math. **63** (1988), 289–322.

[11] H. D. Donder, R. Jensen, and B. Koppelberg, *Some applications of the core model*, En Set theory and model theory (Bonn, 1979) of Lecture Notes in Math **872** (1981), 55–97.

[12] H. D. Donder, R. Jensen, and L. Stanley, *Condensation-coherent global square systems*, Procced. Symp. Pure Math. **42** (1985), 237–258.

[13] H. D. Donder and P. Koepke, *On the consistency strength of "accessible"jonsson cardinals and of the weak chag conjecture*, Ann. Pure App. Logic **25** (1983), 233–261.

[14] H. D. Donder, P. Koepke, and J. Levinski, *Some stationary subsets of* $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$, Proceed. Am. Math. Soc. **102** (1988), 1000–1004.

[15] H. D. Donder and J. Levinski, *On weakly precipitous filters*, Israel J. Math. **67** (1989), 225–242.

[16] ———, *Some principles related to Chang's conjecture*, Ann. Pure App. Logic **45** (1989), 39–101.

[17] H. Gaifman, *Elementary embeddings of models of set-theory and certain subtheories*, En Axiomatic set theory (Proc. Sympos. Pure Math. Vol. XIII, Part II, Univ. 24 California, Los Angeles, Calif. 1967) Amer. Math. Soc. Providence R.I. (1974), 33–101.

[18] A. Gallardo Quiroz, E. A. Valenzuela Nuncio, and L. M. Villegas Silva, *Modelo núcleo para medidas de orden cero*, En preparación.

[19] ———, *Modelos internos para cardinales medibles, sucesiones de medidas y cardinales fuertes*, Propuesto para publicación.

[20] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **24** (1938), 556–557.

[21] ———, *Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **25** (1939), 220–224.

[22] ———, *The consistency of the continuum hypothesis*, Annals of Mathematics Studies **3** (1940).

[23] A. Hajnal, *On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem*, Z. Math. Logik Grundlagen Math. **2** (1956), 131–136.

[24] ———, *On a consistency theorem connected with the generalized continuum problem*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **12** (1961), 321–376.

[25] R. Jensen, *The fine structure of the constructible hierarchy*, Ann. Math. Logic **4** (1972), 229–308.

[26] ______, *Manuscript on fine structure, inner model theory, and the core model below one Woodin cardinal*, Book in preparation, https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/rds/jensenskript_march_19_2024.pdf.

[27] ______, *Measures of order zero*, Diversos PDF en https://www.mathematik.hu-berlin.de/∼raesch/org/jensen.html.

[28] ______, *Some remarks on  below* 0, manuscrito no publicado.

[29] R. Jensen and M. Zeman, *Smooth categories and global* , Ann. Pure Appl. Logic **102** (2000), 101–138.

[30] A. Kanamori, *The higher infinite*, Springer-Verlag, 2nd Ed., 2009.

[31] P. Koepke and P. Welch, *Global square and mutual stationarity at the* $\aleph_n$, Ann. Pure Appl. Logic **162** (2011), 787–806.

[32] K. Kunen, *Some applications of iterated ultrapowers in set theory*, Ann. Math. Logic **1** (1970), 179–227.

[33] A. Levy, *Indépendance conditionnelle de* $V = L$ *et d'axiomes qui se rattachent au système de M. Gödel*, C. R. Acad. Sci. Paris **245** (1957), 1582–1583.

[34] ______, *A generalization of Gödel's notion of constructibility*, J. Symbolic Logic **25** (1960), 147–155.

[35] A. R. D. Mathias, *Weak systems of Gandy, Jensen and Devlin*, En Set Theory: Centre de Recerca Matematica, Barcelona 2003-4 edited by Joan Bagaria and Stevo Todorčević, Trends in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, **25** (2006), 149–224.

[36] W. Mitchell, *Sets constructible from sequences of ultrafilters*, J. Symbolic Logic **39** (1974), 57–66.

[37] ______, *Hypermeasurable cardinals*, Logic Coll. '78, North-Holland, Amsterdam (1979), 303–317.

[38] ______, *Sets constructed from sequences of measures: revisited*, J. Symbolic Logic **48** (1983).

[39] ______, *The core model for sequences of measures I*, Math. Proceed. Cambridge Phil Soc. **95** (1984), 229–260.

[40] ______, *Handbook of set theory*, ch. 18. The covering lemma, pp. 1497–11594, M. Foreman, A. Kanamori, editors, Springer-Verlag, 2010.

[41] J. A. Nido Valencia, H. G. Salazar Pedroza, and L. M. Villegas Silva, *Modelos internos, grandes cardinales y álgebra*, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Propuesto para publicación.

[42] R. Schindler, *Set theory, exploring independence and truth*, Springer-Verlag, Switzerland, 2014.

[43] R. Schindler and M. Zeman, *Handbook of set theory*, ch. 9. Fine Structure, pp. 605–656, M. Foreman, A. Kanamori, editors, Springer-Verlag, 2010.

[44] D. Scott, *Measurable cardinals and constructible sets*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques **9** (1961), 521–524.

[45] J. Silver, *Some applications of model theory in set theory*, Ph.D. thesis, Univ. California, Berkeley, 1966.

[46] ———, *A large cardinal in the constructible universe*, Fundamenta Mathematicae **69** (1970), no. 1, 93–100.

[47] R. M. Solovay, *Strongly compact cardinals and the GCH*, Proceedings of the 1971 Tarski Symposium **25** (1974), 365–372.

[48] L. Stanley, *Surveys in set theory*, ch. 7. A short course on Gap-one morasses with a review of the Fine structure of $L$, pp. 197–243, Cambridge University Press, 1983.

[49] P. Welch, *Combinatorial principles in the core model*, Ph.D. thesis, Oxford University, 1983.

[50] ———, *Handbook of set theory*, ch. 10. $\Sigma^*$-Fine Structure, pp. 657–736, M. Foreman, A. Kanamori, editors, Springer-Verlag, 2010.

[51] M. Zeman, *Inner models and large cardinals*, Walter de Gruytier, 2002.