Boletín de Matemáticas **31**(2) 105–111 (2024)

DOI: https://doi.org/10.15446/bol.mat.v31n2.125409

Ambientes categóricos para la topología

Categorical contexts for topology

Jose Reinaldo Montanez Puentes[a]

Resumen. La teoria de categorías aparece como una teoría que unifica el trabajo de las diferentes áreas de la matemática y en particular se ocupa de estudiar los objetos por sus relaciones con los otros más que por estudiarlos interiormente. Para el caso que nos ocupa, se trata de mostrar cómo algunas categorías como las categorías topológicas y los topos, objetos de estudio en esta exposición, son motivadas desde la topología. En particular las conexiones que se exponen permiten un mayor conocimiento de cada espacio topológico y una relación más estrecha entre topología y topos. Creemos que el trabajo enriquece la teoría de los espacios topológicos en aspectos que poco se consideran y que giran alrededor de las topologías iniciales y finales. A su vez, esta teoría, al demostrar que no es exclusiva de los espacios topológicos, enriquece la teoría de categorías Es de anotar que este trabajo toma como base [7] y [8] en donde se desarrolla una teoría más general.

Palabras claves: topología, categorías, topos.

Abstract. Category theory emerges as a theory that unifies different areas of mathematics, particularly by studying objects through their relationships with others rather than by studying them internally. For this work, the objective is to show how some categories, such as topological categories and topos, are motivated by topology. In particular, the connections presented allow for a greater understanding of each topological space and a closer relationship between topology and topos. We believe that this work enriches the theory of topological spaces in aspects related to initial and final topologies. Furthermore, this theory, by demonstrating that it is not exclusive to topological spaces, enriches category theory. It should be noted that this work takes as its basis [7] and [8], where a more general theory is developed.

Keywords: topology, category, topos.

Mathematics Subject Classification: 18-XX, 58A03.

Recibido: abril de 2024 Aceptado: abril de 2025

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[a]jrmontanezp@unal.edu.co

1. Introducción

El presente trabajo se enmarca dentro de la topología categórica. En una de sus direcciones de trabajo, la topología categórica aparece como el estudio de la generalización del funtor Olvido de Estructura de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los conjuntos, en especial de las propiedades relativas a la existencia de estructuras iniciales y finales que tiene dicho funtor. Podemos decir que la topología categórica se inicia con los trabajos de Bourbaki, trabajos más recientes, se encuentran en J. Adámek [1], G. Preuss [11] y O. Wyler [13]. Para citar algunos ejemplos, las categorías de los espacios topológicos, uniformes y de proximidad, son ejemplos de categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos, las categorías de los grupos topológicos y de los espacios vectoriales topológicos lo son sobre las categorías bases de sus álgebras correspondientes.

En particular en este trabajo se muestra un método de construir subcategorías topológicas de la categoría de los espacios topológicos y que resultan reflexivas o correflexivas, nociones que expresan mejoramiento y densidad. Dichos métodos guardan relación con la construcción de algunos funtores que hemos llamado Elevadores de Estructura, que se interpretan, de manera intuitiva, como funtores que asignan a un espacio topológico otros espacios con el mismo conjunto subyacente pero con topologías más finas.

El estudio de los Elevadores de Estructura nos condujo a la creación de un método de construcción de algunos de topos, que consideramos adecuados para el trabajo de la topología y el análisis.

Es de anotar que el trabajo es motivado desde la topología, sin embargo es de caracter más general y puede desarrollarse desde otras categorías topológicas, por ejemplo desde los constructos topológicos.

2. La topología categórica

El estudio de la topología categórica puede considerarse como el estudio de la generalización del funtor olvido $O_e : \mathcal{T}op \to \mathcal{S}ets$ de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los conjuntos, en particular de las construcciones relacionadas con topologías iniciales y finales que permite dicho funtor. Podemos decir que la topología categórica se inicia con los trabajos de Boourbaki, trabajos más recientes en encuentran en [1] y [11].

Veamos ahora la noción de categoría topológica, que como podremos observar será muy particular debido a los intereses de esta exposición.

Definición 2.1. [1] Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}ets$ un funtor. Se dice que F es un funtor topológico y que $\mathcal{C}$ es una categoría topológica, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. F es fiel.

2. F es apto para construir estructuras iniciales y finales de fuentes y sumideros unitarios.

3. Para cada conjunto X, la fibra $Fib(X)$ tiene estructura de retículo completo.

Como lo acabamos de anotar, esta definición es un poco restrictiva pues $\mathcal{S}ets$ puede reemplazarse por otra categoría. Aquí conviene anotar que las propiedades (1) y (2) generalizan las nociones de topología inicial y final, es decir se definen como estas y con semejantes propiedades universales. Es de anotar que algunos espacios de interés en la topología algebraica se obtienen a partir de topologías finales, como por ejemplo, el cilindro, el toro, la cinta de Möbius y la botella de Klein. La propiedad (3) captura el hecho de que la colección de topologías sobre cada conjunto tiene estructura de retículo completo con el orden dado por la inclusión.

Es de anotar que la categoría de los espacios topológicos es una categoría topológica y de hecho es la que motiva tal definición. Sin embargo no toda subcategoría de una categoría topológica es topológica, tal es el caso de la subcategoría plena de Top formada por los espacios de Hausdorff. Las categorías de los espacios uniformes, secuenciales, pretopológicos y pseudotopológicos son categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos [1] [1].

Ahora bien, construir un objeto óptimo en una categoría, en particular para el caso que nos ocupa construir un espacio óptimo, con características especiales, a partir de un espacio topológico dado, motiva las nociones de subcategorías reflexivas y correflexivas, que expresan nociones de mejoramiento y densidad. Por ejemplo: la categoría de los espacios compactos Hausdorff es una subcategoría reflexiva de la categoría de los espacios completamente regulares; en este caso el proceso de optimización es el compactado de Stone -Čech. A continuación, siguiendo [8], se muestra la manera de construir procesos que permiten construir subcategorías reflexivas y correflexivas a partir de funtores que hemos denominado Elevadores de Estructura y Coelevadores de Estructura.

Los funtores Elevadores de Estructura son motivados desde la topología, con un poco más de precisión, en la búsqueda de endofuntores de Top que respeten las fibras y al mismo tiempo asignen topologías más finas. En particular, los elevadores idempotentes generan subcategorías topológicas y correflexivas de Top.

Definición 2.2. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}ets$ un funtor topológico y sea $E : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un funtor. Diremos que E es un Elevador de Estructura si se satisfacen las siguientes condiciones:

[1] Herrlich y Strecker proponen en [1] una definición de funtor topológico que exige la existencia de estructuras iniciales de fuentes arbitrarias. La definición considerada en este trabajo corresponde a una caracterización de funtor topológico. Probar que ésta es una caracterización es un problema propuesto en [1]. En [2] hemos demostrado este resultado, en donde, además hemos relacionado estas nociones con la de constructo topológico dada por Preuss en [11].

1. $F \circ E = F$;

2. $\mathbf{X} \leq E(\mathbf{X})$ para todo objeto $\mathbf{X}$ de $\mathcal{C}$[2].

La condición (*1*) implica, entre otros, que E es un funtor concreto y por lo tanto fiel, además que E respeta las fibras, esto es, $E(\mathbf{X}) \in Fib(X)$ para todo objeto $\mathbf{X}$ de $\mathcal{C}$.

De manera dual se define Coelevador de Estructura. En adelante, nos referiremos a los funtores elevadores (coelevadores) de estructura simplemente como elevadores (coelevadores).

Un funtor E definido en Top se dice idempotente si $E \circ E = E$. Nótese que en tal caso los puntos fijos de E coinciden con su imagen. La subcategoría plena de Top formada por los puntos fijos de E se notará $E(Top)$ y a esta nos referiremos como la subcategoría de Top generada por E.

Los puntos fijos de elevadores y coelevadores idempotentes generan categorías topológicas. Como consecuencia de este hecho, se tiene que $E(Top)$ es una categoría completa y cocompleta y resulta además una subcategoría correflexiva de Top. De manera dual se obtienen los resultados para coelevadores idempotentes definidos en Top.

Haciendo uso de topologías finales (iniciales) los espacios topológicos definen elevadores (coelevadores), como se ilustra a continuación.

Sean $\mathbf{W}$ y $\mathbf{X}$ espacios topológicos y $[\mathbf{W}, \mathbf{X}]_{Top}$ la colección de funciones continuas de $\mathbf{W}$ en $\mathbf{X}$. Al olvidar la topología de $\mathbf{X}$ se obtiene el sumidero que notamos $S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})} = \{f : \mathbf{W} \to X \mid \mathbf{f} \in [\mathbf{W}, \mathbf{X}]_{Top}\}$. Notemos con $F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$ la estructura final para $S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}$. La aplicación: $E_{\mathbf{W}} : Top \to Top$ definida por $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) := F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$ y $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{f}) := \mathbf{f}$ define a $E_{\mathbf{W}}$ como un elevador idempotente en Top. En este caso $E_{\mathbf{W}}(Top)$ es una categoría topológica y una subcategoría correflexiva de Top.

Más aún, con este mismo método, una clase de espacios topológicos $\mathscr{C}$ determina un elevador idempotente $E_{\mathscr{C}}$ en Top. De manera dual, haciendo uso de topologías iniciales, un espacio topológico da origen a un coelevador idempotente, obteniéndose los resultados duales [3].

Ejemplos

1. Consideremos $N^* = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ como subespacio del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con su topología usual. La categoría $E_{N^*}(Top)$ corresponde a la categoría de los espacios secuenciales.

2. Consideremos el espacio de Sierpinski $\mathbf{S} = (S, \tau)$ donde $S = \{0, 1\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}\}$. Entonces, $C_{\mathbf{S}}(Top) = Top$.

[2] Es de anotar que a pesar de la sencillez de la noción de elevador de estructura, no la hemos encontrado referenciada de manera explícita en la literatura.

[3] Otros trabajos que relacionan subcategorías generadas a través de topologías iniciales y temas afines, han sido publicados por A. Oostra en [9] y [10].

3. Sea $\mathcal{A}$ la clase de los espacios compactos de Hausdorff. La categoría de los espacios de Kelley corresponde a la categoría generada por el elevador determinado por $\mathcal{A}$ en Top.

4. Sea I el intervalo $[0, 1]$ con su topología usual. La categoría $C_I(Top)$ corresponde a la categoría de los espacios completamente regulares.

5. La categoría de los espacios uniformes $Unif$ es isomorfa a la categoría de los espacios completamente regulares, ver por ejemplo [12]. Por lo tanto $Unif$ es una categoría topológica.

3. Los topos

De manera informal e intuitiva, los topos pueden considerarse universos o categorías muy especiales, que podrían verse en una dirección como generalizaciones de la categoría de los conjuntos, en donde potencialmente se pueden rehacer algunas estructuras clásicas algebraicas y geométricas. Pero no es de extrañar que las palabras Topos y Topología tengan las mismas raíces, son sitios para trabajar y la mayoría de los conceptos y construcciones en topos son motivados desde la topología, para citar un ejemplo clásico, la noción de topos clasificante tiene su origen en la topología algebraica.

En teoría de categorias, se intenta conocer un objeto por la relación que este establezca con los otros. Los funtores representables dan cuenta de ello y en particular en esta sección se muestra la importancia de un espacio topológico en la formación de subcategorías de Top y nuevos topos asociados que inspirados en Jonstone [5] denominamos Topos Topológicos.

Definición 3.1. Un topos es una categoría $\mathcal{E}$ que satisface los siguientes axiomas:

1. $\mathcal{E}$ tiene límites finitos.

2. $\mathcal{E}$ tiene exponenciación.

3. $\mathcal{E}$ tiene clasificador de subobjetos.

Una familia importante de topos son los Topos de Grothendieck. Dada una categoría pequeña $\mathcal{C}$, de manera un poco informal, la categoría cuyos objetos son los prehaces sobre $\mathcal{C}$ y con valores en la categoría de los conjuntos y cuyos morfismos son las transformaciones naturales es un topos de Grothendieck, ver por ejemplo S. Mac Lane, I. Moerdijk [6]. Con referencia a los morfismos entre topos, un tipo de relación funtorial adecuado y de presencia frecuente en los topos de Grothendieck es el llamado morfismo geométrico, cuya noción es motivada desde la topología; dicha noción de manera intuitiva interpreta la idea de una función continua como un par de funciones adjuntas, que la función determina entre las topologías de los espacios que la definen, considerando las respectivas topologías como categorías.

Dado un monoide M con identidad, llamaremos *m–conjunto* a un conjunto dotado de una acción a derecha de M. Una *m*–aplicación entre dos m-conjuntos es una función que respeta la acción. La categoría determinada de esta manera, notada $M - Sets$, es equivalente al topos de prehaces $Sets^M$, en este caso M es considerada como una categoría pequeña en la forma habitual. Por lo tanto $M - Sets$ es un Topos de Grothendieck [6].

Sea W un espacio topológico y M el monoide de los endomorfismos de W con la operación de composición. $M = ([W, W]_{Top}, \circ)$. El topos de m-conjuntos asociado a M lo notaremos $\mathcal{E}$.

Ahora veamos una conexión entre la categoría de los espacios topológicos Top y el topos $\mathcal{E}$. Cada espacio topológico X se interpreta de manera natural en $\mathcal{E}$ como el m-conjunto $[W, X]_{Top}$ con la acción definida por composición. A su vez, cada función continua da lugar, por composición, a una m-aplicación. Por lo tanto se ha determinado un funtor $[\Sigma_W : E_{\mathbf{W}}(Top) \longrightarrow \mathcal{E}$ es fiel, pleno y tiene adjunto a izquierda.

Esta construcción tiene un carácter mas general y la teoría se puede desarrollar en categorías como los constructos topológicos. Pero además de este hecho se sigue que la categoría $E(Top)$ es isomorfa a una subcategoría plena de $\mathcal{E}$; es decir el topos construido lleva por dentro una subcategoría correflexiva y topológica de los espacios topológicos, asi se ha extendido una buena categoría de espacios topológicos a un topos; hecho que motiva la siguiente definición: Sean $\mathcal{C}$ una subcategoría topológica de Top y $\mathcal{E}$ un topos, diremos que $\mathcal{E}$ es un Topos $\mathcal{C}$-Topológico, si $\mathcal{E}$ contiene una subcategoría reflexiva isomorfa a $\mathcal{C}$.

Ahora bien, descendiendo de la teoría general de los haces y de las topologías de Grothendieck, e interpretando estas en un monoide, es fácil ver que una topología de Grothendieck sobre M es una colección de ideales que verifica ciertas propiedades de coherencia. De esta manera se determina un subtopos de $\mathcal{E}$, un topos de haces que notamos $\mathbf{Sh}_{\mathbf{W}}(\mathbf{Top})$, que resulta una subcategoría reflexiva de $\mathcal{E}$, para el cual todo espacio topológico X, el m-conjunto $[W, X]_{Top}$ es un haz y que mantiene como subcategoría fiel y plena a la categoria topológica generada por W, $E(Top)$. A manera de ejemplos, el Topos de Johnstone [5] y el topos Bornológico [3] y [4] se obtienen de estas construcciones. Es de anotar que los topos construidos en esta sección, inicialmente, no guardan relación con los topos clásicos de Grothendieck construidos como los haces de un espacio topológico.

Finalmente como lo hemos advertido, la teoría desarrollada es motivada desde la topología, pero se puede desarrollar en constructos topológicos arbitrarios, mostrando así la pluralidad de la teoría.

Referencias

[1] J. Adámek, H. Herrlich, G. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1990.

[2] V. Ardila, R. Montañéz, C. Ruiz, *Nociones equivalentes de Categorías Topológicas*, Boletín de Matemáticas. Nueva serie. **VII** (2000) no. 1 19–27.

[3] L. Español y L. Lamban, *On bornologies, locales and toposes of M-Set*, J. Pure and Appl. Algebra 176/2-3 (2002) 113-125

[4] L. Español y C. Minguez, *Cortaduras para L infinito*, Publicación de Margarita Matemática, Universidad de la Rioja, España (2001) 375 - 390.

[5] P.T. Johnstone, *Topos Theory*, Academic Press, London, (1977).

[6] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, A first introduction to topos Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[7] R. Montañez , Funtores elevadores y coelevadores de estructura, Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Colombia, 2007.

[8] R. Montañez, C. Ruiz, (2006). *Elevadores de Estructura*, Boletín de Matemáticas, 111 - 135.

[9] A. Oostra, *Subcategorías generadas mediante estructuras iniciales*, Lecturas Matemáticas, **16** (1995), 63-72.

[10] A. Oostra, *The Uniformizable Spaces Are Generated by the Real Numbers*, Ann. New York Acad. Sc. **767** (1995), 165-167.

[11] G. Preuss, *Theory of Topological Structures*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, (1988).

[12] S. Willard,*General Topology.* Adisson Wesley Publishing Company, (1970).

[13] O. Wyler, *Lecture Notes on Topoi and Quasitopoi.* Singapure, World Scientific, (1991).