LA MEDIA ARITMETICO–GEOMETRICA
DE ORIGENE PROPIETATI BUSQUE GENERALIS NUMERORUM MEDIORUM ARITMETICORUM–GEOMETRICORUM

KARL F. GAUSS

Traducido por: Fabio Hernando Ortiz
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E., Colombia

I. Sean $\{a, a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ y $\{b, b_1, b_2, b_3, \cdots\}$ dos sucesiones de cantidades formadas por la ley que los términos correspondientes de las mismas sean medias aritméticas, en el caso de las a_n, y medias geométricas, en el caso de las b_n, o sea,

$$a_1 = \frac{a+b}{2}; \quad b_1 = \sqrt{ab}; \quad a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}; \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}; \text{ etc } a, b > 0$$

Se supone adicionalmente que las sucesiones así formadas son reales positivas y se ofrecen las siguientes observaciones:

1. Si $a = b$, todos los términos son iguales a a.

2. Si a y b no son iguales se tendrá $(a_1 - b_1)(a_1 + b_1) = \frac{1}{4}(a-b)^2$ de donde $b_1 < a_1$, y por lo tanto, $b_2 < a_2$, $b_3 < a_3$, etc.

Así que cualquier término de la sucesión $\{b_n\}$ será menor que el correspondiente de la $\{a_n\}$. Suponemos también que $b < a$.

3. En la misma suposición se tendrá $a_1 < a$, $b < b_1$, $a_2 < a_1$, $b_1 < b_2$, etc. Así que la sucesión $\{a_n\}$ disminuye continuamente en tanto que la sucesión $\{b_n\}$ crece continuamente, de aquí que ambas tienen límite a^∞, b^∞.

4. Finalmente de

$$\frac{a_1 - b_1}{a - b} = \frac{a-b}{4(a_1 + b_1)} = \frac{a-b}{2(a+b) + 4b_1}$$

se sigue $a_1 - b_1 < \frac{1}{2}(a-b)$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Del mismo modo será $a_2 - b_2 < \frac{1}{2}(a_1 - b_1)$, etc. De aquí que $(a-b), (a_1-b_1), (a_2 - b_2), \ldots$ constituyen una progresión decreciente con límite igual a 0. Luego $a^\infty = b^\infty$, de manera que las sucesiones a_n,b_n tienen el mismo límite que llamaremos la **media aritmetico-geométrica** de a y b y la representaremos por $M(a,b)$.

II. Consideremos las raíces de la ecuación $x^2 - 2ax + b^2 = 0$; éstas serán reales positivas porque $a \geq b$; la media aritmética entre estas raíces será a y la media geométrica será b; así que designada una raíz por a_{-1} y la otra por b_{-1}, pueden considerarse a a_{-1} como el término de la sucesión $\{a_n\}$ que precede a a, y b_{-1} como el término de la sucesión $\{b_n\}$ que precede a b.

Similarmente notemos a la raíz mayor de la ecuación $x^2 - 2a_{-1}x + {b_{-1}}^2 = 0$ por a_{-2} y a la menor por b_{-2}, a la raíz mayor de la ecuación $x^2 - 2a_{-2}x + {b_{-2}}^2 = 0$ por a_{-3}, y a la menor por b_{-3}, etc. Se obtienen así dos sucesiones que se prolongan siempre al infinito

$$\cdots, a_{-2}, a_{-1}, a, a_1, a_2, \tag{1}$$
$$\cdots, b_{-2}, b_{-1}, b, b_1, b_2, \cdots \tag{2}$$

Cualquier término de la sucesión (1) será mayor que el correspondiente de la (2). Hacia la derecha las dos tienen el mismo límite que como ya se vio es $M(a,b)$; pero hacia la izquierda la (1) crece sobre todos los límites y la (2) tiene límite igual a 0. En efecto,

$$a_{-1} = a + \sqrt{aa - bb}; \quad b_1 = a - \sqrt{aa - bb};$$

de aquí

$$a_{-1}^2 - b_{-1}^2 = 4a\sqrt{aa - bb} > 4(aa - bb)$$

y similarmente $a_{-2}^2 - b_{-2}^2 > 4a_{-1}a_{-1} - b_{-1}b_{-1})$, de donde es claro que $aa - bb; a_{-1}a_{-1} - b_{-1}b_{-1}; a_{-2}a_{-2} - b_{-2}b_{-2}$; etc y por tanto $a, a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ no tiene límite. Además

$$\frac{b_{-1}}{b} = \frac{b}{a_{-1}} < \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad \frac{b_{-2}}{b_{-1}} < \frac{b_{-1}}{a_{-1}} \quad \text{etc. i.e.} \quad \frac{b_{-(n+1)}}{b_{-n}}$$

puede estar por debajo de cualquier límite a la medida que aumente n y por lo tanto el límite de $b, b_{-1}, b_{-2}, b_{-3}, b_{-4}, \ldots$ es igual a 0. De la definición de número media aritmetico-geométrica se sigue que las sucesiones (1) y (2) cumplen para todo sus términos lo siguiente

$$M(a_{-i}, b_{-i}) = M(a,b) = M(a_j, b_j); \quad i,j > 0.$$

III. Además de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ ténganse otras dos $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ con $a : b = c : d$ o $a : c = b : d = 1 : n$. Entonces los términos de $\{a_n\}$ serán a los términos de $\{c_n\}$ como los de $\{b_n\}$ serán a los de $\{d_n\}$. Como $c_1 = na_1, c_2 = na_2, c_3 = na_3, c_{-1} = a_{-1}n, \ldots, d_5 = nb_5, d_{-5} = b_{-5}n$, se deduce fácilmente la proporcionalidad entre los límites; generalizando,

$$M(na, nb) = nM(a, b); \quad M(a, b) = bM\left(\frac{a}{b}, 1\right); \quad M(a, b) = aM\left(1, \frac{b}{a}\right).$$

IV. *Problema.* Expresar la media aritmético-geométrica entre la unidad y el número mayor que la unidad, $1 + x$, por medio de una serie de potencias de x.

Solución. Como $M(1, 1) = 1$,

$$M(1 + x, 1) = 1 + h'x + h''x^2 + h'''x^3 + h''''x^4 + \text{ etc.}$$

Siendo h', h'', h''', h'''', etc. coeficientes constantes no dependientes de x.

Sea $x = 2t + tt$, entonces

$$M(1 + x, 1) = (*)M[(1 + t + \frac{1}{2}t^2), (1 + t)] = (1 + t)M(1 + \frac{\frac{1}{2}t^2}{1 + t}, 1)$$

Entonces

$$\begin{aligned} &1 + h'(2t + t^2) + h''(2t + t^2)^2 + h'''(2t + t^2)^3 + \text{ etc} \\ &= 1 + t + h'(\frac{t^2}{2}) + h''\frac{\frac{1}{4}t^4}{1 + t} + h'''\frac{\frac{1}{8}t^6}{(1 + t)^2} + \text{ etc} \end{aligned}$$

(*)Porque $\begin{array}{l} a = 1 + x \\ b = 1 \end{array}$ entonces $\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{a + b}{2} = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} \\ b_1 = \sqrt{ab} = \sqrt{1 + 2t + t^2} = 1 + t \end{array}$ con $M(a, b) = M(a_1, b_1)$

Resultan de aquí unas ecuaciones para determinar los coeficientes

$$
\begin{aligned}
2h' &= 1 \\
4h'' + h' &= \frac{1}{2}h' \\
8h''' + 4h'' &= 0 \\
16h'''' + 12h''' + h'' &= \frac{1}{4}h'' \\
32h^{V} + 32h'''' + 6h''' &= -\frac{1}{4}h'' \\
64h^{VI} + 80h^{V} + 24h'''' + h''' &= \frac{1}{4}h'' + \frac{1}{8}h''' \\
128h^{VII} + 192h^{VI} + 80h^{V} + 8h'''' &= -\frac{1}{4}h'' + \frac{3}{8}h''' + \frac{1}{16}h''''
\end{aligned}
$$

De donde se obtiene

$$h' = \frac{1}{2}, \quad h'' = -\frac{1}{16}, \quad h''' = \frac{1}{32}, \quad h'''' = -\frac{21}{1024}, \quad h^{V} = \frac{31}{2048}.$$

Por lo tanto,

$$M(1+x,1) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3 - \frac{21}{1024}x^4 + \frac{31}{2048}x^5 + \frac{195}{16384}x^6 + \quad \text{etc} \quad .$$

Por lo demás se ve que la media entre el número menor que la unidad $1-x$ y la unidad es

$$M(1-x,1) = 1 - h'x + h''x^2 - h'''x^3 + \cdots = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{32}x^3 - \frac{21}{1024}x^4 - \cdots$$

Como estos coeficientes no muestran una ley obvia, omitimos este camino y tomamos otro que tendrá éxito.

V. Demostraremos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{M(1-x,1+x)} = 1 + \underbrace{\frac{1}{4}}_{A} x^2 + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}}_{B} x^4 + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}}_{C} x^6 \\
+ \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{49}{64}}_{D} x^8 + \cdots .
\end{aligned}
$$

Haciendo $x = \frac{2t}{1+t^2}$ obtenemos la ecuación

$$\frac{2t}{1+t^2} + A\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3 + B\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^5 + \cdots = 2t(1 + At^4 + Bt^8 + \cdots)$$

que da origen a las siguientes

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
0 &= 1 - 4A\\
A &= 1 - 12A + 16B\\
0 &= 1 - 24A + 80B - 64C\\
B &= 1 - 40A + 240B - 448C + 256D\\
0 &= 1 - 60A + 560B - 1792C + 2304D - 1024E,
\end{aligned}$$

donde los coeficientes subyacen fácilmente a la fórmula

$$\begin{aligned}
M = 1 &- 4A\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} + 16B\frac{n+1 \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\\
&- 64C\frac{n+2 \cdot n+1 \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\\
&+ 256D\frac{n+3 \cdot n+2 \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \quad \text{etc},
\end{aligned}$$

en donde M será igual a 0 (cuando n es par), o igual al término $\frac{1}{2}(n+1)$-ésimo de la serie $1, A, B, C, D,$ etc. (cuando n es impar). De estas ecuaciones deducimos las siguientes (los signos de derivación se explican en *Disquisitiones Aritmeticae Art. 162*).

$$\begin{aligned}
0 &= 1 - 4A\\
4A - 1 &= 3 - 48A + 64B\\
0 &= 5 - 200A + 720B - 576C\\
16B - 9A &= 7 - 532A = 3696B - 7168C + 4096D\\
0 &= 9 - 1116A + 1270B - 43776C + 57600D - 25600E
\end{aligned}$$

En ellas los coeficientes cumplen la ley general siguiente

$$\begin{aligned}
nnN - (n-1)^2L = (2n-1)(1 &- 4A\frac{3nn-3n+2}{1 \cdot 2}\\
&+ 16B\frac{n \cdot n-1 \cdot 5nn-5n+6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\\
&- 16C\frac{n+1 \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot 7nn-7n+12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\\
&+ 64D\frac{n+2 \cdot n+1 \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot 9nn-9n+20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}\\
&- \quad \text{etc. })
\end{aligned}$$

L y N son una u otra igual a 0 (cuando n es impar) o con los términos respectivos $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}(n+1)$ de la serie $1, A, B, C, D$, etc.

En esta fórmula la ley de los factores es obvia si se tiene presente que fuera de los factores simples entra en cada coeficiente el factor doble tal como $Knn - Kn + \frac{1}{4}(KK-1)$.

Estas ecuaciones se demuestran más fácilmente del siguiente modo: separando los miembros de cada una de las fracciones a la derecha en dos partes (excepto la primera que permanece igual),

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 4A \\ 4A - 1 &= \{3 - 36A - 12A + 64B\} \\ 0 &= \{5 - 180A + 400B - 20A + 320B - 576C\} \\ 16B - 9A &= \{7 - 504A + 2800B - 3136C - 28A + 896C - 4032C + 4096D\} \\ 0 &= \{9 - 1080A + 10800B - 28224C + 20736D - 36A + 1920B \\ &\quad - 15552C + 36864D - 25600E\}. \end{aligned}$$

A saber, la ecuación n-ésima es en general

$$\begin{aligned} nnN - (n-1)^2 L &= (2n-1)\{1 - 3\cdot 4A\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2} \\ &+ 5\cdot 16B\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \\ &\frac{-7\cdot 64C\frac{(n+2)\cdot(n+1)\ldots(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 6} - 4A\frac{2}{1\cdot 2} + 16Bn\cdot(n-1)\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \\ &- 64C\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot 54}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 6} + \cdots \\ &\frac{\pm k2^{k-1}kn + \frac{k-3}{2}\cdot n + \frac{k-5}{2}\cdot n + \frac{k-7}{2}\cdots n - \frac{k-1}{2}\cdots}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k-1} \\ &\frac{\pm 2^{k-1}kn + \frac{k-5}{2}\cdot n + \frac{k-7}{2}\cdots n - \frac{k-3}{2}\cdot\frac{1}{4}(k-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k-1} \end{aligned}$$

La "k" designa indefinidamente cualquier impar. Sean así

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 4A \\ 4A - 1 &= 3(1-4A) - 4(9A - 16B) \\ 0 &= 5(1-4A) - 20(9A-16B) + 16(25B - 36C) \\ 16B - 9A &= 7(1-4A) - 56(9A-16B) + 112(25B-36C) - 64(49C - 64D) \\ 0 &= 9(1-4A) - 120(9A-16B) + 432(25B-36C) - 576(49C-64D) \\ &\quad + 256(81D - 100E), \end{aligned}$$

etc. Entonces en general la n-ésima ecuación es

$$\begin{aligned} nN-(n-1)^2L =&(2n-1)(1-4A)-4\frac{2n-1\cdot n\cdot n-1}{1\cdot 2\cdot 3}(9A-16B)\\ &+16\frac{2n-1\cdot n+1\cdot n\cdot n-1\cdot n-2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(25B-36C)\\ &-64\frac{2n-1\cdot n+2\cdot n+1\cdot n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7}\\ &(49C-64D). \end{aligned}$$

En donde la universalidad de la ley dimana del cálculo, de aquí pues se hace necesario

$$0=1-4A,\quad 0=9A-16B,\quad 0=25B-36C,\quad 0=49C-64D,\quad 0=81D-100E,$$

etc. al infinito y por lo tanto

$$A=\frac{1}{4},\quad B=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16},\quad C=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36},\quad D=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{49}{64},$$

etc. y así siempre al infinito. Q.E.D.

VI. Si establecemos

$$1+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^4+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}x^6+\cdots=y,$$

se hace

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{4}x^4+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{6}x^6+\ \text{etc}\ =x\frac{dy}{dx}.$$

Luego

$$x^2+\frac{1}{4}9x^4+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}25x^6+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}49x^8+\ \text{etc}\ =x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx},$$

de donde se sigue fácilmente

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x^2}(x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx})$$

o

$$(x^3-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(3x^2-1)\frac{dy}{dx}+xy=0.$$

De este modo nuestras medias aritmético-geométricas son llamadas cantidades integrales y dan una solución particular de esta ecuación diferencial. La integral será

$$\frac{\mathcal{U}}{M(1+x,1-x)}+\frac{\mathcal{B}}{M(1,x)}$$

Sea φ un ángulo indefinido, el valor integral $\int_0^\pi \cos\varphi^2 d\varphi$ como se sabe es igual a $\frac{1}{2}\pi$, de la misma manera se hace $\int_0^\pi \cos\varphi^4 d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\pi$, se hace $\int_0^\pi \cos\varphi^6 d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\pi$, etc. Finalmente, como es sabido $\int_0^\pi d\varphi = \pi$, de aquí que el valor de

$$\int d\varphi(1+\frac{1}{2}x^2\cos\varphi^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4\cos\varphi^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6\cos\varphi^6+\cdots)$$

o de este: $\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos\varphi^2}}$ se hace igual a πy, considerando x constante.

Ya que la función $\frac{1}{\sqrt{1-x^2\cos\varphi^2}}$ se desarrolla en la serie:

$$P+2Q\cos(2\varphi)+2R\cos(4\varphi)+2S\cos(6\varphi)+\cdots$$

de manera que los coeficientes $P,Q,R,\cdots$ dependan de x tendremos

$$P\varphi+Q\sin(2\varphi)+\frac{1}{2}R\sin(4\varphi)+\frac{1}{2}S\sin(6\varphi)+\cdots+const.$$

Integrando, como antes entre 0 y π esta es igual a $P\pi$, de donde $y=P$. Ya observamos que

$$\frac{1}{y}=M(1,\sqrt{1-x^2}).$$

De aquí se sigue el siguiente teorema general:

Si la expresión $\frac{\alpha}{\sqrt{\zeta-\gamma\cos\varphi^2}}$ se desarrolla según la serie de los cosenos de los ángulos $2\varphi,4\varphi,6\varphi,\cdots$ cuyo término de $\frac{\alpha}{\sqrt{\zeta-\gamma Cos\varphi^2}}$ (como son $\frac{\alpha}{\sqrt{\zeta-\gamma}}$ y $\frac{\alpha}{\sqrt{\zeta}}$), se indiquen por ν,ν', P será la media aritmetico-geométrica entre $\frac{1}{\nu}$ y $\frac{1}{\nu'}$.

No hay dificultad en extender el teorema a funciones como $\frac{\alpha}{\sqrt{\zeta-\gamma\cos\varphi}}$, en este caso $\frac{1}{\text{Term. Const}}$ será igual

$$M(\frac{1}{\text{Valor máx}},\frac{1}{\text{Valor mín}})=M(\frac{\sqrt{\zeta-\gamma}}{\alpha},\frac{\sqrt{\zeta+\gamma}}{\alpha}.$$

De esta manera las funciones se reducirán a la forma $\frac{\alpha}{\sqrt{\zeta-\gamma+\gamma Cos\psi^2}}$, semejante a las que vimos antes haciendo $\varphi = 2\psi$. Se sigue de lo anterior que al comparar expresiones como $\frac{\alpha}{\sqrt{\zeta+\gamma Cos\varphi}}$ de manera que sus valores extremos se hagan iguales, los términos constantes que salen por el desarrollo de las mismas se hacen aunque los otros coeficientes discrepen mucho.

Más adelante esta disquisicion dará utilidad para mostrar a aquellos que no gustan de la sublimidad y divina hermosura de las verdades eternas y que las aprecian sólo por su uso, como éstas pueden redundar en las matemáticas aplicadas y así se vuelvan más queridas. Nadie ignora de cuanta utilidad sea la evolución de los coeficientes $P, Q, R, \cdots$ y tan rápida; de tal manera que lo que sale de estos principios se aplique en la Física Astronómica y en la Teoría del Movimiento de los Planetas.

OBSERVACIONES

I. El artículo de Gauss parece datar de 1798 aproximadamente. Hacia 1858, el matemático Borchardt resolvió el problema de forma diferente; de la existencia del límite común de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, o sea $M(a,b)$, y de la observación de que $M(a,b) = M(a_n, b_n)$ para cada n, lo mismo que cada función de M; plantea la ecuación funcional

$$f(m,n) = f(\frac{m+n}{2}, \sqrt{mn})$$

la cual se debe satisfacer por M y recíprocamente cada función "f" que satisface la ecuación es una simple función de M.

La solución se reduce pues a la solución de esta ecuación funcional. Deduce que la función buscada debe satisfacer una ecuación diferencial parcial. Luego mediante escogencia de variables la reduce a una ecuación diferencial simple. Como $M(ta, tb) = tM(a,b)$ entonces M es una función homogénea de orden uno y de ahí los coeficientes diferenciales $\frac{\partial M}{\partial m}, \frac{\partial M}{\partial n}$ son funciones homogéneas de grado cero de m, n lo que significa que dependen sólo de $\frac{n}{m}$. Como además $f(m,n)$ es una función simple de M(**), se presenta la proporción

$$\frac{\partial f}{\partial m} : \frac{\partial f}{\partial n} :: \frac{\partial M}{\partial m} : \frac{\partial M}{\partial n}.$$

A partir de estas observaciones comienza una disquisición que lleva a la ecuación

$$x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + (x+y)(1-xy) = 0$$

(**)Esto se deduce aplicando infinitamente la ecuación $f(m,n) = f(M,N)$.

siendo $x = \frac{n}{m}$ y $y = \frac{\partial f/\partial n}{\partial f/\partial m}$ que tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = Ax^2 + By + C.$$

(***)

que se reduce a

$$0 = (x - x^3)\frac{d^2V}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{dV}{dx} - xV,$$

la que obtuvo Gauss al final de su artículo. Observa que esta ecuación corresponde también a la integral elíptica completa. Reuniendo esto y el hecho de que la ecuación diferencial es resuelta por $V = \frac{m}{M(m,n)}$ y que para $m = n$ será $M = m$, o que es lo mismo, para $x = 1$ se tiene $V = 1$, conlleva la siguiente conclusión

$$M(m,n) = \left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2 - n^2\sin\varphi^2}}\right]^{-1}$$

Esta es la media aritmético-geométrica de m, n. El artículo apareció en *Journal fur Reine Mathematik, T.58* . Se observa que partiendo del miembro derecho se llega al límite de a_n y b_n porque la integral no varía si en vez de m , n se coloca m_1, n_1, etc.

2.Si consideramos una sucesion de elipses

$$\frac{x^2}{a_n} + \frac{y^2}{b_n} = 1$$

siendo a_n y b_n como se definieron antes, entonces tenemos que el límite común $M(a,b)$ satisface la ecuación

$$lim_{n\to\infty} P_n = 2\pi M(a,b)$$

donde P_n es el perímetro de la enésima elipse. Sabemos que

$$P_n = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e_n^2 \sin\varphi^2}d\varphi = 2\pi a_n\left[1-\left(\frac{1}{2}e_n\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}e_n^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}e_n^3\right)^2 - \text{etc}\right]$$

siendo la excentricidad $e_n = \frac{\sqrt{a_n^2 - b_n^2}}{a_n}$. Obsérvese que cuando la excentricidad es más pequeña la serie dada antes converge más rápidamente y la elipse tiende a ser una circunferencia; lo cual viene a coincidir con el hecho de que a_n y b_n tienden rápidamente a $M(a,b)$.

(***)Mediante la sustitución $y = \frac{dV/dx}{d(Vx)}$ se reduce a una lineal de segundo orden como en el caso de la ecuación de Riccati.

BIBLIOGRAFIA

1. Borchardt,Carl., *"Ueber das Aritmetische-Geometrische Mittel"*, Journal fur Reine Mathematik. T. 58.
2. Bourbaky, N., *Elementos de Historia de las Matemáticas.*
3. Gauss, Carl., *Werke Vol.X-1*, Gottingen Universität.