Boletín de Matemáticas
Nueva Serie Vol.I No.1 (1994) (17-33)

SUCESIONES MODERADAS

Yu Takeuchi

§1. Introducción.

Si $r > 1$ entonces la progresión geométrica $(r^n; n = 1, 2, 3, \cdots)$ crece hacia $+\infty$ *exponencialmente*, y su inversa $(1/r^n; n = 1, 2, 3, \cdots)$ tiende a cero *exponencialmente*. En el presente trabajo se van a estudiar sucesiones de términos positivos que no crecen hacia $+\infty$ exponencialmente, y/o no tienden a cero exponencialmente .

§2. Sucesiones Moderadas.

Sea (X_n) una sucesión de términos positivos, decimos que (X_n) es moderada hacia $+\infty$ si y sólo si (X_n) está por debajo de cualquier progresión geométrica de razón mayor que 1, o sea:

$$X_n = O(r^n) \text{ para cualquier } r > 1 \tag{1}$$

Ejemplos 1.

(i) Toda sucesión superiormente acotada es moderada hacia $+\infty$. (evidente)

(ii) La sucesión $(n^a \; ; n = 1, 2, 3, \cdots)$ es moderada hacia $+\infty$, donde a es una constante real (evidente) .

(iii) Sea (X_n) una sucesión de términos positivos, no moderada hacia $+\infty$; si $X_n \leq Y_n$ para todo n entonces (Y_n) no es moderada hacia $+\infty$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(iv) Sean (X_n) , (Y_n) sucesiones de términos positivos, si (X_n) es moderada hacia $+\infty$ y $\overline{\lim}(Y_n/X_n) \neq \infty$, entonces la sucesión (Y_n) es moderada hacia $+\infty$.

En efecto, sea $h = \overline{\lim}(Y_n/X_n)$; entonces $Y_n/X_n < h+1$ para todo n suficientemente grande. Como $X_n = O(r^n)$ para cualquier $r > 1$, entonces se tiene que $Y_n = O(r^n)$ para cualquier $r > 1$.

La condición (1) puede ser caracterizada de varias maneras, como puede verse en el siguiente lema 1.

Lema 1. *Sea (X_n) una sucesión de términos positivos, entonces las siguientes 7 condiciones son equivalentes:*

(i) (X_n) es moderada hacia $+\infty$, o sea :

$$X_n = O(r^n) \quad , \text{para cualquier } r \text{ con } r > 1$$

(ii) $X_n = o(r^n)$: para calaquier r con $r > 1$.

(iii) $X_n \cdot r^n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$ para cualquier r con $0 < r < 1$.

(iv) La sucesión $(X_n \cdot r^n; \quad n = 1, 2, 3, \cdots)$ es acotada, para cualquier r con $0 < r < 1$.

(v) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot r^n$ converge para $|r| < 1$.

(vi) $\overline{\lim} \sqrt[n]{X_n} \leq 1$.

(vii) Dado cualquier $r > 1$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} | X_n > r^n\}$ es finito .

Demostración:.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Dado $r > 1$, tenemos que $\sqrt{r} > 1$, luego :

$$X_n/r^n = \frac{X_n}{(\sqrt{r})^n} \cdot \left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^n \longrightarrow 0 \text{ ya que } X_n/(\sqrt{r})^n \text{ es acotada, y ,} (\sqrt{r}/r) < 1$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Evidente .

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). "$X_n = o(r^n)$ para $r > 1$" quiere decir que "$X_n/r^n \longrightarrow 0$ para $r > 1$", esto es ,$X_n \cdot (1/r)^n \longrightarrow 0$ para $0 < (1/r) < 1$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Evidente .

(iv) $\Longrightarrow$ (iii). Dado $0 < r < 1$, como $0 < \sqrt{r} < 1$ entonces la sucesión $(X_n \cdot (\sqrt{r})^n; n = 1, 2, 3, \cdots)$ es acotada, por lo tanto se tiene que:

$$X_n \cdot r^n = X_n \cdot (\sqrt{r})^n \cdot (\sqrt{r})^n \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty$$

(iii) $\Longrightarrow$ (v). Si $|r| < 1$ entonces $\sqrt{|r|} < 1$. de (iii) tenemos que $X_n \cdot (\sqrt{|r|})^n \longrightarrow 0$ Comparando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot r^n$ con la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{r})^n$ se ve que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot r^n$ converge cuando $|r| < 1$.
(v) $\Longrightarrow$ (iii). Evidente .
(v) $\Longleftrightarrow$ (vi) La condición (v) quiere decir que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot r^n$ debe ser mayor o igual a 1, o sea que $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{X_n} \leq 1$.
(ii) $\Longrightarrow$ (vii). Si $X_n = o(r^n)$ para cualquier $r > 1$, entonces $X_n \leq r^n$ para todo n suficientemente grande, por lo tanto el conjunto $\{n \in \mathbb{N} | X_n > r^n\}$ es finito .
(vii) $\Longrightarrow$ (i). Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} | X_n > r^n\}$ es finito , entonces $X_n \leq r^n$ para todo n suficientemente grande, o sea $X_n = O(r^n)$. $\square$

Nota. Si en el lema 1 negamos la propiedad *ser moderada*, tenemos que una sucesión (X_n) (de términos positivos) **no es moderada hacia** $+\infty$ si y sólo si :

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{X_n} > 1 \quad \text{(la negación de (vi))},$$

lo cual es equivalente a la negación de (iv) :
"existen, r con $0 < r < 1$, y una subsucesión $(X_{n(j)}; j = 1, 2, 3, \cdots)$ tales que

$$X_{n(j)} \cdot r^{n(j)} \longrightarrow +\infty \qquad \text{(cuando} \quad j \longrightarrow \infty)."$$

Sea (X_n) una sucesión de términos positivos; decimos que (X_n) es **moderada hacia cero** si su inversa $(1/X_n)$ es moderada hacia $+\infty$. Por ejemplo las sucesiones $(1/\log(n+1))$, $(1/n)$, $(1/n^2)$ son moderadas hacia cero. (X_n) no es moderada hacia cero si y sólo si $\underline{\lim}\ \sqrt[n]{X_n} < 1$, lo cual es equivalente a: "existen un real $r > 1$, y una subsucesión $(X_{n(j)}; j = 1, 2, 3, \cdots)$ tales que $X_{n(j)} r^{n(j)} \longrightarrow 0 \quad (j \longrightarrow +\infty)$."

Definición. Sea (X_n) una sucesión de términos positivos, decimos que (X_n) es **moderada** si ésta es moderada hacia $+\infty$ y es moderada hacia cero.

Esta propiedad es caracterizada de varias formas, como puede verse en el siguiente lema 2 .

Lema 2. *Sea (X_n) una sucesión de términos positivos, las siguientes cinco propiedades son equivalentes:*

(i) *(X_n) es moderada.*

(ii) $X_n r^n \longrightarrow 0$ *para cualquier* r *con* $0 < r < 1$, *y*

$X_n r^n \longrightarrow +\infty$ *para cualquier* r *con* $r > 1$.

(iii) *las series* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n r^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(1/X_n)r^n$ *convergen para* $|r| < 1$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{X_n} = 1$.

(v) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \log X_n = 0$.

Demostración:.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) Por la definición y la condición (iii) del lema 1.

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) Por lema 1, condición (v).

(i) $\Longleftrightarrow$ (iv): Supongamos que (X_n) es moderada; por el lema 1, codición (iv), tenemos:

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{X_n} \leq 1 \quad \text{y} \quad \overline{\lim}\, \frac{1}{\sqrt[n]{X_n}} \leq 1.$$

Pero como:

$$\overline{\lim}\Big(\frac{1}{\sqrt[n]{X_n}}\Big) = \frac{1}{\underline{\lim}\, \sqrt[n]{X_n}}$$

entonces:

$$1 \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{X_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{X_n} \leq 1$$

por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{X_n} = 1.$$

El recíproco es inmediato.

(iv) $\Longleftrightarrow$ (v): Evidente.

Ejemplos 2.

(i) Una sucesión constante de valor positivo es moderada.

(ii) Una sucesión de términos positivos, acotada superiormente y separada de cero, es moderada.

(iii) La sucesión $(n^a; n = 1, 2, 3, \cdots)$ es moderada, dode a es una constante real (positiva o negativa).

(iv) La sucesión $(\log(n+1); n = 1, 2, 3, \cdots)$ es moderada.

(v) La sucesión $(2^{\sqrt{n}}; n = 1, 2, 3, \cdots)$ es moderada.

(vi) Sean (A_n), (B_n) sucesiones moderadas con $A_n < B_n$ para todo n. Si $A_n \leq X_n \leq B_n$ para todo n, entonces la sucesión (X_n) es moderada .

(vii) Sean (X_n) una sucesión moderada hacia ∞, y (A_n) una sucesión que satisface:

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|A_n|} < 1,$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot X_n$ converge absolutamente. En efecto:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n \cdot X_n|} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{X_n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|} < 1.$$

Las siguientes propiedades acerca de las sucesiones moderadas son, fáciles de demostrar.

(M1) Supongamos que la sucesión de términos positivos (X_n) satisface:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n} = r, \tag{2}$$

entoces (X_n) es moderada si y sólo si $r = 1$.

En efecto, (2) implica que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{X_n} = r,$$

por lo tanto, del lema 2, (iv) se obtiene el resultado deseado.

(M2) Si (X_n), (Y_n) son moderadas, también lo son $(X_n)^{(C_n)}$ (con (C_n) acotada), $(\frac{1}{(X_n)})$, $(X_n + Y_n)$, $(X_n \cdot Y_n)$, (máximo (X_n, Y_n)), (mínimo(X_n, Y_n)).

En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \log {X_n}^{(C_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{n} \cdot \log X_n = 0,$$

por lo tanto la sucesión $({X_n}^{C_n})$ es moderada si (C_n) es acotada. Como un caso particular ($C_n = -1$ para todo n), la sucesión $(1/X_n)$ es moderada.

También:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{X_n \cdot Y_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{X_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{X_n} = 1,$$

por lo tanto la sucesión $(X_n \cdot Y_n)$ es moderada.

Por otra parte, tenemos:

$$r^n \cdot (X_n + Y_n) = r^n \cdot X_n + r^n \cdot Y_n \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{si } |r| < 1 \\ +\infty, & \text{si } r > 1, \end{cases}$$

por lo tanto la sucesión $(X_n + Y_n)$ es moderada.
Como $(X_nY_n)/(X_n+Y_n) \leq X_n$ y $Y_n \leq X_n+Y_n$ para todo n, entonces las sucesiones (máximo(X_n, Y_n)), (mínimo(X_n, Y_n)) son moderadas □

Si se define el producto de dos sucesiones en la forma acostumbrada:

$$(X_n) \cdot (Y_n) = (X_n \cdot Y_n), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

entonces el conjunto de todas las sucesiones moderadas es un grupo multiplicativo, donde la sucesión constante de valor 1, $(1, 1, 1, \cdots)$ es la unidad del grupo.

(M3) Sea (X_n) una sucesión de términos positivos; (X_n) es moderada hacia $+\infty$ si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ es moderada.

Nótese que la *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ *es la sucesión* $(S_n;\, n = 1, 2, 3, \cdots)$ de sumas parciales: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Demostración:. Supongamos que (S_n) es moderada, entonces para $0 < r < 1$ tenemos que

$$X_n \cdot r^n = (S_n - S_{n-1}) \cdot r^n = S_n \cdot r^n - S_{n-1} \cdot r^{n-1} \cdot r \longrightarrow 0,$$

por lo tanto la sucesión (X_n) es moderada hacia $+\infty$.

Recíprocamente, supongamos que (X_n) es moderada hacia $+\infty$. Si $r > 1$, entonces

$$r^n \cdot S_n > r^n \cdot X_1 \longrightarrow +\infty, \quad \text{o sea} \quad , r^n \cdot S_n \longrightarrow +\infty.$$

Si $0 < r < 1$ entonces $\sqrt{r} < 1$, luego $(\sqrt{r})^n < (\sqrt{r})^k$ para todo $k < n$, y usando el lema 1, (v):

$$r^n \cdot S_n = (\sqrt{r})^n \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot (\sqrt{r})^n < (\sqrt{r})^n \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot (\sqrt{r})^k$$

$$< (\sqrt{r})^n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cdot (\sqrt{r})^k \longrightarrow 0 \quad (\text{cuando n} \longrightarrow \infty)$$

por lo tanto la sucesión S_n es moderada □

Nótese que si (X_n) es moderada, entonces también lo es la sucesión $(\frac{1}{X_n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k), n = 1, 2, 3, \cdots$.

(M4) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ una serie convergente de términos positivos; si (X_n) es moderada hacia cero, entonces la sucesión $(\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k)$, $k = 1, 2, 3, \cdots$ es moderada.

En efecto, para $r > 1$ tenemos:

$$r^n \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} X_k > r^n \cdot X_{n+1} = \frac{r^{n+1} \cdot X_{n+1}}{r} \longrightarrow +\infty \quad (n \longrightarrow \infty),$$

Luego la sucesión $(\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k)$, $k = 1, 2, 3, \cdots$ es moderada hacia cero. Evidentemente ésta es moderada hacia $+\infty$ □

Nótese que la sucesión $(\frac{1}{X_n} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} X_k)$, $k = 1, 2, 3, \cdots$ es moderada.

El recíproco de M4 no es cierto. Por ejemplo, si

$$a_{2n} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad a_{2n-1} = \frac{1}{2^n}$$

entonces $a_n \cdot (\sqrt{2})^n$ no tiende a $+\infty$, o sea que la sucesión a_n no es moderada hacia cero, pero la sucesión $(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k)$ sí es moderada hacia cero, ya que

$$\sum_{k=2n}^{\infty} a_k = \frac{1}{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{y} \quad \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(M5) Sea (U_n) tal que $-1 < U_n$ para todo n. Supongamos que $U_n \longrightarrow L$ (cuando $n \longrightarrow \infty$), entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + U_n)$ es moderado si y sólo si $L = 0$.

Nótese que el *producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+U_n)$ es la sucesión (P_n) de los productos parciales $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + U_k)$.

En efecto, como

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = (1 + U_{n+1}) \longrightarrow 1 + L \quad (\text{cuando n} \longrightarrow \infty)$$

entonces por la propiedad M1 se obtiene que (P_n) es moderada si y sólo si $L = 0$.

Ejemplo 3. Si (X_n) es moderada, entonces también lo son las siguientes sucesiones:

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right), \quad \left(\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k)^2}{n}}\right), \quad (\sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdots X_n})$$

En efecto, la primera es moderada por M2 y M3 , puesto que la sucesión $(n)=(1,2,3,\cdots)$ es moderada.

La sucesión $((X_n)^2; n = 1,2,3,\cdots)$ es moderada por M2 y la sucesión $\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k)^2}{n}}$ es moderada por M2 y M3.

Además

$$|(1/n)\cdot \log \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdots X_n}| = (1/n)\cdot(1/n)\cdot|(\log X_1 + \log X_2 + \cdots + \log X_n)|$$

$$\leq \frac{1}{n}\cdot(|\log X_1| + |(\log X_2)/2| + \cdots + |(\log X_n)/n|) \longrightarrow 0 \quad (\text{cuando } n \longrightarrow \infty)$$

puesto que $(1/n)\cdot|\log X_n| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$.

Nótese que si una sucesión (a_n) tiene límite L, entonces la sucesión de las medias ariméticas $((a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n)$ también tiende a L.

Ejemplo 4. Sea (X_n) dada por la fórmula lineal de recurrencia de primer grado:

$$X_{n+1} = a_n \cdot X_n + b_n \quad (a_n > o, b_n > 0) \quad n = 1,2,3,\cdots$$

donde $a_n \longrightarrow 1$ y (b_n) es moderada hacia $+\infty$. Si $X_1 \geq 0$, entonces la sucesión (X_n) es moderada.

En efecto, sabemos que

$$X_{n+1} = (a_1 a_2 \cdots a_n)\cdot(X_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k})$$

Como $a_n \longrightarrow 1$, entonces $(a_1 a_2 \cdots a_n)$, $n = 1,2,3,\cdots$ es moderada, luego $(b_k/(a_1 a_2 \cdots a_k))$, $k = 1,2,3,\cdots$ es moderada hacia $+\infty$; en consecuencia la serie

$$(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_1 a_2 \cdots a_k}) \quad n = 1,2,3,\cdots$$

es moderada. Por lo tanto, la sucesión (X_n) es moderada.

Observación. Si una sucesión de términos positivos (X_n) satisface la condición:

$$X_n = O(n^a) \quad \text{para algún} \quad a > 0,$$

podemos considerar que la sucesión (X_n) es **lentamente creciente** (concepto usado en teoría de distribuciones): la condición anterior es equivalente a :

$$\left(\frac{\log X_n}{\log n}\right) \quad \text{es superiormente acotada.} \tag{3}$$

De la misma manera , si

$$\frac{1}{X_n} = O(n^b) \quad \text{para algún} \quad b > 0,$$

entonces la sucesión (X_n) es **lentamente decreciente** hacia 0; ésta es equivalente a:

$$\left(\frac{\log X_n}{\log n}\right) \quad \text{es inferiormente acotada.} \tag{4}$$

Si la sucesión (X_n) es **lentamente creciente** y **lentamente decreciente** entonces se tiene que

$$\left(\frac{\log X_n}{\log n}\right) \quad \text{es acotada.} \tag{5}$$

Evidentemente la codición (5) implica que la sucesión (X_n) es moderada; en efecto:

$$\frac{1}{n} \cdot \log X_n = \frac{\log X_n}{\log n} \cdot \frac{\log n}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

El recíproco no es cierto; por ejemplo, sea

$$X_n = 2^{\sqrt{n}}$$

entonces:

$$\frac{1}{n} \cdot \log X_n = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \log 2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \log 2 \longrightarrow 0,$$

y

$$\frac{\log X_n}{\log n} = \frac{\sqrt{n} \cdot \log 2}{\log n} \longrightarrow +\infty.$$

De lo anterior, entre las tres condiciones:

$$\text{(I)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{X_n} = 1 \quad \text{(II)} \lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n} = 1 \quad \text{(III)} \frac{\log X_n}{\log n} \quad \text{es acotada,}$$

precisamente la primera es la más débil; por esta razón la hemos utilizado para introducir el concepto de *sucesión moderada*.

§3. Parte fraccionaria de $n \cdot a$.

Dado $a \in \mathbb{R}$, se denota por $((n \cdot a))$ *la parte fraccionaria de* $n \cdot a$; a continuación estudiaremos en qué casos la sucesión $(((n \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$ es moderada.

Lema 3.

Dada $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$ *una serie convergente de términos positivos, existe un conjunto* $A(\subseteq \mathbb{R})$ *no contable y de medida nula tal que*

(i) *Si* $a \notin A$ *entonces*

$$((n \cdot a)) \geq \lambda_n \quad , y , \quad 1 - ((n \cdot a)) \geq \lambda_n \quad \textit{para dodo n suficientemente grande.}$$

(ii) *Si* $a \in A$ *entonces: dada cualquier* $m \in \mathbb{N}$, *existe* $n \geq m$ *tal que*

$$((n \cdot a)) < \lambda_n \quad , \acute{o} , \quad 1 - ((n \cdot a)) < \lambda_n .$$

Demostración:. Si $(a - \tilde{a}) \in \mathbb{Z}$ (o sea, $a \equiv \tilde{a} \bmod \mathbb{Z}$) entonces:

$$((n \cdot a)) = ((n \cdot \tilde{a})) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por esta razón podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $a \in [0, 1)$ o sea que basta encontrar un conjunto A que sea subconjunto de $[0, 1)$. Sean:

$$A_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{\lambda_n}{n}, \frac{k}{n} + \frac{\lambda_n}{n}\right) \quad \text{y} \quad A = \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right) \bigcap [0, 1),$$

entonces $A \supset Q$ donde Q es el conjunto de todos los números racionales en $[0, 1)$, ya que $A_m \supset Q$ pata todo m. Además A no es contable ya que A es la intersección contable de los conjuntos abiertos A_m, $m = 1, 2, 3, \cdots$ Si μ es la medida de Lebesgue, tenemos que

$$\mu(A) \leq \mu(A_m) \leq \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot \frac{2 \cdot \lambda_n}{n} = 2 \cdot \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty),$$

luego: $\mu(A) = 0$.

(i) Supongamos que $a \notin A$; entonces:

$$a \notin A_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{\lambda_n}{n}, \frac{k}{n} + \frac{\lambda_n}{n}\right) \quad \text{para } \textit{algun} \text{ m},$$

luego o bien

$$|a - \frac{k}{n}| \geq \frac{\lambda_n}{n} \quad (\text{para todo } k = 0, 1, 2, \cdots, n \text{ y para todo } n \geq m),$$

ó

$$|n \cdot a - k| \geq \lambda_n \quad (\text{para todo } k = 0, 1, 2, \cdots, n \text{ y para todo } n \geq m)$$

Esto es:

$$((n \cdot a)) \geq \lambda_n \quad , \text{y} , \quad 1 - ((n \cdot a)) \geq \lambda_n \quad (\text{para todo } n \geq m).$$

(ii) Ahora, supongamos que $a \in A$; entonces:

$$a \in A_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n} (\frac{k}{n} - \frac{\lambda_n}{n}, \frac{k}{n} + \frac{\lambda_n}{n}) \quad \text{para } \textit{todo} \quad m,$$

o sea que dado cualquier m, existe un $n \geq m$ tal que

$$a \in (\frac{k}{n} - \frac{\lambda_n}{n}, \frac{k}{n} + \frac{\lambda_n}{n}) \quad \text{para } \textit{algún } k \leq n$$

Por lo tanto:

$$((n \cdot a)) < \lambda_n \quad , \text{ó} , \quad 1 - ((n \cdot a)) < \lambda_n \quad \square$$

Teorema 1.

Existe un conjunto $A_0(\subset \mathbb{R})$ no contable y de medida nula tal que

(i) *Si $a \notin A_0$ entonces las sucesiones $(((n \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$ y $(1 - ((n \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$ son ambas moderadas.*

(ii) *Si $a \in A_0$, entonces o bien $(((n \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$ no es moderada, ó , $(1 - ((n \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$ no es moderada.*

Evidentemente, el conjunto A_0 es único.

Demostración. (i) En el lema 3, tomando $\lambda_k = 1/(k^2)$, existe un conjunto A_1 *no contable* y de *medida nula* tal que:

si $a \notin A_1$ entonces $1/(n^2) \leq ((n \cdot a)) \leq 1 - (1/n^2)$ para n suficientemente grande, por lo tanto las sucesiones $(((n \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$ y $(1 - ((n \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$ son ambas moderadas.

(ii) En el lema 3, tomando $\lambda_k = (\frac{1}{2})^k$, existe un conjunto A_2 *no contable* y de *medida nula* tal que

Si $a \in A_2$ entonces el conjunto $\{n \in \mathbb{N} | ((n \cdot a)) < (\frac{1}{2})^n$, ó ,$[1 - ((n \cdot a)] < (\frac{1}{2})^n\}$ es infinito. Por lo tanto una de las sucesiones $(((n \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$, ó , $(1 - ((n \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$ no es moderada.

(iii) Sea $A_0 = \{a \in \mathbb{R} | ((n \cdot a))_n$, ó ,$(1 - ((n \cdot a)))_n$ no es moderada$\}$ entonces:

$$A_2 \subseteq A_0, \quad \text{y} \quad \mathbb{R} - A_0 \supseteq \mathbb{R} - A_1 \quad (\text{o sea }, \quad A_0 \subseteq A_1),$$

por lo tanto se tiene que el conjunto A_0 *no es contable* y es de *medida nula* □

Cololario.. *Existe un conjunto* Θ *no contable y de medida nula tal que*

(i) *Si* $\theta \notin \Theta$ *entonces la sucesión* $(|sen\, n \cdot \theta|; n = 1, 2, 3, \cdots)$ *es moderada.*

(ii) *Si* $\theta \in \Theta$ *entonces la sucesión* $(|sen\, n \cdot \theta| n = 1, 2, 3, \cdots)$ *no es moderada.*

Demostración:. En el teorema anterior, tomando $a = \frac{\theta}{\pi}$ tenemos:

$$n \cdot \theta \equiv ((n \cdot a)) \cdot \pi \quad (\text{mod}\pi) \quad \text{y} \quad 0 \leq ((n \cdot a)) \cdot \pi < \pi$$

Por lo tanto se tiene que

$$|sen\, n\theta| = sen\, ((n \cdot a)) \cdot \pi = sen\, \{1 - ((n \cdot a))\} \cdot \pi.$$

Sea:

$$\Theta_0 = \pi \cdot A_0 = \{\theta | (\theta/\pi) \in A_0\}$$

donde A_0 es el conjunto dado en el teorema anterior.

(i) Usando la desigualdad conocida:

$$sen\, x \geq \frac{2}{\pi} \cdot x \quad \text{para} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

se obtiene:

-si $((n \cdot a))\pi \leq \frac{\pi}{2}$ entonces $|sen\, n\theta| \geq 2((n \cdot a))$,

-si $((n \cdot a))\pi \geq \frac{\pi}{2}$ entonces $|sen\, n\theta| \geq 2\{1 - ((n \cdot a))\}$,

Por lo tanto, si $\theta \notin \Theta_0$ la sucesión $(|sen\, n \cdot \theta|; n = 1, 2, 3, \cdots)$ es moderada.

(ii) Tenemos:

$$|sen\, n\theta| = sen\, ((n \cdot a)) \cdot \pi \leq ((n \cdot a)) \cdot \pi, \quad \text{y}$$

$$|sen\, n\theta| = sen\, \{1 - ((n \cdot a))\} \cdot \pi \leq \{1 - ((n \cdot a))\} \cdot \pi.$$

Por lo tanto, si $\theta \in \Theta_0$ entonces la sucesión $(|sen\, n \cdot \theta|; n = 1, 2, 3, \cdots)$ no es moderada. □

Según el teorema de aproximación de Dirichlet, dado $a \in \mathbb{R}$ existen $n(j) \in \mathbb{N}, \quad k(j) \in \mathbb{Z} \quad (j = 1, 2, 3, \cdots)$ tales que

$$n(j) \cdot a - k(j) \longrightarrow 0 \quad (j \longrightarrow \infty). \tag{6}$$

Sea:

$$E(j) = n(j) \cdot a - k(j) \tag{7}$$

entonces $E(j) \longrightarrow 0 \quad (j \longrightarrow \infty)$, y se observa que

$$E(j) = \begin{cases} ((n(j) \cdot a)) & \text{si } E(j) \geq 0, \\ ((n(j) \cdot a)) - 1 & \text{si } E(j) < 0. \end{cases}$$

Podemos expresar (6) y (7) como sigue:

$$n(j) \cdot a \equiv E(j) \longrightarrow 0 \quad (\mathrm{mod}\mathbb{Z})$$

Sea A_0 el conjunto dado en el teorema 1 ; si $a \notin A_0$ entonces las sucesiones $(((n \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$ y $(1 - ((n \cdot a); n = 1, 2, 3, \cdots)$ son moderadas, luego, para cualquier $r > 1$ tenemos :

$$((n \cdot a)) \cdot r^n \longrightarrow \infty \quad , \{1 - ((n \cdot a))\} \cdot r^n \longrightarrow +\infty.$$

Por lo tanto se debe tener la siguiente condicíon :

$$|E(j)| \cdot r^{n(j)} \longrightarrow +\infty \quad (j \longrightarrow \infty) \quad \text{para cualquier} \quad r > 1. \tag{8}$$

Recíprocamente, si $a \in A_0$ entoces existen $r > 1$ y una sucesión de números naturales $(n(j) : j = 1, 2, 3, \cdots)$ tales que

$$n(j) \cdot a \equiv E(j) \longrightarrow 0 \quad (\mathrm{mod} \quad \mathbb{Z}), \quad \text{y}$$

$$|E(j)| \cdot r^{n(j)} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty \tag{9}$$

Estructura de los conjuntos A_0 y $\mathbb{R} - A_0$.

C1) $a \in A_0$ si y sólo si $-a \in A_0$.

En efecto, tenemos:

$$n \cdot a \equiv ((n \cdot a)) \pmod{\mathbb{Z}}$$

luego:

$$n(-a) = -(na) \equiv 1 - ((n \cdot a)) \pmod{\mathbb{Z}}$$

Por lo tanto tenemos:

$$((-n \cdot a)) = 1 - ((n \cdot a)).$$

Por la definición del conjunto A_0 se obtiene el enunciado.

C2) Sea $m \in Z$; si $a \in A_0$, entonces $ma \in A_0$. Si $a \notin A_0$ entonces $m \cdot a \notin A_0$.

Demostración. : Por (C1), basta suponer que $m \in \mathbb{N}$.

(i) Supongamos que $a \notin A_0$, entonces las sucesiones $(((n \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$ y $(1 - ((n \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$ son moderadas, luego las subsucesiones $(((nm \cdot a)),\quad n = 1, 2, 3, \cdots)$ y $(1 - ((nm \cdot a)); n = 1, 2, 3, \cdots)$ son también moderadas.

Por lo tanto se tiene que $m \cdot a \notin A_0$.

(ii) Supongamos que $a \in A_0$; existen $r > 1$ y $n(j) \in \mathbb{N}$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ con $n(j) \cdot a \equiv E(j) \longrightarrow 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ tales que

$$|E(j)| \cdot r^{n(j)} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty,$$

Tenemos:

$$n(j) \cdot (m \cdot a) = m \cdot n(j) \cdot a \equiv m \cdot E(j) \pmod{\mathbb{Z}},$$

y

$$|m \cdot E(j)| \cdot r^{n(j)} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad j \longrightarrow \infty,$$

por lo tanto se tiene que $m \cdot a \in A_0$ □

C3) Sea $q \in \mathbb{Q}$; si $a \in A_0$, entonces $q \cdot a \in A_0$; si $a \notin A_0$ entonces $q \cdot a \notin A_0$.

Demostración:. Supongamos que $q = \frac{m'}{m}$ con $m, m' \in \mathbb{N}$.

Si $a \in A_0$ entoces $\frac{1}{m} \cdot a \in A_0$, puesto que $\frac{1}{m} \cdot a \notin A_0$ implicaría $m \cdot \frac{1}{m} \cdot a = a \notin A_0$ (por C2)). Nuevamente Por (C2) se tiene que:

$$\frac{m'}{m} \cdot a = m' \cdot \frac{1}{m} a \in A_0.$$

De la misma manera se demuestra que si $a \notin A_0$ entonces $\frac{m'}{m} \cdot a \notin A_0$ $\square$.

C4) Sea $q \in Q$; si $a \in A_0$ entonces $a + q \in A_0$; si $a \notin A_0$ entonces $a + q \notin A_0$.

Demostración:. Sea $q = \frac{m'}{m}$ con $m, m' \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $a + q = a + \frac{m'}{m} \in A_0$, entonces por (C2) tenemos que

$$m \cdot (a + q) = m \cdot a + m' \in A_0.$$

Pero como $m \cdot a + m' \equiv m \cdot a \pmod{\mathbb{Z}}$, entonces $m \cdot a \in A_0$, por lo tanto se tiene que $a \in A_0$.

De la misma manera se demuestra que si $a + q \notin A_0$ entonces $a \notin A_0$ $\square$.

Ejemplo 5.. Un número irracional que pertenece a A_0.

Sea $(N_1, N_2, N_3, \cdots, N_k, \cdots)$ la sucesión de números naturales dada por la fórmula de recurrencia :

$$N_{k+1} = 2^{N_k} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots), \quad N_1 = 1,$$

por ejemplo:

$$N_1 = 1, \quad N_2 = 2, \quad N_3 = 4, \quad N_4 = 16, \quad N_5 = 65536, \quad \text{etc.}$$

Sea

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{N_k}$$

entonces

$$2^{N_j} \cdot a \equiv ((\frac{1}{2})^{N_{j+1}} + \cdots) \cdot 2^{N_j} \longrightarrow 0 \quad (j \longrightarrow \infty) \quad (\text{mod} \quad \mathbb{Z}).$$

Si $r = \sqrt{2}$, como $\sqrt{2} > 1$, entonces:

$$2^{N_j} \cdot ((\frac{1}{2})^{N_{j+1}} + \cdots) \cdot (r)^{2^{N_j}} =$$

$$((\frac{1}{2})^{N_{j+1}} + \cdots) \cdot (\sqrt{2})^{N_{j+1} + 2N_j} \longrightarrow 0 \quad (j \longrightarrow +\infty)$$

por lo tanto, se tiene que $a \in A_0$. Evidentemente, a es un número irracional $\square$

Una aplicación.

Sabemos que las series $\sum_{n=1}^{\infty} sen\, n\theta$, y $\sum_{n=1}^{\infty} cos\, n\theta$ son divergentes, pero sus sumas parciales son acotadas para $\theta \neq 0$:

$$|\sum_{n=1}^{N} sen\, n \cdot \theta| \leq \frac{1}{|sen\, \frac{1}{2} \cdot \theta|}, \tag{10}$$

$$|\sum_{n=1}^{N} cos\, n \cdot \theta| \leq \frac{1}{|sen\, \frac{1}{2} \cdot \theta|}$$

Se puede generalizar esta propiedad para otras funciones, como sigue:

sea $f(x)$ una función 2π periódica ; desarrollándola en serie de Fourier:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot sen\, kx \quad (\text{ó}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot cos\, kx), \tag{11}$$

Supongamos adicionalmente que

$$\overline{\lim} \sqrt[k]{|b_k|} < 1 \quad (\text{ó}, \quad \overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k|} < 1) \tag{12}$$

si $\theta \notin \Theta_0$ (Θ_0 es el conjunto del corolario del teorema 1), entonces las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n \cdot \theta)$ son acotadas, esto es: existe una constante $M(\theta)$ tal que

$$|\sum_{n=1}^{N} f(n \cdot \theta)| \leq M(\theta) \quad \text{para todo} \quad N \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

En efecto, de (10) y (11) tenemos:

$$|\sum_{n=1}^{N} f(n \cdot \theta)| = |\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sum_{n=1}^{N} sen\, nk \cdot \theta|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \cdot \sum_{n=1}^{N} sen\, nk\theta| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \cdot \frac{1}{|sen\, \frac{k \cdot \theta}{2}|} \tag{14}$$

Si $\theta \notin \Theta_0$, entonces $\frac{1}{2} \cdot \theta \notin \Theta_0$, luego la sucesión $(|sen\, \frac{k \cdot \theta}{2}|; k = 1, 2, 3, \cdots)$ es moderada , así :

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|sen\, \frac{k \cdot \theta}{2}|} = 1.$$

Como $\overline{\lim} \sqrt[k]{|b_k|} < 1$, entonces la última serie de (14) converge; tomando

$$M(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \frac{1}{|sen\, \frac{k \cdot \theta}{2}|}$$

se obtiene la desigualdad (13).

Como un caso particular, sea $u(r,\theta)$ una función armónica en el círculo unitario, donde (r,θ) son las coordenadas polares. Si ésta es contínua sobre la circunferencia unitaria $(r=1)$ entonces sabemos que la función $u(r,\theta)$ satisface la codición (12) en el interior del círculo $(r<1)$. Por lo tanto, para $r<1$, $\theta \notin \Theta_0$ las sumas parciales de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u(r, n\theta)$$

son acotadas.

Referencias

1. Takeuchi Y., *Estudio sistemático de algunas sucesiones*, Matemática, enseñanza universiteria, No.20 (1981), págs 3–74.
2. Takehuchi Y., *Movimiento de la población con fluctuantes pseudoaleatorios*, Integración (UIS) vol 6 No.2 (1988), págs 41–80.
3. Takeuchi Y., *Temas de sucesiones II*, Notas del seminario, 1992..