Boletín de Matemáticas
Nueva Serie Vol.I No.1 (1994) (39-59)

ENSEÑANZAS ACERCA DE LA NATURALEZA Y EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EXTRAÍDAS DE LA HISTORIA DEL ÁLGEBRA

MARÍA FALK DE LOSADA

ABSTRACT. Basados en unos presupuestos que parecen contar con confirmación experimental acerca de la transposición didáctica y en un modelo del pensamiento matemático, se examinan algunos episodios de la historia de la teoría de ecuaciones en búsqueda de aspectos que caractericen el pensamiento matemático y cuyo estudio pueda esclarecer las distintas etapas o niveles de hacer matemáticas que se protagonizan en el salón de clase.

EL PROYECTO

Las presentes consideraciones han surgido en el marco de una investigación*[1] cuyo propósito central reside en desarrollar un curso universitario de álgebra para futuros docentes y que recoge en especial una serie de resultados de investigación que conciernen dos aspectos inherentes en la formación de futuros docentes de matemáticas:

(a) La transferencia metodológica. El docente tiende a enseñar tal como fue enseñado. Es decir, tiende a perpetuar las prácticas metodológicas, pedagógicas y didácticas de sus profesores. Esto significa básicamente que, si no se utiliza una variedad de formatos de aprendizaje con el futuro docente en sus cursos universitarios, por ejemplo, si sólo es sometido a una metodología de clase magistral dictada por el profesor, si los temas matemáticos le son así transmitidos y si el futuro docente no participa en su construcción y elaboración, no será capaz de implantar en sus propias clases un estilo diferente y más deseable. Volviéndonos más positivos, lo anterior implica la necesidad de implantar metodologías alternas, especialmente, en nuestro punto de vista, metodologías a través de solución de problemas

[1] Investigadoras: Myriam Acevedo de Manrique, María Falk de Losada

y planteamientos constructivistas desde el salón de clase del profesor universitario, ambos de las cuales presuponen el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

(b) La no transferencia de contenidos. En contraste con lo anterior se encuentra como resultado de varias investigaciones que el futuro docente no relaciona la matemática que ha aprendido en sus cursos avanzados de matemáticas en la universidad con la matemática escolar. De alguna manera, resulta incapaz de utilizar estos conocimientos más formales y abstractos para profundizar su conocimiento de la matemática que debe enseñar. En cierto sentido, entonces, su formación superior se pierde, o al menos se desperdicia, ya que no resulta de beneficio directo para sus futuros alumnos.

Con base en estos dos presupuestos, entonces, nuestra propuesta reside en desarrollar primero un texto base para el curso universitario de álgebra que ayudaría a superar estas deficiencias, planteando una metodología variada y constructivista y mostrando nexos explícitos y específicos entre la matemática superior y la matemática escolar. Entre las alternativas que se desarrollan para este último objetivo se encuentra el aprovechamiento efectivo de aspectos de la historia del álgebra.

El pensamiento matemático

Por otra parte, manejamos un modelo del pensamiento matemático que se ha desarrollado con base en las ideas de una prominente investigadora inglesa en el área de educación matemática: Leone Burton. Hemos moldeado y transformado algunas de los planteamientos de Burton consultando nuestro propio ejercicio profesional y experiencia particular con la solución de problemas. En síntesis, el modelo contempla los puntos siguientes:

Se presenta una definición de pensamiento.

El pensamiento es el medio utilizado por los humanos para mejorar su comprensión de, y ejercer algún control sobre, el medio que los rodea.

Ahora, para responder la pregunta ¿Qué es el pensamiento matemático?, se traza una clara línea divisoria entre el pensamiento matemático y el cuerpo de conocimiento, tanto de contenido como de métodos, que se llama matemáticas; el pensamiento matemático es pertinente cualquiera que sea el contenido al cual se aplica; es análogo al método científico, pues ni éste pertenece únicamente a la ciencia; ni el pensamiento matemático se circunscribe a problemas de naturaleza matemática, aunque éstos pueden revelar de manera más reconocible sus características.

Luego, en el modelo de Burton se procede a identificar los medios particulares con los cuales la matemática mejora la comprensión y extiende el control sobre el medio en que el ser humano se mueve, generando un modelo basado en las operaciones, los procesos y la dinámica del pensamiento matemático. Al tratar de aplicar este modelo, hemos visto la necesidad de hablar también sobre ciertas operaciones generales, que hemos denominado *facultades monitoras* del pensamiento que influyen ineludiblemente sobre la visión que tenemos del pensamiento matemático.

Las operaciones. ¿En qué pensamos? Cualquier idea, observación o evento puede ser el estímulo que pone a andar al pensamiento. Tales eventos proporcionan los elementos sobre los cuales opera el pensamiento matemático. El pensar significa que se actúa sobre los elementos, y los métodos o las formas en que se actúa se llaman *operaciones del pensamiento matemático.*

Una de las tareas centrales del modelo es separar el comportamiento que resulta del pensamiento matemático de aquél que es producto de la aplicación de conocimiento o destrezas matemáticas. Por ejemplo, es bastante claro cuando se trabaja con niños pequeños que el ordenar un cierto grupo de objetos se relaciona con el pensamiento matemático, mientras que el contarlos dependería de su conocimiento del uso de los números.

Los procesos. En el modelo se postula que hay cuatro procesos centrales de la actividad matemática y que gozan de aplicación general. Son ellos: (1) especializar; (2) conjeturar; (3) generalizar; (4) convencer. Una descripción breve de estos servirá para concretar qué significan para nuestra investigación.

Especializar. Frente a un problema o interrogante un medio poderoso de explorar su significado es el de examinar casos particulares. Esto es la clave para una aproximación inductiva de aprendizaje y aparece naturalmente desde temprana edad. Cada ejemplo proporciona la oportunidad de manipular objetos que son concretos para el que piensa, sean estos físicos o ideales.

Conjeturar. Después de examinar suficientes ejemplos, surge casi automáticamente una conjetura acerca de los nexos que los relacionan. Por medio de la conjetura, el sentido de una regularidad subyacente se explora. La conjetura dirige u orienta el pensamiento hacia ciertos aspectos de la experiencia que se adelanta.

Generalizar. El reconocimiento de una regularidad desemboca en la afirmación de una generalización. Los enunciados generalizados son los elementos básicos que utilizan los aprendices para crear orden y significado entre una cantidad abrumadora de datos sensoriales, y el comportamiento se basa en tales generalizaciones.

Convencer. Convencer es mucho más que verificar, es cuestionar hipótesis o supuestos, dudar y sondear la generalización hasta llegar a producir una demostración. Una demostración es vista así como un intento por producir un argumento convincente, y entre la mayoría de los estudiantes de la escuela primaria o secundaria y la mayoría de las personas no se pasa más allá de esto: un argumento convincente. Para el pensamiento matemático más desarrollado, sin embargo, el argumento es deducido con ayuda de la lógica de un conjunto de axiomas e independiente de pruebas empíricas. La demostración es la principal diferencia entre la actividad matemática y la de otras ciencias.

La dinámica del pensamiento matemático. Se inicia el proceso de pensamiento matemático cuando se encuentra un elemento que produce suficiente sorpresa o curiosidad para impulsar su exploración por medio de la manipulación. El elemento puede ser un objeto físico, un diagrama, una idea o un símbolo, pero ha de encontrarse en un nivel que es concreto para el pensador, que inspira confianza y que es interpretable. Cualquier brecha que se percibe entre lo que se espera de la manipulación y lo que resulta, provoca una tensión que provee energía para que el proceso siga hasta que se encuentre algún sentido de regularidad o de nexos que alivia la tensión y la transforma en un sentido de logro, de placer, de maravilla, o en una nueva sorpresa o curiosidad que impulsa aun mas el proceso. Se requiere más manipulación para llegar a articular el significado de lo que sucede. Una articulación no ha de ser necesariamente verbal. Puede aparecer en forma de algo concreto, algo diagramático, o algo simbólico, pero en todo caso cristaliza el significado que se ha logrado.

La articulación se convierte en objeto para nueva manipulación produciendo un modelo dinámico en forma de hélice que perpetua el proceso: manipulación de objetos, percepción de una regularidad o relación, articulación de esta regularidad, etc.

Facultades monitoras. Ahora bien, ciertas facultades no exclusivas del pensamiento matemático funcionan como monitores en varias de las etapas de este proceso. Por ejemplo, el ingenio interviene en la etapa de manipulación. Literalmente, el ingenio construye configuraciones o combinaciones nuevas con los elementos de estudio. Puede volver a aparecer el ingenio en el momento de construir una demostración.

La intuición es especialmente importante para llegar a delimitar qué preguntas pueden resultar fructíferas (¿de qué manera es interesante manipular los objetos? o ¿cuál ejemplo especial puede producir los resultados más valiosos?), o para proporcionar la penetración para vislumbrar los nexos con base en los cuales se formula una conjetura.

Es claro también que el análisis y la argumentación lógica, no necesariamente formal, juegan un papel fundamental en el proceso de convencimiento, sin que éste constituya del todo una demostración formalmente válida.

De qué manera se manifiesta el pensamiento matemático en la historia del álgebra?

Es nuestra tesis central que, al presentar el álgebra abstracta al futuro docente como un cuerpo de conocimiento acabado y perfeccionado, no se encuentra este camino de construcción de significado, de conjetura, de generalización y de lenta acumulación de medios para demostrar los resultados construidos. De una manera esencial, un cuerpo de conocimiento sin raíces ni trayectoria, se vuelve ajeno, impersonal; repetir con esfuerzo personal una hazaña similar es naturalmente visto como inalcanzable. El futuro docente no es actor y partícipe sino receptor; se siente incapaz de hacer matemáticas y se convence que sus futuros alumnos tampoco tendrán esta capacidad. Se marra todo el proceso de creatividad.

Una de las alternativas que tenemos a nuestra disposición es la historia misma del álgebra donde se ha consignado un gran tesoro de conquistas progresivas que permiten ver cómo la humanidad ha trepado por la hélice y qué aspectos del pensamiento matemático han emergido guiando el proceso. No es nuestro objetivo empobrecer la formación del futuro docente, sino enriquecerla mostrando la relación del álgebra moderna con la teoría de ecuaciones, por ejemplo, y con la matemática escolar. Esta exploración dará significado nuevo y más solidamente fundamentado a los conceptos que se manejan y a las situaciones particulares que estos ejemplifican.

Es decir, planteamos que una reconstrucción histórica del álgebra revela la actividad y el pensamiento matemáticos en estado de evolución y así resulta aprovechable para llegar a una caracterización del pensamiento matemático que no se asocie unicamente con la enseñanza y la transmisión del conocimiento matemático sino con el proceso creativo de hacer matemáticas, supuesto básico para un enfoque constructivista de la enseñanza. Así mismo, pretendemos a través de un examen a conciencia del proceso histórico mostrar cómo los temas y métodos de la matemática escolar (en el caso en cuestión el álgebra) evolucionaron para convertirse en la matemática formal que enseñamos como álgebra abstracta. Tercero, y muy importante desde el punto de vista didáctico, queremos mostrar cómo el conocimiento imperfecto o la creación de un modelo adecuado sólo en parte, conlleva enfoques que distan del enfoque ortodoxo de un concepto pero que de todas maneras permiten hacer matemáticas. Esto es supremamente importante porque es la situación del alumno; el maestro con alguna frecuencia busca que el alumno llegue a una construcción predeterminada y no sabe valorar sus aproximaciones parciales; es decir, no intenta ver hasta qué punto éstas son correctas y tomar el tiempo para analizar en qué punto y por qué razón fallan.

En el primero de estos objetivos está, entonces, la tarea de relacionar el modelo de pensamiento matemático con las apreciaciones sobre el desarrollo histórico del álgebra. Uno de los productos de esta labor debe ser una caracterización más amplia de lo que propiamente es hacer matemáticas, para disociarla parcialmente del paradigma lógico-deductivo.

En lo que sigue intentaré tratar cuatro aspectos que considero son representativos del pensamiento matemático y el porqué de esta caracterización: (1) el desarrollo de algoritmos y su relación con la construcción de significado y la generalización; (2) el 'reducir' al caso anterior, no sólo en cuanto a la demostración de teoremas sino respecto del uso de métodos de solución de problemas; (3) el proceso de construir el primer gran marco teórico del álgebra, con toda la actividad lógico-deductiva auxiliar que lo acompaña; (4) la superación de este primer marco que se caracteriza por ser geométrico y la conquista del modelo aritmético. Es evidente que en un artículo hay campo tan sólo para un bosquejo de las ideas que se están generando.

Los algoritmos

Tomemos como ejemplo de nuestro primer objetivo, la aritmética y álgebra de los egipcios. Las restricciones del sistema numérico egipcio, carente de nociones de valor posicional, no fueron las suficientes para impedir que se hiciera matemáticas y en alguna medida pueden ilustrar (si bien no modelar) la situación del alumno. El sistema numérico egipcio tenía importantes semejanzas con el romano: era un sistema decimal con un símbolo especial para la unidad y cada potencia de 10. Como se ha dicho, no tenía ninguna noción de valor posicional. Así las cosas, la adición y sustracción egipcias se reducían a reunión de símbolos y, si fuera el caso, 'trueque' de un símbolo de valor mayor por 10 del valor inmediatamente anterior, una decena por 10 unidades, una centena por 10 decenas, y así sucesivamente. La sustracción era precisamente esto; la supresión de símbolos con el 'trueque' en caso de que fuera necesario. La multiplicación se efectuaba por medio de duplicaciones sucesivas y la división por medio de la multiplicación del divisor hasta obtener el dividendo. Ahora bien, estos dos modelos de la división y la multiplicación que se convierten en algoritmos interesantes, especialmente en cuanto evitan el aprender tablas de multiplicación e ilustran con toda claridad el carácter de inversos que tienen estas dos operaciones (en que tanto insisten algunos libros y profesores), sin embargo no conceptualizan la división como multiplicación por el recíproco. Tal situación conlleva serias limitaciones cuando se aborda el tema de las fracciones o cuando se genera un algoritmo para la solución de ecuaciones lineales en una variable.

Solución de una ecuación lineal en una variable - el algoritmo de posición falsa de los egipcios.

Aunque el tema de los algoritmos debe ser el más trajinado por el alumno, sufriendo por los algoritmos de operaciones desde temprana edad, y aunque el tema suele tomarse como equivalente de la mecanización y la muerte del pensamiento matemático, los algoritmos que pudieron producir ciertas sociedades antiguas (y modernas) reflejan las bondades y limitaciones de las herramientas a su alcance y el significado parcial que puedan haber construido para los incipientes conceptos matemáticos que estaban manejando.

Para los egipcios las fracciones, por algún motivo desconocido pero evidentemente relacionado con las limitaciones del concepto de la operación división que notamos arriba, se debían limitar a aquellas de numerador 1, con la excepción de la fracción $\frac{2}{3}$. Por ejemplo, en lugar de escribir $\frac{3}{17}$ un egipcio debió descomponerlo en una suma de fracciones con numerador 1 y denominadores distintos. El primer paso, escribir $\frac{3}{17} = \frac{1}{17} + \frac{2}{17}$ es obvio. Luego, se debía descomponer $\frac{2}{17}$ de la manera exigida. En uno de los papiros egipcios existentes, el papiro de Rhind, se incluye una gran tabla de descomposiciones de las fracciones con numerador 2 y denominador impar desde $\frac{2}{5}$ hasta $\frac{2}{101}$.

Ahora bien, en un sistema numérico como éste, resulta bien difícil imaginar métodos adecuados para resolver ecuaciones y, de hecho, las ecuaciones más sencillas causan algunas dificultades grandes. Por ejemplo, del Papiro Rhind tenemos este problema: "Una cantidad y su $\frac{1}{7}$ sumadas se hacen 19. ¿Cuál es la cantidad?" Obviamente en nuestra notación esto es

$$x + \frac{x}{7} = 19 \quad \text{o sea} \quad \frac{8x}{7} = 19.$$

Pero los egipcios no permitían la fracción $\frac{8}{7}$. Dice el papiro así: "Cuantas veces se debe multiplicar a 8 para obtener 19, tantas veces se debe multiplicar a 7 para obtener el número correcto." Esto describe el método de posición falsa que se puede explicar como sigue. Se da un valor aproximado, apropiadamente escogido, a la cantidad desconocida. La respuesta correcta tiene la misma relación con la supuesta que el número dado tiene con el número que se calcula.

En el ejemplo, $x + \frac{x}{7} = 19$, si se supone que $x = 7$ se calcula $x + \frac{x}{7} = 8$. Se debe multiplicar 8 por $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ para obtener 19; el valor correcto de x se obtiene, por lo tanto, multiplicando 7 por $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ que da por resultado

$$x = \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) 7 = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

Si analizamos nuestro método contemporáneo: Escribiríamos

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

luego sumaríamos $x + \frac{x}{7}$. (Como hemos comentado, este resultado $\frac{8x}{7}$ violaría el tratamiento egipcio de las fracciones.) Luego multiplicaríamos $19 \times \frac{7}{8}$ para obtener nuestra respuesta. Pero, aunque este último paso no involucrara una fracción con numerador diferente de 1, la división como fue practicada por los egipcios no permitiría este planteamiento. Pues, nuevamente, aunque conciben la división como la inversa de la multiplicación, no la conciben como multiplicación por el recíproco y no a disposición el número que se debe multiplicar hasta conseguir el dividendo. Para el futuro profesor éste no es un cuento curioso del pasado, equivalente a recontar las primeras cosmologías griegas: 'Todo es agua' o 'Todo es devenir', esperando de inmediato la risa y el desprecio de quienes lo oigan desde el privilegiado punto de observación del siglo XX. El hecho es que en su salón de clase todos los días pequeños seres humanos construyen modelos de significado para las operaciones aritméticas que enfrentan y generan métodos para resolver problemas acordes con el entendimiento que han logrado. Todos sabemos que el primer modelo de la multiplicación que se genera es la adición repetida y que hay que superar este modelo en la misma escuela primaria cuando se llegue a sistemas numéricos distintos de los naturales (fraccionarios), momento en que se pierden para siempre algunos niños para la matemática. De igual manera, el maestro no comprende que el modelo de la división como inversa de la multiplicación es en sí bastante sofisticado y se encuentra en conflicto con el modelo de repartición (división con residuo) que es tal vez la más básica para el niño. De todas maneras, los egipcios nos enseñan que, aunque se logre pasar de esta noción intuitiva de la división como repartición a la de la división como inversa de la multiplicación, esto no es garantía de haber construido un significado de la división que sea adecuado para estudiar las fracciones o el álgebra. El camino es más tortuoso.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales en China.

Aparece en un escrito del período Han en China (206 a.C. - 221 d.C.) la colección titulada *Nueve capítulos sobre el arte de la matemática,* de sorprendente poder matemático, cuyo octavo capítulo está dedicado a exponer un método de solución de un sistema de ecuaciones lineales. El algoritmo es esencialmente la reducción de la matriz del sistema a forma triangular. Es otro ejemplo histórico que se puede explotar para analizar el desarrollo del pensamiento matemático. Por ejemplo, el algoritmo es expuesto en el contexto de un ejemplo numérico particular, aunque es claro que el método es totalmente generalizable (ninguno de sus pasos depende de propiedades particulares a los números involucrados). Aunque vivamos a diario con estudiantes que resisten el uso de cantidades literales arbitrarias para lograr generalidad en sus razonamientos, no entendemos cuan difícil y tardío fue este paso para la humanidad. Los chinos, los árabes y los occidentales hasta Vieta mostraban generalidad algebraica de esta misma manera, a saber, mediante el uso de casos numéricos generalizables. Fue Vieta quien dio el genial paso hacia la generalidad por medio de representaciones literales de los números involucrados. (Esto a su vez explica por qué las demostraciones de los hechos algebraicos, antes de Vieta, eran demostraciones geométricas, pues sin la generalidad de las constantes literales no había en el álgebra más que sendos ejemplos particulares.) Así el profesor debe juzgar a su alumno de otra manera, averiguar si el ejemplo numérico que presenta es generalizable y si el alumno es conciente de que lo es, e inducirlo a la construcción sólida de un sistema algebraico más completo de acuerdo con el nivel de entendimiento que ha podido lograr.

La matemática es esencialmente reduccionista-reducción al caso anterior

En un método babilónico para la solución de ecuaciones cuadráticas se observa el empleo a fondo del ingenio para reducir nuevas ecuaciones al caso (a la forma) ya resuelto. Aquí la manipulación de expresiones no es un ejercicio vacío y repetitivo, sino la única forma de lograr una solución al problema.

Las características de la aritmética babilónica permitieron un tratamiento de ecuaciones completamente distinto de los métodos egipcios. De hecho, la aritmética babilónica excluía la necesidad de métodos 'evasivos' como la posición falsa y las ecuaciones de primer grado no representaban ningún reto importante para los matemáticos de Babilonia. Su sistema de numeración con valor posicional en base sesenta hacía su aritmética muy similar a la nuestra. La multiplicación tenía el agravante adicional de que había que aprenderse las 'tablas' hasta 59×59, pero esto se obviaba elaborando tablas 'soplete' con los productos de un número determinado por $2, 3, \ldots, 9, 10, 20, 30, 40$ y50 y usando apropiadamente la propiedad distributiva para así calcular los demás productos de la tabla. La división se efectuaba por medio de la multiplicación por el recíproco del divisor y también conllevó la elaboración de extensas tablas de recíprocos expresados como fracciones sexagesimales. Es claro que un problema como el del papiro Rhind que discutimos arriba no representa dificultad alguna para quienes manejaba este ágil y versátil sistema numérico. Más bien, sería de interés para los babilonios la solución de ecuaciones cuadráticas, para las cuales demostraron un ingenio muy respetable. Por ejemplo, muchos de sus problemas se enuncian en términos de: "Conocidos la suma y el producto de dos números" encontrar éstos. Ahora bien, es evidente que esto corresponde a ecuaciones de segundo grado teniendo en cuenta las relaciones que la matemática después de Vieta ha descubierto entre coeficientes y raíces de estas ecuaciones.

Los problemas considerados por los babilonios vienen casi siempre enunciados en términos geométricos considerando el semiperímetro $x + y$ y el área xy de un rectángulo. Es bastante claro, por los problemas que propusieron y por su discusión de las soluciones, que desarrollaron el método aludido en una tablilla de arcilla que expondremos a continuación: hallar dos números cuya suma es $\frac{13}{2}$ y cuyo producto es $\frac{15}{2}$. [En lo que sigue usaremos las ideas babilónicas puestas en notación contemporánea.] Si $x + y = \frac{13}{2}$, $xy = \frac{15}{2}$, se pone

$$x = \frac{\frac{13}{2}}{2} + z, \quad y = \frac{\frac{13}{2}}{2} - z,$$

dos números cuya suma es evidentemente $\frac{13}{2}$. Luego, si se sustituyen estos valores en la ecuación $xy = \frac{15}{2}$, se obtiene

$$\left(\frac{\frac{13}{2}}{2} + z\right)\left(\frac{\frac{13}{2}}{2} - z\right) = \frac{15}{2},$$

de donde

$$\left(\frac{\frac{13}{2}}{2}\right)^2 - z^2 = \frac{15}{2}.$$

De allí se sigue que

$$z^2 = \left(\frac{\frac{13}{2}}{2}\right)^2 - \frac{15}{2}$$

o sea

$$z = \sqrt{\left(\frac{\frac{13}{2}}{2}\right)^2 - \frac{15}{2}}.$$

(La raíz negativa nunca fue considerada.) Es evidente de aquí que

$$x = \frac{\frac{13}{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{13}{2}}{2}\right)^2 - \frac{15}{2}}, \quad y = \frac{\frac{13}{2}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{13}{2}}{2}\right)^2 - \frac{15}{2}}.$$

Pero además de resultados como éste los babilonios redujeron problemas de corte más intrincado a las formas anteriores por medio de buenos conocimientos algebraicos. Por ejemplo, una tableta contiene el problema equivalente a resolver las ecuaciones

$$x + y = \frac{35}{6}, \quad x + y + xy = 14.$$

Es claro que si se resta la primera ecuación de la segunda, se obtienen dos ecuaciones que dan la suma y el producto de dos números y se puede aplicar el método conocido.

En otra tableta se encuentra el problema

$$xy = 600, \quad (x + y)^2 + 120(x - y) = 3700.$$

Aparentemente se conocía la identidad algebraica $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ lo cual permite reducir el problema anterior a la ecuación cuadrática en $(x - y)$

$$(x - y)^2 + 120(x - y) = 1300.$$

Una aplicación de su fórmula produce

$$x - y = 10, \quad xy = 600$$

y se está en las condiciones del problema anterior.

Nótese que además de revelar ingenio, el planteamiento de reducir un problema a una forma conocida muestra importantes características del pensamiento matemático, pues es la estrategia en la solución de problemas (estar en el caso anterior) equivalente a la estrategia de construir una cadena de razonamiento demostrativo en la cual cada nuevo resultado se basa en el resultado (o resultados) anterior(es). En consecuencia podemos decir que no cabe duda de que los babilonios tenían altamente desarrollado el pensamiento matemático a pesar de no haber construido sistemas abiertamente abstractos y deductivos.

El tema del sistema demostrativo - el desarrollo de una base teórica y una fundamentación

Es bien conocido el tratamiento euclidiano de la solución de ecuaciones algebraicas, tratamiento denominado álgebra geométrica. Una insuficiente base teórica no permitía un tratamiento aritmético adecuado de los números irracionales (magnitudes inconmensurables), mientras que prosperaba la posibilidad de representar cualquier magnitud (número) por medio de un segmento. Lo anterior llevó a los griegos, quienes también construían las primeras filosofías de las matemáticas y se preocupaban por cuestiones como la del modo de existir de los entes matemáticos (abstractos), la de fundamentar su sistema numérico y su resolución de ecuaciones en la geometría y proveer métodos geométricos de solución de ecuaciones cuadráticas (cuadraturas), logrando la solución general. Es de gran importancia explorar esta etapa con futuros docentes, pues he aquí una solución completa al problema cuadrático, dada en un contexto lógico-deductivo que garantiza la corrección y generalidad de los resultados y complementada con una filosofía de la matemática que rinde cuentas del modo de existir de los entes matemáticos. El sistema idea formas de obviar las deficiencias encontradas en la comprensión de los números irracionales y del continuo (infinito).

Hay, empero, algunos indicios tanto anteriores como posteriores a Euclides que apuntan hacia problemas relacionados con este sistema que no habían sido conquistados por completo. Por ejemplo, comenzando por Menecmo, se logró la solución de ecuaciones cúbicas utilizando las secciones cónicas, solución geométrica que de todas maneras no equivale a solución por regla y compás (ya que sólo se puede construir una serie de puntos sobre una cónica con regla y compás, pero no la curva completa). Esta construcción fue efectuada en el transcurso de la consideración del problema de la duplicación del cubo, ilustrando entre otras cosas y con toda claridad, cómo se genera nuevo conocimiento en la exploración de problemas que resisten solución dentro de la teoría conocida. Esta línea de pensamiento seguiría su curso en la obra de Arquímedes quien seguramente reconoció las limitaciones del sistema euclidiano para tratar otros problemas famosos de construcción, en particular la cuadratura del círculo. En los elegantes escritos arquimedianos topamos con una nueva etapa de exploración donde algunos problemas se resuelven en abierta ruptura con el soporte filosófico de la teoría euclidiana (la sumación exitosa de una serie infinita en la cuadratura de un segmento parabólico) y otros intentan un acercamiento al entendimiento de los números irracionales por medios aproximativos. Hay algo aquí para explorar. Las evidentes dificultades con la cuadratura del círculo son casi seguramente el motivo del monumental esfuerzo que hace Arquímedes por aproximar el número que nosotros llamamos π. ¿Podría ser que Arquímedes intuyera que este inconmensurable no cabía en la clasificación euclidiana? Ya que teóricamente el proceso de subdivisiones sucesivas puede mantenerse finito combinando un procedimiento de finitas subdivisiones con un doble *reductio ad absurdum*, ¿podría ser que Arquímedes busca en su aproximación de π por medio de sucesivas subdivisiones de la circunferencia la posibilidad de llegar a un doble *reductio* que proporcionara un dominio perfecto sobre el? Es sólo especulación, pero es claro que estamos ante una nueva etapa de exploración y búsqueda de significado.

[Como es sabido Arquímedes da forma a un método general que se inspira en la noción de equilibrio y el correspondiente concepto de centro de gravedad, pero que para la demostración final recurre al método de exhaución, una ilustración del proceder del pensamiento matemático en un terreno no estrictamente algebraico y que proveerá materia para un futuro estudio.]

Por otra parte, en la parte alta de la antigüedad Diofanto comienza un tratamiento que llamaríamos netamente algebraico de la solución de ecuaciones. Aunque se superan en él varias de la restricciones impuestas por el marco teórico euclidiano (por ejemplo, con respecto del grado de las ecuaciones), la obra de Diofanto evita las dificultades inherentes a los irracionales, restringiendo las soluciones buscadas a los racionales. [Otra lección interesante aquí es que hoy en día nuestro entendimiento poderoso del sistema de los números reales y las propiedades igualmente poderosas de éste, permiten un tratamiento algorítmico más sencillo de las soluciones reales de una ecuación de lo que se puede lograr cuando se exige, en la tradición de Diofanto, resolver una ecuación en enteros.]

Consecuencias de la solución griega al problema de cuadraturas

Queremos aquí pasar a una de las consecuencias más notorias de esta discusión: ¿qué problemas tuvieron que enfrentar quienes desearon superar las limitaciones sistemáticas de los griegos?

Entre los árabes encontramos primero a al-Khwarizmi. Al examinar el contenido del tratado que escribió al-Khwarizmi titulado *El compendio de cálculos por al-jabr y al-muqabala*, encontramos un libro de álgebra, solución de ecuaciones por medio de manipulación de los términos que las componen sin la intervención de un pesado aparato geométrico como era corriente entre los griegos. Así las cosas, en el tratado de álgebra de al-Khwarizmi reconocemos el trabajo algebraico similar en planteamiento a nuestro trabajo contemporáneo.

Las diferencias que podemos observar entre el trabajo euclidiano y el trabajo de al-Khwarizmi no son fortuitas, pues en la introducción a su tratado de álgebra él afirma que el Imam al-Mamun "me ha animado a componer una obra corta sobre el calcular por compleción y reducción, restringiéndolo a lo que es más fácil y útil en aritmética, tal como lo que los hombres requieren en casos de herencias, legados, partición, procesos legales y comercio, y en todos sus intercambios, o en la medición de tierras, el trazado de canales, cálculos geométricos y otros objetos de varias clases y tipos concierna...."

Sin embargo, dado que la generalidad algebraica de que disponía radicaba únicamente en el uso de ecuaciones numéricas estándar, para demostrar sus resultados al-Khwarizmi recurrió a demostraciones geométricas, indicando la ausencia de una fundamentación teórica para sus transformaciones algebraicas. De hecho, sucesores suyos, regresarían a los métodos geométricos de los griegos. En particular queremos discutir el trabajo de Tabit ben-Qurra.

Al tratar el caso de la solución de la ecuación "riqueza y raíces igual números" que nosotros representaríamos por la expresión $x^2 + mx = n$, Tabit ben Qurra se da cuenta que no se puede igualar una área o un segmento de recta con un número. Así las cosas, introduce una unidad de medida (e) para traducir lo anterior en la ecuación 'geométrica' $x^2 + mex = ne^2$. Su descripción del proceso de solución cita la proposición II.6 de Euclides y no la reproduciremos aquí.

En ella tenemos una interpretación del problema que procura homogenizar los términos involucrados en la ecuación, representándolos todos como áreas. En seguida se utiliza un resultado conocido desde Euclides para llegar a la solución geométrica. Finalmente Tabit ben Qurra mostrará que esto coincide con la solución algebraica a la manera de al-Khwarizmi. Comenta:

"Este procedimiento está de acuerdo con el procedimiento de los algebristas en su solución del problema. Cuando toman la mitad del número de raíces, esto es lo mismo que cuando nosotros tomamos la mitad de la línea bh, y cuando lo multiplican por sí mismo, esto es lo mismo que cuando nosotros tomamos el cuadrado de la línea bisectada bh. Cuando suman el resultado el número [dado], esto es lo que que hacemos cuando sumamos el producto de ha y ab, para obtener el cuadrado de la suma de ab y la línea bisectada. Cuando ellos toman la raíz, esto es lo mismo que cuando nosotros decimos: la suma de ab y la línea bisectada es conocida tan pronto como su cuadrado es conocido."

En su trabajo, Tabit ben Qurra recurre a la fundamentación geométrica del álgebra, indicando que la homogeneidad de los términos es indispensable, no para la solución en sí, sino para la demostración de su corrección. No en vano la comunidad matemática lucha con la noción de homogeneidad por siglos, tanto en el álgebra misma como en el cálculo en tanto éste depende de manipulación algebraica, pero busca también su fundamentación en la geometría.

Leonardo de Pisa.

Es uno de los cuentos más conocidos de la historia de la matemática cómo Leonardo de Pisa hizo uno de los decubrimientos más claves para el álgebra y las nociones contemporáneas de la matemática, en el marco de una competencia de solución de problemas.

El problema a resolver era una ecuación cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

Leonardo factorizó 10 para obtener: $10(x + \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2) = 20$, o sea, $x + \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2 = 2$. Esta última ecuación implica $x < 2$. Pero poniendo $x = 1$, se obtiene

$1+2+10=13<20$, de donde, $x>1$. Estas consideraciones permitieron a Leonardo observar que la ecuación poseía una raíz entre 1 y 2, una observación del todo moderna en la que subyacen nociones de función, continuidad y el teorema del valor medio. Es algo especulativo, pero se puede pensar que Leonardo haya tenido su inspiración en el método de doble posición falsa, ampliamente difundido entre los árabes, que consta de adivinar dos valores para la variable en una ecuación lineal y luego 'interpolar' para obtener el valor correcto. Aquí se prueban los dos valores para la variable x y aunque no se puede calcular la solución directamente de allí, Leonardo hace buen uso de los resultados que arroja el proceso.

Enseguida demuestra que la raíz no puede ser racional, ya que si se supone $x=\frac{a}{b}$ con $(a,b)=1$, se obtiene

$$\frac{a}{b}+\frac{a^3}{10b^3}+\frac{a^2}{5b^2}=2,$$

de donde, $a^3=20b^3-10b^2a-2a^2b$, que implica $(a,b)\neq 1$.

Por otra parte, x no puede ser la raíz de un entero que no es cuadrado perfecto, por que de ser así, digamos $x=\sqrt{a}$, obtendríamos $x=\frac{20-2x^2}{10+x^2}$ lo que conduce a

$$\sqrt{a}=\frac{20-2a}{10+a},$$

otra contradicción por ser el miembro de la derecha un racional.

Ahora, Leonardo concluye de este análisis que la raíz en cuestión no es construible con regla y compás, basándose en la clasificación de los números construibles hecha por Euclides en el Libro X de los *Elementos*. Desde hace años al hablar sobre este incidente histórico, me he contentado con decir que se comienza a desmoronar la fundamentación griega de los números, pues si bien es correcto que todo número real puede asociarse con la magnitud de algún segmento, no es cierto que todos estos segmentos son construibles con regla y compás, lo cual cuestiona su fundamentación en la geometría hecha a la manera de Euclides. Igualmente, se muestra que estos números surgen como solución de ecuaciones algebraicas, lo cual sugiere que el álgebra es de alguna forma más general que la geometría.

Pero ahora quisiera decir que lo que luego hace Leonardo es igualmente diciente. Por un método que no revela, Leonardo aproxima la raíz, dando por resultado el número expresado como fracción sexagesimal $x=1^{\circ}22'7''42'''33^{iv}4^{v}40^{vi}$.

Veo en ello un intento por comprender mejor el número que así se presenta. Esto puede ser un primer intento por clasificar los números irracionales. Leonardo sabe que el número es irracional y sabe que no es raíz de un entero. Al desarrollar su expresión sexagesimal, puede estar buscando una caracterización 'positiva' del número.

Nuevas direcciones en la construcción de significado

Como es bien sabido, Leonardo es el artífice de la reintroducción de la matemática griega, preservada y extendida por los árabes, a Europa. También introduce el sistema hindu-arábigo de numeracón decimal posicional y con él, algoritmos para efectuar las operaciones básicas. Son tantos y tan profundos los cambios implicados por estas innovaciones, que pasarían casi tres siglos antes de que Luca Pacioli publicara (en 1494) un compendio de la matemática entonces conocida donde se encuentran integrados los nuevos conocimientos numéricos con los conocimientos geométricos y algebraicos, y donde puede asimilarse todo ello. En este momento, es posible volver a tomar en cuenta el importante descubrimiento de Leonardo de Pisa que acabamos de exponer. Persiste la pregunta por la fundamentación de los números y su relación con las ecuaciones polinómicas. Una de las respuestas que dieron los matemáticos italianos del siglo XVI fue la investigación a fondo de la solución de ecuaciones polinómicas de grados tres y cuatro; otra respuesta que tampoco equivale a contestar la pregunta, pero sí a explorarla a fondo, se encuentra en la posibilidad de aproximar estos números con el grado de exactitud deseado, método descubierto y transformado en algoritmo por Rafael Bombelli.

Antes de mirar la obra de Bombelli, recordemos que en el siglo XVI transcurrió en Italia un desarrollo extraordinario del álgebra en el cual se llegó a la solución de las ecuaciones polinómicas generales de grados tres y cuatro, solución en la cual intervinieron Scippio del Ferro, Nicolás Fontana (Tartaglia), Gerolamo Cardano y Ludovico Ferrari. Por ser bien conocidas, no trataremos estas soluciones aquí, pero sí nos compete comentar algunos de los rasgos del pensamiento matemático que manifiestan ellas. Contienen reducción (o transformación) de ecuaciones a una forma cuya solución es conocida, reminiscente de las estrategias babilónicas. Constituyen respecto de un grado determinado, tanto en el caso cúbico como en el cuártico, soluciones generales, y de hecho los interesados se toman la tarea de demostrar que poseen métodos que funcionan para todos los posibles casos del respectivo grado. No obstante, frente a una teoría general que permite solucionar ecuaciones de cualquier grado, se puede decir que sólo obtuvieron resultados parciales.

Es de notar que Cardano considera algunos de los números que resultan de la aplicación de sus fórmulas y los llama falsos y ficticios, en oposición a las soluciones que nosotros denominaríamos reales positivas. En el *Ars magna* Cardano considera tanto las raíces positivas como negativas, aunque llama a las negativas ficticias. Luego pasa a la consideración de raíces imaginarias, observando que las raíces complejas de una ecuación con coeficientes reales vienen en pares, investiga algunas de las propiedades de estos números (por ejemplo, multiplica $5+\sqrt{-15}$ y $5-\sqrt{-15}$ obteniendo $25-(-15)=40$), pero los descarta diciendo: "Así progresa la sutileza aritmética cuyos fines son tanto refinados como inútiles." y en otra parte dice que los problemas que llevan a raíces que no son negativas ni positivas son problemas falsos.

No cabe duda de que este trabajo encaja en nuestra hipótesis de que se adelantaba entonces un período histórico de exploración en búsqueda de una nueva teoría general de ecuaciones y de los números que aparecen como soluciones de éstas y que reemplazaría la teoría geométrica griega cuyas deficiencias fueron anotadas por Leonardo.

Rafael Bombelli

Ahora bien, en sus escritos sobre el álgebra de 1572 y 1579, Bombelli desarrolla una forma de aproximar las raíces que aparecen en las soluciones arrojadas por las fórmulas de Tartaglia, Cardano y Ferrari. Hoy día el método de Bombelli recibe el nombre de fracciones continuas. Veamos qué nos dice.

Comienza Bombelli diciendo que va a tratar un método para formar fracciones en la extraccón de raíces cuadradas. Considera que no es el único posible, pero lo considera superior a los otros métodos conocidos. Ilustra su método exponiendo la extracción de la raíz cuadrada de 13. El primer paso en el método es encontrar el cuadrado más próximo a 13, que es 9 y cuya raíz es 3. Luego, Bombelli dice que la raíz aproximada de 13 será "3 y un tanto". [Pensemos $3+x$.] Su cuadrado es 9 más 6 tantos más una potencia $[9+6x+x^2=13]$ y si restamos 9 de ambos miembros de esta ecuación obtenemos que la potencia más 6 tantos es igual a 4 $[6x+x^2=4]$. Ahora, si no se toma en cuenta la potencia, podemos poner 6 tantos igual a 4 $[6x=4]$, de donde, un tanto es $\frac{2}{3}$. Se tiene, por lo tanto, que el valor aproximado de la raíz es $3\frac{2}{3}$. Pero ahora se encontrará una segunda aproximación teniendo en cuenta lo que se ignoró en la primera, a saber, teníamos que 6 tantos más una potencia son iguales a 4 $[6x+x^2=4]$. Si el tanto vale $\frac{2}{3}$, entonces se sigue que tendremos 6 y $\frac{2}{3}$ tantos que son iguales a 4 $[6x+\frac{2}{3}x=4]$, de donde, el tanto es igual a $\frac{3}{5}$.

Una vez más Bombelli regresa a la expresión $6x+x^2=4$, usando la aproximación anterior como valor de x en la expresión x^2, para obtener $6x+\frac{3}{5}x=4$ o $x=\frac{20}{33}$. Así obtiene una nueva aproximación para $\sqrt{13}$ cual es $3\frac{20}{33}$. Se puede proceder de la misma manera obteniendo cada vez mejores aproximaciones de $\sqrt{13}$, y Bombelli comenta explícitamente esta posibilidad, o sea, que la sucesión de aproximaciones es infinita.

Al examinar la idea de Bombelli y pulir su notación, encontramos que tenemos una recurrencia que puede expresarse como sigue:

$$x_{n+1}=\frac{4}{6+x_n}.$$

Es evidente, aunque Bombelli no llega a ninguna expresión similar, que tenemos una fracción continua que se genera así

$$x_2=\frac{4}{x_1},\quad x_3=\frac{4}{x_2}=\frac{4}{6+\frac{4}{6+x_1}},\quad x_4=\frac{4}{x_3}=\frac{4}{6+\frac{4}{6+\frac{4}{6+x_1}}},\ldots$$

[Parece que el nombre "fracción continua" y una notación que aproxima la nuestra aparecen por primera vez en una obra de Cataldi en 1613.] De aquí podemos ver que Bombelli ha generado un modo de explorar los números que aparecen como solución de ecuaciones polinómicas que es muy fructífero y fue utilizado constantemente hasta bien entrado el siglo XIX. Pues las fracciones continuas que terminan corresponden a números racionales, mientras que las fracciones continuas periódicas corresponden a irracionales cuadráticos y todas las demás fracciones continuas corresponden a otros irracionales, es decir, a precisamente aquellos que habían llamado la atención de Leonardo de Pisa. Aquí tenemos pues un método general que llevará a una nueva teoría acerca de unos nuevos objetos matemáticos, la exploración de sus propiedades, la generalización y la demostración de ellas. Igualmente, la nueva teoría no sólo contiene herramientas aritméticas para distinguir entre números racionales e irracionales sino también entre diferentes clases de irracionales; introduce nociones concernientes a sucesiones y límites de sucesiones; y se compromete con el infinito por medio de sucesiones infinitas. **Se avanza en la comprensión de los números no por medio de una fundamentación general nueva, sino por una exploración de sus propiedades y generalizaciones parciales.**

LA GENERACIÓN DE NUEVOS MÉTODOS Y LA BÚSQUEDA DE RESULTADOS MÁS GENERALES

Francois Viète

Se debe a Francois Viète (1540-1603) nacido en Fontenay-le-Comte, Francia y educado en Poitiers (y conocido en castellano con el nombre de Vieta) la institucionalización de un simbolismo algebraico que, aunque deficiente en cuanto a notación de operaciones y exponentes, permitió el tratamiento de ecuaciones (y otras expresiones) algebraicas generales. La idea clave de Vieta es la de usar ciertas letras para representar incógnitas o variables y otras letras para representar coeficientes o constantes. Los historiadores reportan distintas convenciones, unos diciendo que para Vieta las consonantes representaban cantidades conocidas y las vocales incógnitas, otros que las letras del principio del alfabeto representaban variables y las del final constantes. Sin embargo, el punto importante es precisamente la posibilidad de representar expresiones generales, hablar de la ecuación general de segundo grado o la ecuación general de tercer grado y mostrar con ello propiedades compartidas por todas, mientras que con la notación anterior a Vieta sólo se podía mostrar un caso numérico particular que ilustraba, sin generalidad total, dichas propiedades (y con alguna frecuencia mantenía ocultas varias propiedades importantes).

Ahora bien, todo matemático o profesor de matemáticas sabe que la buena notación es clave para hacer investigaciones matemáticas, dominar nuevas áreas del conocimiento matemático o resolver problemas. Los frutos de esta innovación de Vieta no se hicieron esperar. En particular, el mismo Vieta observó las relaciones que existen entre las raíces y los coeficientes de una ecuación polinómica. En su escrito *De equationen emendatione* , Vieta dice (traducido a nuestra notación para exponentes y operaciones): "Si $A^3+(-B-D-G)A^2+(BD+BG+DG)A = BDG$, entonces A es igual a cualquiera de las cantidades B, D o G."

Que esta realización era fruto de la notación es claro. Si bien es cierto que la dependencia sobre el método de completar el cuadrado usado por al-Khwarizmi puede dar alguna idea de la relación entre raíces y coeficientes (¿por qué?), se pone rápidamente de manifiesto que una relación tan directa está escondida tanto por la variedad en los coeficientes mismos como por los métodos geométricos (intersección de cónicas) usadas en su solución por matemáticos como Omar Khayyam. Por ejemplo, ¿qué se puede decir acerca de las interrelaciones entre estos 'casos' de la cúbica: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ y $x^3 - 7x + 6$? Parecen esencialmente distintos. Y en cuanto a su solución por intersección de cúbicas, sabemos que Omar Khayyam tuvo que emplear distintas secciones cónicas de acuerdo a los términos que intervienen en la ecuación. Así su tratamiento, en lugar de mostrar relaciones generales entre raíces y coeficientes de la cúbica, parece implicar que no existe tal generalidad. Nuevamente, los grandes algebristas italianos del siglo XVI, aunque cuentan entre sus conquistas métodos estrictamente algebraicos de solución de las cúbicas, también se ven obligados a dividir éstos en casos, empleando métodos ligeramente distintos para cada caso y presentando sus resultados por intermedio de ejemplos numéricos generalizables. Quizás sí vale la pena comentar que la *reducción* de un caso a otro, efectuada por ellos por medio de una manipulación algebraica, debió indicar que las diferencias observadas no eran tan esenciales como aparecen en el tratamiento geométrico.

Ahora bien, los resultados directamente atribuibles a Vieta no son tan generales como los que hoy día manejamos, ya que sólo reconocía como válidas las soluciones reales positivas de la ecuación. Así las cosas, Vieta muestra que los coeficientes de una ecuación polinómica cuyas raíces son reales positivas son funciones de esas raíces. [Anotamos aquí lo que parece ser una anomalía histórica. La primera publicación que habla de la solución de ecuaciones por factorización (uno de los métodos más comunmente empleados al nivel secundario) apareció en la obra de Harriot *Artis Analyticae Praxis* (1631). Dada su fácil y bonita interpretación geométrica, nos podríamos preguntar cómo podría haber sucedido que no fuera descubierto y utilizado con anterioridad. Pero es también claro que el método de factorización depende de las relaciones observadas entre raíces y coeficientes, y fueron precisamente los medios deficientes para expresar generalidad los que bloquearon su descubrimiento.]

Cuando posteriormente a la época de Vieta se llegue a la aceptación de las raíces negativas y complejas, será posible concluir con toda generalidad que los coeficientes de una ecuación polinómica son funciones simétricas de las raíces. Este hecho, combinado con otros desarrollos en el concepto de función principalmente en relación al cálculo, permitiría a los matemáticos lograr una nueva perspectiva sobre las ecuaciones polinómicas. Con ello, aparte de las ventajas mencionadas, la observación central de Vieta se convertiría más adelante precisamente en la avenida de acceso a las propiedades esenciales de las ecuaciones polinomiales. En la obra de Vandermonde, Lagrange, Cauchy y finalmente Galois, es la permutación o sustitución de las raíces y la invarianza de las funciones simétricas de las raíces la clave para una teoría general de solución de ecuaciones por fórmula algebraica y la materia prima para los primeros estudios de grupos.

Pero, hay una importante observación que es necesario hacer aquí. Si bien Vieta impulsa el álgebra hacia nuevos niveles de generalidad que anticipan su conversión en el álgebra abstracta que conocemos, la mentalidad matemática de Vieta no deja de ser clásica, pues su rechazo de raíces negativas y complejas, conjuntamente con el cuidado que ejerció para que sus ecuaciones fueran homogéneas nos muestra que Vieta siguió trabajando dentro del marco teórico de la geometría y la posibilidad de interpretar y representar, tanto las ecuaciones mismas como sus soluciones, geométricamente.

Pierre de Fermat, René Descartes y sus contemporáneos

Un importante paso en la nueva exploración del significado del álgebra y un proceso indispensable en la eventual transformación de la misma, es evidentemente la creación de la geometría analítica que produce un vuelco en la apreciación de la forma en que se relacionan la geometría y el álgebra.

Obra casi simultánea de Fermat y Descartes, por su notación más adecuada y su publicidad más agresiva, hoy día usamos el enfoque cartesiano y casi ni nos acordamos de la contribución de Fermat. Sin embargo, lo que nos interesa comentar aquí es que el método de la geometría analítica o de coordenadas deja completamente clara la misma unidad notada por Vieta, pero ahora a nivel metodológico. Descartes hace particular énfasis en el hecho de que su enfoque proporciona un método que resuelve todos los problemas formulables, mientras que los geómetras sintéticos debían buscar diferentes enfoques para diferentes problemas y a veces contentarse con la imposibilidad de solución de una cuestión dada. Descartes comenta en el *Discurso del método* que

"He dado estos (métodos) muy sencillos para mostrar que es posible construir todos los problemas de la geometría ordinaria haciendo no más de lo poco cubierto por las cuatro figuras que he explicado. Esta es una cosa que creo los matemáticos antiguos no observaron, pues de otro modo no hubieran puesto tanto esfuerzo en escribir tantos libros en los cuales la misma secuencia de las proposiciones muestra que no poseían un método seguro para hallar todo, sino que recogían aquellas proposiciones que habían encontrado por accidente."

Se pone sobre la mesa histórica, entonces, la apreciación de que el tratamiento netamente algebraico permite una generalidad metodológica en la solución de ecuaciones y otros problemas, que la geometría es incapaz de alcanzar.

Por otra parte, en este contexto regresamos por primera vez a la observación tan genial de Leonardo de Pisa, pues combinada con el desarrollo del concepto de función y la representación de las funciones por intermedio de curvas, característicos del cálculo basado en la geometría analítica de Descartes, este enfoque permite estudiar las funciones polinómicas e identificar el problema de la solución de una ecuación polinómica con el de hallar los ceros de la función. Esta relación fue intuida por Leonardo cuando concluyó que la ecuación que estaba estudiando tenía una raíz entre 1 y 2. Pero con la geometría analítica y el cálculo, se instituye un análisis de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de las funciones (incluidas las polinómicas aunque no exclusivamente referido a ellas) que enriquece su comprensión y conlleva nuevos enfoques para aproximar las raíces de las respectivas ecuaciones independientemente de poseer o no una fórmula de solución.

Por otra parte, uno de los tabúes del clásico marco teórico que fundamenta los números y el álgebra en la geometría, que es superada por la geometría analítica, es la del grado de una ecuación (aunque ésta fue parcialmente superada ya por los italianos que resolvieron las ecuaciones de cuarto grado sin preocuparse por la interpretación geométrica de un producto con cuatro factores.) Otro es evidentemente el estatus privilegiado de que gozaban la recta y el círculo (la regla y el compás). En la geometría analítica no hay curvas privilegiadas.

Es evidente, de las bien conocidas reglas de Descartes para acotar él número de raíces reales positivas o negativas de una ecuación polinómica, que para Descartes la discusión de Cardano sobre lo ficticio de los números negativos ha sido resuelto a favor de una aceptación de ellos, aunque los sigue denominando falsos. Se cuenta que Descartes reconoció la posibilidad, dada una ecuación polinómica, de transformarla en una ecuación cuyas raíces han sido aumentadas en cualquier cantidad (correspondiente a la traslación de la gráfica). Esto permite relacionar números negativos con positivos de una manera que resulta muy aprovechable y que encontraremos muy pronto en las ideas del inglés John Wallis.

En esta misma línea de pensamiento, el contemporáneo de Descartes, Albert Girard, siguiendo unas observaciones de Cardano concernientes a las ecuaciones cúbicas y cuárticas, afirma que una ecuación polinómica de grado n tiene n raíces incluyendo las absurdas (complejas) y las repetidas. Esta es tal vez la primera vez que se enuncia lo que hoy día se conoce como el teorema fundamental del álgebra. Dado el poco entendimiento que se tenía entonces de los números negativos y complejos, vemos que se trata de introducir elementos ideales en la teoría que permiten que ésta goce de una simetría, generalidad y simplicidad mayor.

Un comentario que viene al caso es que con pensadores como Vieta y Descartes se efectúa un cambio en el sistema de clasificación de ecuaciones que refleja el cambio de perspectiva que se estaba dando. Las ecuaciones ahora se clasifican según su grado, cuando con anterioridad (hasta la obra de Pacioli) eran clasificadas según el número de términos que contenían (monomios, binomios, etc.). Descartes es el primero en hablar claramente de lo que él denomina la “dimensión’ de una ecuación en su *Géométrie* de 1637. Debemos tener presente que el mismo lenguaje que usamos refleja los énfasis que estamos haciendo o la estructura que estamos empleando. En particular, debemos cuestionar cualquier residuo del lenguaje anterior que perdura en la matemática escolar y determinar si se justifica su preservación; así mismo averiguar si las mezclas de lenguaje tienen un efecto adverso sobre la comprensión y dominio del tema que nuestros alumnos logran construir. Por último, el estudio de las funciones polinómicas en sí como entes u objetos matemáticos llevará eventualmente, en el álgebra abstracta, al estudio del anillo de los polinomios. Veremos, entonces, el desenlace de estas contribuciones históricas.

John Wallis.

John Wallis fue contemporáneo de Isaac Newton y profesor de matemáticas (Savilian professor) en la Universidad de Oxford.

En su libro *La historia del cálculo y su desarrollo conceptual,* Carl Boyer nos dice que Wallis siguió a Vieta, Descartes, Fermat y Harriot en la aplicación del álgebra literal a los problemas de la geometría pero que trascendió por mucho a estos otros pensadores en que buscó liberar la aritmética completamente de la representación geométrica. Primero mostró que todos los resultados aritméticos de Euclides pueden derivarse aritméticamente y luego se distanció en su álgebra de la idea de que las ecuaciones deben ser homogéneas.

Esta posición equivale a aceptar como válidos todos los números que aparecen en la solución de ecuaciones algebraicas, ya que libera el álgebra de restricciones geométricas. Sin embargo, quizás porque quiso convencer a otros pensadores más tradicionales, nos ofrece la primera interpretación geométrica de los números negativos e imaginarios que se resume en las siguientes palabras (1673):

"Entonces, mientras que en el caso de raíces negativas, diremos que el punto B no puede encontrarse, tal como se suponía en AC hacia adelante, sino hacia atrás de A en la misma recta; debemos decir aquí en el caso de un cuadrado negativo, el punto B no puede encontrarse como se suponía en la recta AC, sino fuera de esa recta en el mismo plano."

He aquí un pensador original que también introduce métodos aritméticos para reemplazar los métodos geométricos de sus predecesores en el contexto de problemas del cálculo. Su originalidad se debe probablemente al hecho de que fuera prácticamente autodidacta en matemáticas y fuera poco su contacto con los escritos de sus predecesores durante los primeros años de su actividad matemática.

Pasaría casi un siglo hasta que encontrara aceptación general estas interpretaciones vectoriales de los negativos y complejos, aceptación que se logra en virtud de la representación sencilla y estética de Gauss y porque los números complejos ya hacían parte de la teoría matemática de la que dependía la física. (Con estos modelos se ha producido un trasfondo intuitivo que soporta la aceptación de los elementos ideales, proporcionándoles significado pleno.)

Nos encontramos brevemente con el desenlace

Nos encontraremos entonces históricamente a punto de lograr la primera demostración válida del teorema fundamental del álgebra debida a Gauss, demostración que emplea a fondo nociones del análisis de variable compleja. Igualmente, como se mencionó con anterioridad, la notación algebraica general ha permitido vislumbrar las relaciones y propiedades generales de las fórmulas y métodos de solución de las ecuaciones cúbicas y cuárticas, así como generalizar acerca de los coeficientes de un polinomio de cualquier grado en cuanto funciones simétricas de sus raíces para estudiar casos de grado superior, especialmente la quíntica.

Estas dos direcciones de desarrollo, el uno aritmético y analítico, y el otro algebraico contribuyen a un lento acumular de significado del cual brotará la segunda gran generalización teórica del álgebra: la teoría de Galois. La belleza de esta teoría yace en reunir, por medio del sorprendente isomorfismo entre los campos de extensión y los grupos de permutaciones de las raíces, estas dos líneas de exploración de significado produciendo una de las más bellas y generales síntesis de la historia del pensamiento matemático.

Bibliografía

Arcavi, Abraham y Maxim Bruckheimer, *Reading Bombelli'a x-purgated Algebra*, The College Mathematics Journal **22**, No. 3, (Mayo, 1991), 212-219.

Boyer, Carl. B, *The History of the Calculus and its Conceptual Development.*, Dover, New York, 1959.

Burton, David, *The history of mathematics: an introduction.*, Wm. C Brown Publishers, Dubuque, Iowa.

Burton, Leone, *Mathematical Thinking: the Struggle for Meaning*, Journal for Research in Mathematics Education **15**, No. 1 (January,1984), 35-49.

Heath, Thomas, *The works of Arquimedes*, Dover, New York, 1912.

Jayawardene, S. A., *The influence of practical arithmetics on the Algebra* of Rafael Bombelli, Revista ***Isis*** (1972).

Kline, Morris., ***Mathematical thought from ancient to modern times.***, Oxford University Press, NewYork, 1972.

Scriba, Cristoph, ***John Wallis Treatise of angular sections*** and Tabit ben Qurra's generalization of the Pythagorean theorem, Revista ***Isis***. **57, I, No. 187 pages 56-66 (1966).**

Smith, D.E., ***History of Mathematics***, vol. . II, Dover, New York, 1953.

van der Waerden, B.L., ***Geometry and Algebra en Ancient Civilizations***, Springer Verlag, 1983.

van der Waerden, B.L., ***A History of Algebra: From al-Khwarizmi to Emmy Noether***, Springer **Verlag, 1985.**

van der Waerden, B., ***A history of algebra.***, **Springer-Verlag, Berlin, 1980.**

Wallis, John. *Algebra.(1673)*, reproducido en David E. Smith. ***A Source Book in Mathematics.***, Dover, New York, 1959.