Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen IV (1997), pp. 1–17

DE ŁOŚ AL PRESENTE: UN TEOREMA AÚN CENTRAL EN TEORÍA DE LA CLASIFICACIÓN

ANDRÉS VILLAVECES(*)

Resumen. A pesar de la amplitud que ha logrado la Teoría de la Clasificación (= Teoría de la Estabilidad), la Conjetura de Łoś (= Teorema de Morley en el caso de Primer Orden) es un 'problema test' aún central en varias de las extensiones más recientes de la Teoría de la Clasificación a ámbitos más generales. Damos aquí un esbozo del papel de la Conjetura de Morley en Estabilidad, la definición de Clases Elementales Abstractas, algunos problemas aún existentes y un resumen de los resultados logrados en esa dirección.

Abstract. In spite of the wealth of results that Classification Theory (=Stability Theory) has reached, the Łoś Conjecture (= Morley's Theorem in the First Order case) remains a central 'test-problem' for many of the most recent extensions of the theory to more general contexts. We provide here a sketch of the role of Morley's Conjecture in Stability, the definition of Abstract Elementary Classes, some open problems and some of the results obtained in that direction.

Keywords. Classification, stability, non–elementary classes, model theory.

(*)Texto recibido 7/5/98, revisado 29/10/98. Andrés Villaveces, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional, Bogotá, Colombia. e-mail:villavec@matematicas.unal.edu.co
Agradezco a John Baldwin su detallada lectura de estas notas, al igual que sus múltiples comentarios y preguntas sobre las generalizaciones; también agradezco a Fernando Zalamea su apoyo a este proyecto.

0. Introducción

La Teoría de la Clasificación (o Teoría de la Estabilidad), desarrollada por Vaught, Morley, y primordialmente Shelah, es uno de los mayores logros de la matemática de los últimos 25 años. El teorema más profundo del área (Main Gap, Shelah hacia 1980) afirma que, dada cualquier teoría T, o bien T tiene el número maximal de modelos (y en este caso *no tiene* teoremas de estructura), o bien el número de modelos de T en cardinal $\aleph_\alpha$ es menor que $\beth_{\omega_1}(|\alpha|)$, y todos los modelos en este cardinal se pueden obtener a partir de un 'núcleo' y mediante el uso de un conjunto relativamente pequeño de invariantes. No expondremos aquí muchos detalles referentes a la teoría de la clasificación; nos limitamos a trazar un tenue esbozo. Remitimos al lector interesado en otras exposiciones de este material a [Har], [Bld], [Bue], [Ho] y [Sh:200]. La 'gran referencia' en el tema sigue siendo, indiscutiblemente, el libro de Shelah que culminó 15 años de investigación: *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models* [Sh:c].

El Teorema de Categoricidad de Morley, del principio de los años 60, puede ser considerado como el inicio de la teoría de la Estabilidad. Entre 1965 y circa 1982 gran parte del trabajo en Estabilidad estuvo centrado en la demostración de Shelah de la Conjetura de Morley.

Definición 0.1. *La función espectro $I(-,T)$ de una teoría T calcula, dado un cardinal λ, $I(\lambda,T)$ = número de modelos de T de tamaño λ, módulo isomorfismo. Si $I(\lambda,T)=1$ se dice que T es* ***categórica*** *en λ.*

Teorema 0.2. *(Categoricidad - Morley) Sea T una teoría contable en primer orden. Si existe $\lambda \geq \aleph_1$ tal que T es categórica en λ entonces, para todo $\mu \geq \aleph_1$, T es categórica en μ.*

En los años 60, Morley conjeturó que la función espectro de una teoría en primer orden completa y contable T es no-decreciente en cardinales no contables (ésto es, $\aleph_0 < \lambda < \kappa \Rightarrow I(\lambda,T) \leq I(\kappa,T)$).

Una parte importante de la larga demostración de Shelah consistió en desarrollar la relación de dependencia llamada 'bifurcación' en teorías estables. La noción de *no bifurcación* es la generalización más fuerte que se ha obtenido del concepto de 'independencia algebraica': la independencia lineal en espacios vectoriales y la independencia algebraica en cuerpos algebraicamente cerrados son casos particulares de la noción acuñada por Shelah a lo largo de la demostración de la Conjetura de Morley. En gran parte de su libro, Shelah [Sh:c] dedica sus esfuerzos a hallar subconjuntos de un modelo de una teoría estable sobre los cuales la relación de dependencia 'bifurcación' se comporte lo suficientemente bien como para tener una *teoría de la dimensión*.

Algunas preguntas que tocaremos en este ensayo son:

1 ¿Qué busca la Teoría de la Clasificación? (de Morley hasta Main Gap)

2 ¿Por qué buscamos extender dicha teoría?
3 ¿Por qué a clases elementales abstractas?
4 ¿Cómo empezar? Problema Test: Espectro de Categoricidad. ¿Qué se ha hecho en esta última dirección?

1. ¿Qué busca la Teoría de la Clasificación?

Fijamos una teoría contable completa T en primer orden, $M \models T$.

1.1 El Problema. Shelah propone considerar la Teoría de Modelos como un álgebra abstracta (cuando se maneja una T arbitraria). Así, en Teoría de Modelos pretendemos encontrar *teoremas generales de estructura* (tipo el teorema de Steinitz para la Teoría de Cuerpos Algebraicamente Cerrados o tipo invariantes de Ulm para grupos abelianos contables con torsión).

Así, dado $M \models T$, queremos encontrar un *conjunto de invariantes* que sea *completo* en un sentido especificado más abajo. Los candidatos naturales son invariantes cardinales o generalizaciones razonables de éstos.

Ejemplo 1.1.1.

(1: espacios vectoriales sobre $\mathbf{Q}$*): basta un cardinal (la dimensión),*
(2: cuerpos algebraicamente cerrados): basta tomar dos cardinales (la dimensión y la característica),
(3: ~~espacios~~ vectoriales): basta tomar dos cardinales (la dimensión y la ~~característica~~), cuando el cuerpo base F *es algebraicamente cerrado.*
(4: grupos abelianos divisibles G*): un conjunto contable de cardinales (la dimensión de* $\{x \in G | px = 0\}$ *para cada primo* p *y el rango de* $G/\mathrm{Tor}\ (G)$*),*
(5: estructuras $\langle A, R_0, R_1, \ldots \rangle$, R_i *monádica):* $2^{\aleph_0}$ *cardinales.*

Vale la pena enfatizar ahora que todo modelo (M, E), con E una relación de equivalencia, tiene un conjunto de invariantes razonablemente completo: la función que dice, dado un cardinal λ, cuántas clases de equivalencia de ese tamaño ocurren. Al enriquecer M con relaciones adicionales tan sólo entre elementos equivalentes, de tal manera que cada clase de equivalencia se convierta en un modelo con un conjunto completo de invariantes, es claro que el modelo resultante tendrá un conjunto completo de invariantes.

Sin embargo, incluso aceptando conjuntos de invariantes tan generales, podríamos perfectamente no tener una teoría de estructura para toda T.

Problema 1.1.2. (Estructura/No Estructura): *Describir teorías de estructura para ciertas* T *(especificar cuáles) y demostrar que para las otras teorías no es posible obtener teoremas de estructura.*

Más en detalle, tenemos que considerar la siguiente

Definición 1.1.3. **(λ-valores e invariantes de profundidad α)** *Para $\alpha = 0$, un λ-valor de profundidad α es un cardinal $\leq \lambda$; para $\alpha = \beta + 1$, es una sucesión de longitud $\leq 2^{\aleph_0}$ de funciones del conjunto de λ-valores de profundidad β en el conjunto de cardinales $\leq \lambda$ o un λ-valor de profundidad β; y para α límite es un λ-valor de profundidad $< \alpha$.*

*Un **invariante** [de profundidad α] de T es una función que asigna a cada modelo M de T de tamaño λ un λ-valor [de profundidad α] que depende tan solo del tipo de isomorfismo de M.*

Los λ-valores se pueden visualizar como árboles de α niveles y ramificación dada por los valores de las funciones.

Si no se restringe α, el conjunto de valores posibles de los invariantes es tan complicado como el conjunto de todos los modelos. Así,

Tesis 1.1.4. *Una teoría T admite teoría de estructura si existen un ordinal α e invariantes (o conjuntos de invariantes) de profundidad α que determinan todo modelo de T módulo isomorfismo.*

Es fácil verificar que para $\alpha > 0$, el número de $\aleph_\gamma$-valores de profundidad α está acotado por $\beth_\alpha(|\omega + \gamma|)$, donde

$$\beth_\beta(\mu) = \mu + \sum_{\gamma<\beta} 2^{\beth_\gamma(\mu)}.$$

Corolario 1.1.5. *Si T tiene teoría de estructura entonces existe α tal que para todo γ, T tiene $\leq \beth_\alpha(|\omega + \gamma|)$ modelos no isomorfos de tamaño $\aleph_\gamma$.*

Es fácil ver que para cada α existen muchos γ's tales que $\beth_a(|\omega + \gamma|) < 2^{\aleph_\gamma}$. De modo que si uno logra demostrar que la teoría tiene $2^{\aleph_\gamma}$ modelos de tamaño $\aleph_\gamma$, tiene 'no-estructura'.

Una pregunta más concreta es el problema del espectro. La idea es que

(1) Si hay teoría de estructura, entonces $I(\lambda, T)$ debería ser pequeño, incluso calculable.

(2) Si no hay teoría de estructura, $I(\lambda, T)$ debería ser grande.

Según Shelah, el resultado más importante de su libro [Sh:c] es justamente una versión concreta de lo anterior.

Teorema 1.1.6. **(Main Gap - versión de bolsillo):** *dada cualquier teoría T,*

- *o bien $I(\lambda, T) = 2^\lambda$ para todo $\lambda > \omega$,*
- *o bien $I(\aleph_\alpha, T) < \beth_{\omega_1}(|\alpha|)$; en este caso, todo modelo de T puede ser caracterizado módulo isomorfismo mediante un invariante de profundidad enumerable.*

Consideremos el problema más general (y abierto):

Problema 1.1.7. (Problema de la Clasificación). *Clasificar las teorías T de manera útil, es decir que para preguntas apropiadas acerca de la clase de modelos de T, la partición en casos que se obtiene mediante la clasificación sea una ayuda.*

En este punto, con una pregunta planteada de manera tan vaga, podría haber innumerables respuestas. Así, mucho antes de los trabajos de Shelah ya había resultados concretos para teorías que extiendan la Aritmética de Peano (PA) o para teorías de conjuntos (ZF). De importancia en esta dirección son los trabajos de Friedman [Fr], Keisler [Ke], Silver, Morley, Kaufmann. En tiempos más recientes, Enayat, Kunen y el autor han desarrollado avances en esta dirección distinta.

Shelah observa que, aunque las propiedades 'T extiende a PA o a ZF^- o a la teoría de anillos' son fructíferas, tienen una falla fuerte: sus complementos no tienen ningún significado matemático. Según Shelah, una clasificación debería dar lugar a 'líneas divisorias' de carácter taxonómico: tanto una caracterización como su complemento deberían tener consecuencias matemáticas de interés (y de carácter útil) sobre las teorías que quedan en una u otra clase. Por ésto, a pesar de sus sendas contribuciones laterales a teoría de modelos de PA y de la teoría de conjuntos, para *su* teoría, Shelah se concentró en buscar *dicotomías* cargadas de significado.

La lista de dicotomías obtenida en más de diez años de trabajo es:

(1) estable/inestable,
(2) superestable/insuperestable,
(3) dop/ndop,
(4) profunda/panda,
(5) otop/notop.

T es *inestable* si puede en cierto sentido definir orden: para cierto n y cierta fórmula φ dado cualquier orden I existen $M \models T$, y sucesiones $(\bar{a}_t)_{t\in I}$ de longitud n de elementos de M tales que

$$M \models \varphi(\bar{a}_t, \bar{a}_s) \text{ ssi } I \models (t < s).$$

T es *insuperestable* si en ella se puede definir un árbol con $\omega + 1$ niveles (usando ω fórmulas), que se subdivida en todo nivel.

T tiene la *dop* (*d*imensional *o*rder *p*roperty) si se puede definir en ella orden como antes, pero no con una fórmula de primer orden, sino mediante la pregunta: ¿es cierta dimensión (relacionada con $\bar{a}_s$, $\bar{a}_t$) $> \omega_1$?

Una teoría tiene la *otop* (*o*mitting *t*ype *o*rder *p*roperty) si existe una sucesión $\langle \varphi_m | m < \omega\rangle$ de fórmulas tal que para todo orden I existen un modelo M y n-tuplas $(\bar{a}_t)_{t\in I}$ de elementos de M tales que $s < t$ ssi existe una k-tupla $\bar{c}$ de elementos de M tal que $\varphi_m(\bar{c}, \bar{a}_s, \bar{a}_t)$ vale para todo m. La propiedad complementaria a otop (*notop*) en el caso concreto de teorías superestables corresponde a que existan modelos primos sobre muchos conjuntos.

Teorema 1.1.8. (Main gap - mitad sin estructura) *Si T es inestable, o estable no superestable, o tiene la dop o la otop, o es profunda, entonces dado cualquier λ no contable, $I(\lambda, T) = 2^\lambda$.*

Un comentario relacionado con otros temas de lógica: hay otros indicios de propiedades de no estructura de T. En efecto, dado cualquier $\lambda > \aleph_0$ regular, las T's del teorema tienen modelos *no* isomorfos de tamaño λ que se pueden volver isomorfos mediante forcings λ-completos. Además, para todo $\lambda > \aleph_0$ regular, existe una función

$$s : \{M | M \models T, |M| = \lambda\} / \approx \longrightarrow \mathcal{P}(S^\lambda_{\aleph_0})/\mathcal{C},$$

donde $\mathcal{C}$ denota el filtro club. Estos dos hechos indican no absoluticidad en un sentido fuerte del tipo de isomorfismo de modelos de T.

Complementariamente, para todas las teorías T que *no* satisfacen las hipótesis del Teorema 1.1.8, se tienen teoremas que implican que los fenómenos de no-estructura mencionados no ocurren (para $\lambda > \beth_1$).

1.2 Ejemplos. Consideramos *completaciones* de las teorías mencionadas en la tabla siguiente.

Inestable	Orden Lineal Grafos (use $\varphi(\langle x_0, x_1\rangle, \langle y_0, y_1\rangle) = x_0, y_1$ están conectados)
Estable, no superestable	Teoría de $({}^\omega\omega, \dots, E_n, \dots)$, con $f E_n g \Leftrightarrow \forall m < n(f(m) = g(m))$ Grupos abelianos $(x E_n y \Leftrightarrow p^n \mid (x - y))$
Superestable con la dop	Teoría de (M, P, F_1, F_2), donde $M = \omega_1 \cup \{\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle \mid \alpha \neq \beta < \omega, \gamma < \omega_1, [\alpha < \beta \Rightarrow \gamma < \omega]\}$, $P = \omega_1$, $F_1(\alpha) = \alpha$, $F_2(\alpha) = \alpha$, $F_1(\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle) = \alpha$, $F_2(\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle) = \beta$, con lo cual podemos definir un orden en P mediante $\lvert\{x \mid F_1(x) = a, F_2(x) = b\}\rvert = \aleph_0$.
Superestable ndop notop	ver 1.2.1
ω-estable	teorías categóricas en $\lambda \geq \aleph_1$ (por ejemplo, $Th(\bigoplus_{i<\omega} (\mathbf{Z}_{p^2}) q_i)$, TCAC_p)

1.2.1 Descomposición y Bifurcación. Para teorías superestables sin dop ni otop (es decir, aquellas para las cuales la 'primera mitad' del teorema 1.1.8 no se aplica), tenemos el siguiente teorema de estructura.

Teorema 1.2.1. (Main Gap - Descomposición.) *Dado un modelo M de T existe un árbol I con ω niveles y submodelos N_t $(t \in I)$, tal que $\eta < \nu \Rightarrow$*

$N_\eta \subset N_\nu$, $|N_\eta| \leq 2^{\aleph_0}$, *todos los* N_η *son submodelos elementales de* M, *el árbol es libre y* M *es primo sobre* $\bigcup\limits_{\eta \in I} N_\eta$.

Este árbol de modelos determina módulo isomorfismo a M. Si puede tener ramas infinitas, decimos que la teoría T es *profunda*. De lo contrario hay una función monótonamente decreciente Dp del árbol en On (de hecho en ω_1; este último hecho es no trivial y juega un papel fuerte en la prueba final del teorema del Main Gap en [Sh:c]), y decimos que la teoría es *panda*. Para teorías profundas T, de nuevo obtenemos no-estructura: $I(\lambda, T) = 2^\lambda$ para λ no enumerable.

Superestable ndop notop profunda	teoría de una función unaria
Superestable ndop notop panda	teoría de una función unaria F tal que $F^{n+1}(x) = F^n(x)$ (para esta teoría $I(\aleph_\gamma, T) \leq \beth_{n+1}(\lvert\gamma + \omega\rvert)$)

1.3 El Problema del Espectro. La pregunta test más relevante para la Teoría de Clasificación en Primer Orden es, según Shelah, la
Conjetura de Morley: $\lambda < \mu \Rightarrow I(\lambda, T) \leq I(\mu, T)$, salvo si $\lambda = \aleph_0$, T es categórica en $\aleph_1$ pero no en $\aleph_0$.

Con el Main Gap, Shelah puede probar esta conjetura. Por otro lado, si T es insuperestable, tiene la dop o la otop, entonces $I(\lambda, T) = 2^\lambda$ para $\lambda > \aleph_0$. Esto también vale para T profunda. De resto, si Dp $(T) \geq \omega$, $\alpha > 0$, entonces $I(\aleph_\alpha, T) = \beth_{\mathrm{Dp}(T)}(|\omega + \alpha|)$. Si Dp $(T) < \omega$, $\alpha \geq 2^{\aleph_0}$, entonces $I(\aleph_\alpha, T) = \beth_{\mathrm{Dp}(T)-1}(|\alpha|^\kappa)$ para algún $\kappa \in [1, 2^{\aleph_0}]$ o bien $I(\aleph_\alpha, T) = \beth_k[\sum_{\lambda<\kappa} \beth_l(|\alpha|\lambda)]$, con κ algún cardinal $\leq (2^{\aleph_0})^+$, y $k, l \in \omega$ números asociados a T.

Loś: recapitulación. Los hilos quedan tendidos por Shelah en el caso de primer orden: a un extremo la Conjetura de Loś (= Teorema de Morley en ese caso), al otro el Teorema del Main Gap. Entre ambos, por un lado el desarrollo de las diversas líneas divisorias, y además (aunque apenas mencionada aquí) el desarrollo de la teoría de la Dimensión y de la No Bifurcación (independencia), la construcción de modelos primos sobre ciertos diagramas.

Es natural pensar en generalizaciones de la Teoría ya clásica de Shelah. Claramente, cabe esperar que algunos de los elementos que aparecen en el caso clásico tengan alguna versión en la generalización que se lleve a cabo.

2. ¿Por qué buscamos extender la Teoría de la Clasificación?

La teoría original de Shelah, con toda su generalidad, está limitada a teorías

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA

T de primer orden, en la mayoría de los casos contables. Ahora bien, muchas teorías en álgebra o en el resto de la matemática escapan al dominio de la clasificación de la teoría clásica de la Estabilidad. Es el caso de

(1) Grupos Localmente Finitos,
(2) Espacios de Banach,
(3) Teoría de Extensiones Finales de modelos (ordenados),
(4) Teorías axiomatizables en $L_{\kappa,\omega}$, donde κ es un cardinal medible o fuertemente compacto (¡y no axiomatizables en primer orden!).

En este punto es claro que hay muchas opciones sobre el camino a seguir. Por ejemplo, se puede *escoger* una teoría, y desarrollar no bifurcación, teoría de la dimensión, posiblemente líneas divisorias, clasificación de cierta forma de la teoría. Es el caso de los trabajos de Henson y Iovino (ver [Io] y [Io2]) para Espacios de Banach, o de los trabajos de Keisler y Fajardo en el caso de los espacios de probabilidad. La ventaja de tal forma de trabajo consiste en que se obtienen muchos resultados relevantes a la teoría, y las nociones de bifurcación (en el caso del trabajo de Iovino o Keisler) o de clasificación (en el caso de Fajardo) son muy cercanas al centro de la teoría específica escogida.

Pero también puede tomarse un camino distinto, y ver qué clase de teoremas pasan (y en qué forma) a clases grandes de teorías. Hasta cierto punto, tal enfoque es más cercano a la manera típica de trabajar en teoría de modelos. La ventaja de este camino está en el hallazgo de principios generales que permitan *entender* qué está pasando en varios de los casos en cuestión.

Más generalmente, en algunos casos puede ser aún más fructífero considerar, en vez de las teorías en primer orden de la Teoría de la Clasificación clásica, sencillamente *clases de estructuras* de cierto tipo. Por ejemplo, tomar como clase, hasta cierto punto independientemente de la teoría básica en cuestión, los Grupos Localmente Finitos, los Espacios de Banach o modelos de PA, con la relación $\mathfrak{A} \prec_e \mathfrak{B}$, que denota la relación '$\mathfrak{A}$ es submodelo inicial de $\mathfrak{B}$' o equivalentemente '$\mathfrak{B}$ es extensión elemental final de $\mathfrak{A}$'. Un camino sensato que cubre los ejemplos anteriores (y muchos más) consiste en tratar de extender la teoría de la clasificación al contexto de Clases Elementales Abstractas.

3. ¿Por qué Clases Elementales Abstractas?

En teoría abstracta de modelos se trabaja con lógicas generalizadas: familias de fórmulas, estructuras y la relación de satisfacción entre éstas. Sin embargo, muchas propiedades de las lógicas pueden ser expresadas sin hacer referencia directa a fórmulas: considerando como conceptos primitivos

(1) La Clase de Estructuras que son modelos de cierta teoría, y
(2) Las Sumersiones entre las estructuras de la clase.

Por otro lado, el Álgebra intenta hacer clasificación de estructuras algebraicas y sus extensiones. El paradigma mencionado en la primera sección (el Teorema de Steinitz) debería seguir siendo el paradigma-guía. Como mencioné en el capítulo anterior, varias de las clases de interés en Álgebra *no se prestan* a una axiomatización en primer orden. Aunque se puede intentar axiomatizar mediante cuantificadores generalizados, y estudiar la teoría de modelos que se obtiene en ese caso (el tipo de trabajo más llevado a cabo en los años 70 en esta rama de la lógica, y en un sentido extendido el estilo de algunos trabajos de Keisler, Fajardo, Iovino y Henson), podemos centrarnos en una *axiomatización* del concepto de *extensión 'elemental'*.

Podemos incluso llevar a cabo una axiomatización hasta cierto punto independiente del concepto de una lógica específica $\mathcal{L}$. La idea-guía se remonta a un intento de entender mejor ciertas construcciones de modelos típicas de la teoría de la clasificación en primer orden. Una ventaja de este camino es que nos permite separar más claramente la estructura de demostraciones (de no estructura, de amalgamación no bifurcante de modelos, teoremas necesarios para establecer una versión del Main Gap en ese contexto) entre su componente conjuntística y su componente estructural: separar propiedades de la clase abstracta $\mathfrak{K}$ de adiciones conjuntísticas. Tales situaciones juegan un papel fuerte en el trabajo de Giorgetta y Shelah [GgSh83] y Grossberg y Shelah [GrSh174] o en la teoría de modelos de sentencias ω_1-categóricas de extensiones de $\mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_1)$.

3.1 Los Axiomas.

Definición 3.1.1. (Clases Elementales Abstractas)

$\mathfrak{K} = (K, \leq_{\mathfrak{K}})$ es una clase elemental abstracta ssi $\mathfrak{K}$ es una clase de modelos en algún vocabulario fijo $\tau = \tau_{\mathfrak{K}}$ y $\leq_{\mathfrak{K}}$ es una relación binaria en K que satisface los axiomas siguientes

Ax 0: *Si $M \in K$, entonces todos los τ-modelos isomorfos a M también están en K. La relación $\leq_{\mathfrak{K}}$ es preservada por isomorfismos.*

Ax I: *Si $M \leq_{\mathfrak{K}} N$, entonces M es un submodelo de N.*

Ax II: *$\leq_{\mathfrak{K}}$ es un orden en K.*

Ax III: *La unión de una cadena $\leq_{\mathfrak{K}}$-creciente continua $\vec{M}$ de elementos de $\mathfrak{K}$ es un elemento de $\mathfrak{K}$.*

Ax IV: *La unión de una cadena $\leq_{\mathfrak{K}}$-creciente continua $\vec{M}$ de elementos of $\mathfrak{K}$ es el sup de $\vec{M}$ bajo $\leq_{\mathfrak{K}}$.*

Ax V: *Si $M_\ell \leq_{\mathfrak{K}} N$ para $\ell \in \{0,1\}$ y M_0 es un submodelo de M_1, entonces $M_0 \leq_{\mathfrak{K}} M_1$.*

Ax VI: *Existe un cardinal κ tal que para todo $M \in \mathfrak{K}$ y $A \subset |M|$, existe $N \leq_{\mathfrak{K}} M$ tal que $A \subset |N|$ y $\|N\| \leq \kappa \cdot |A|$. El mínimo de estos cardinales κ se denota LS $(\mathfrak{K})$ y se llama el número de Löwenheim-Skolem de $\mathfrak{K}$.*

Si λ es un cardinal y $\mathfrak{K}$ una clase elemental abstracta, $\mathfrak{K}_\lambda$ denota la familia de elementos de $\mathfrak{K}$ de cardinal λ. Similarmente definimos $\mathfrak{K}_{<\lambda}$

Definición 3.1.2.

(1) *Suponga que $\mathfrak{K}$ es una clase elemental abstracta.*

(a) *Se dice que $\mathfrak{K}$ tiene la propiedad de sumersión combinada ('JEP' = joint embedding property) ssi dados $M_1, M_2 \in \mathfrak{K}$, existe un $N \in \mathfrak{K}$ tal que M_1, M_2 se pueden $\leq_{\mathfrak{K}}$-sumergir en N.*

(b) *$\mathfrak{K}$ tiene amalgamación ssi dados $M_0, M_1, M_2 \in \mathfrak{K}$ y $\leq_{\mathfrak{K}}$-sumersiones $g_l : M_0 \longrightarrow M_l$ para $l \in \{1,2\}$, existen $N \in \mathfrak{K}$ y $\leq_{\mathfrak{K}}$-sumersiones $f_l : M_l \longrightarrow N$ tales que $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$.*

(2) *Para $\mathfrak{K}^1 \subset \mathfrak{K}$, sea*

$$(\mathfrak{K}^1)^{am} = \left\{ M_0 \in \mathfrak{K}^1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \textit{si } M_1, M_2 \in \mathfrak{K}^1, g_1, g_2 \textit{ son como en (3)(b),} \\ \textit{entonces existen } N \in \mathfrak{K}^1, \textit{ y } f_1, f_2 \\ \textit{tales que } f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2 \end{array} \right\}.$$

3.2 Ejemplos de Clases Elementales Abstractas.

(1) Dada una teoría completa de primer orden T de tipo τ, $(Mod(T), \prec)$ es una clase elemental abstracta (CEA).

(2) Sea K_{wo} la clase de todos los buenos órdenes y $\mathfrak{A} <_e \mathfrak{B}$ ssi $\mathfrak{B}$ es extensión final de $\mathfrak{A}$. $(K_{wo}, <_e)$ es una CEA.

(3) En $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\omega\omega}(Q_1)$, un τ-modelo débil es una estructura $(\mathfrak{A}, q)$, donde $\mathfrak{A}$ es una τ-estructura y $q \subset \mathcal{P}(A)$. Sea $\mathcal{L}_{\mathrm{w}}$ la lógica con las mismas fórmulas que $\mathcal{L}$, pero con relación de satisfacción

$$\mathfrak{A} \models_{\mathrm{w}} Qx\varphi(x) \text{ ssi } \{a \in A | \mathfrak{A} \models_{\mathrm{w}} \varphi(a)\} \in q.$$

Sea K la clase de todos los τ-modelos débiles, para cierto τ fijo. Sea $\mathfrak{A} <^{**} \mathfrak{B}$ ssi $\mathfrak{A} \prec_{\mathcal{L}_{\mathrm{w}}} \mathfrak{B}$ y, para todo $\bar{a} \in A^m$ y toda fórmula $\varphi = \varphi(x, \bar{y}) \in \mathcal{L}(\tau)$, si $\mathfrak{A} \models \neg Qx\varphi(x, \bar{a})$ entonces

$$\{b \in A | \mathfrak{A} \models \varphi(b, \bar{a})\} = \{b \in B | \mathfrak{B} \models \varphi(b, \bar{a})\}.$$

$(K, <^{**})$ es una CEA.

(4) Una clase elemental abstracta muy estudiada ha sido $(K_{\mathrm{ULF}}, <_{\mathrm{ULF}})$, donde

K_{ULF} es la clase de los grupos universales localmente finitos,
$<_{\mathrm{ULF}}$ es la relación de subgrupo común y corriente.

4. Resultados recientes hacia la generalización de Estabilidad

4.1 ¿Cómo empezar? El Problema Test. El problema del espectro (Conjetura de Morley) tiene como núcleo el Problema del Espectro de Categoricidad (Conjetura de Łoś).

Problema 4.1.1. (Categoricidad) *¿Cuándo es K categórica en algún cardinal?*

Más específicamente se puede preguntar

Problema 4.1.2. (Espectro de Categoricidad) *¿Bajo qué condiciones se pueden encontrar cardinales por encima de los cuales K es categórica, como sucede en primer orden?*

Engeler, Ryll-Nardzewski y Svenonius tienen una caracterización que relaciona la categoricidad en $\aleph_0$ con atomicidad de sus álgebras de Lindenbaum. En el caso de $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ el teorema de Scott implica que toda sentencia completa es categórica en $\aleph_0$. Para cardinales superiores a $\aleph_0$, el problema tiene que ver con propiedades de transferencia entre cardinales, como en el caso del teorema de Morley. En este caso, la categoricidad de T en $\aleph_1$ se transfiere hacia cualquier cardinal superior, y la categoricidad de T en cualquier $\kappa > \aleph_1$ baja hasta $\aleph_1$. La idea es buscar teoremas de espectro de categoricidad para CEAs, como problema-test hacia un desarrollo de teoría de la clasificación (estabilidad). Idealmente, la intuición es que para familias grandes de CEAs, se debería lograr obtener bastante estabilidad; en particular, se debería lograr aislar el espectro de categoricidad.

4.1.1 Direcciones Alternas. Algunas direcciones alternas que han sido atacadas incluyen los siguientes problemas:

(1) Modelos Universales,
(2) Modelos Homogéneos (Límites de distinta clase),
(3) El caso de las clases con/sin Amalgamación,
(4) No-Estructura obtenida a partir de consideraciones conjuntísticas sobre las clases.

Al igual que en el caso de primer orden, éstas y muchas otras consideraciones confluyen en nuestro 'problema grande.' Es necesario tener teoremas claros acerca de unicidad/no unicidad de límites, modelos primos sobre un conjunto, combinatoria de los problemas en cuestión.

Por ejemplo, para darse una idea de cuán importante es replantear seriamente las propiedades/construcciones típicas en teoría de modelos, menciono lo siguiente. *En general* en CEAs,

- No hay modelos monstruos
- Puede haber modelos maximales
- Los tipos de elementos no son conjuntos de fórmulas (son clases de equivalencia de elementos en extensiones, vistos como equivalentes mediante automorfismos de modelos más grandes)
- Puede perfectamente no haber amalgamación (de hecho éste es un caso importante).

Un resultado ya clásico (tanto por el resultado en sí como por su método de demostración) en esta área es

Teorema 4.1.3. (El Teorema de No Estructura de Shelah para CEAs) *Suponga que* $2^\lambda < 2^{\lambda^+}$. *Sea* K *una CEA tal que*

(i) *existe un modelo* $\mathfrak{A} \in K_\lambda$ *superlímite,*
(ii) $\mathfrak{A}$ *no es una base de amalgamación para* K_{λ^+}.

Entonces $I(K, \lambda^+) = 2^{\lambda^+}$ *y no existen modelos universales en* K_{λ^+}.

La demostración de este teorema hace uso del principio combinatorio 'diamante débil' (equivalente a la hipótesis de GCH débil $2^\lambda < 2^{\lambda^+}$). Los diamantes débiles proveen una maquinaria natural para hacer pruebas de no-estructura: permiten construir en este caso árboles binarios de modelos que se pueden tomar 'incompatibles' debido a que $\mathfrak{A}$ no es una base de amalgamación para K_{λ^+}. La forma usual de presentación del principio de diamantes débiles es

$$\Phi^2_{\kappa^+} \left\{ \begin{array}{l} \text{dada cualquier función } F : {}^{\kappa^+ >}2 \to 2 \\ \text{existe } g : \kappa^+ \to 2 \text{ tal que para toda } f : \kappa^+ \to 2, \\ \{\alpha < \kappa^+ | F(f \restriction \alpha) = g(\alpha)\} \text{ es estacionario en } \kappa^+. \end{array} \right.$$

Devlin y Shelah probaron que $2^\kappa < 2^{\kappa^+}$ es equivalente a $\Phi^2_{\kappa^+}$, y ambos son obviamente consecuencia de GCH en λ y λ^+, o de $\diamondsuit_{\kappa^+}$.

4.1.2 Categoricidad: la primera generalización. En [Sh87a] y [Sh87b], Shelah demostró la primera generalización del Teorema de Morley en dirección a Clases Elementales Abstractas. El teorema hace uso de temas tocados en la sección 4.1.1 y es el primer teorema de Clasificación para $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$.

Teorema 4.1.4. *Suponga que* $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ *para todo* $n < \omega$. *Sea* $K = Mod(\psi)$ *para una sentencia* $\psi \in \mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. *Si* K *tiene un modelo no enumerable entonces por lo menos una de las siguientes afirmaciones vale:*

(i) *o bien existe* $n > 0$ *tal que* $I(K, \aleph_n) = 2^{\aleph_n}$,
(ii) *o bien* K *tiene modelos en todo cardinal infinito, y si es categórica en algún* $\lambda > \omega_1$ *entonces es categórica en todo* $\mu > \omega_1$.

El primer hecho a resaltar aquí es el paralelo con el Teorema de Morley: apenas se tiene categoricidad en cierto cardinal más allá de cierta cota, ¡se tiene categoricidad para *todo* cardinal más allá de esa cota! Por otro lado, el teorema proporciona una dicotomía: o bien se tiene no estructura en algún $\aleph_n$, o bien se tiene el teorema de estructura más fuerte que se puede esperar: categoricidad en todos los cardinales $> \aleph_1$.

Un punto débil del teorema consiste en que solo se aplica a sentencias. No es válido en esta forma para teorías en $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Otro punto relativamente débil es el uso de la hipótesis conjuntística 'diamante débil en todos los $\aleph_n$'s ($2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$)'. Naturalmente, depende hasta cierto punto del gusto del lector el considerar que esta hipótesis sea demasiado fuerte o no. Tiene una ventaja relativa: no es una hipótesis de grandes cardinales; es simplemente una hipótesis relativamente débil (mucho menos fuerte que la Hipótesis Generalizada del Continuo) de Aritmética Cardinal. Mi opinión personal es que, aunque es deseable (y a la larga necesario) cuidar las hipótesis de grandes cardinales que se usan para desarrollar teoría de modelos, los diamantes débiles están definitivamente del lado razonable de este tipo de hipótesis. En efecto, su nivel de consistencia no requiere axiomas realmente fuertes, como la existencia de cardinales compactos; ni siquiera requiere medibles. Es suficiente (aunque no necesario) que la Hipótesis Generalizada del Continuo valga en algunos intervalos de cardinales. Ésto, aunque no es *directamente* comparable con existencia de grandes cardinales, es una hipótesis que percibimos como 'mucho más suave'.

Un problema relacionado con nuestro tema es el siguiente: para sentencias en $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, ¿tenemos algún cardinal λ tal que si φ es categórica en algún $\kappa \geq \lambda$, entonces φ es categórica en todo $\kappa \geq \lambda$? Shelah conjeturó en [Sh300] que este λ es $\beth_{\omega_1}$. ¿Por qué tan lejano? Hay un contrajemplo de Hart y Shelah [HaSh323], que muestra que, para todo k natural mayor que 1, existe una sentencia $\psi_k \in \mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ que es categórica en $\aleph_0, \dots, \aleph_{k-1}$, pero tiene muchos modelos de tamaño λ, para todo $\lambda \geq 2^{\aleph_{k-1}}$.

Existen generalizaciones de Estabilidad a contextos en los cuales se supone a priori que existe por ejemplo un cardinal compacto. Este es un tipo de hipótesis definitivamente muy fuerte para la teoría de modelos. Ver hasta qué punto se puede llegar con ese tipo de hipótesis es un trabajo necesario, pero ni mucho menos definitivo. Si se pueden eliminar esas hipótesis, tanto mejor.

4.2 ¿Qué se ha hecho hasta ahora?

4.2.1 Rebajando hipótesis de grandes cardinales. Una de las primeras direcciones de trabajo posteriores a los resultados sobre $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ cristalizó en los resultados de Makkai y Shelah [MaSh285]. Allí, los dos autores usaron una *hipótesis conjuntística fuerte:* la existencia de cardinales fuertemente compactos. La fuerza de consistencia de estos cardinales está (en general, salvo cuando ocurren las 'crisis de identidad cardinales' señaladas por Magidor en los años 70, donde construye ciertos modelos de ZFC donde el primer fuertemente compacto es el primer medible) muy por encima de la de cardinales medibles.

Es definitivamente una hipótesis mucho más fuerte que, por ejemplo, la de los diamantes débiles mencionada en la sección 4.1.1. Aún así, es interesante el haber conseguido un resultado de *espectro* de categoricidad bastante similar al de Morley (con las diferencias obvias de la situación).

Agregar cardinales grandes facilita la cuestión considerablemente: a manera de ejemplo, cuando hay cardinales compactos, hay compacidad de la lógica correspondiente, y los tipos de elementos son de nuevo, como en lógica de primer orden, descriptibles como conjuntos de fórmulas. Hay también teoremas de transferencia de amalgamación de un cardinal a otro que hacen mucho más clara la determinación del espectro de consistencia.

Teorema 4.2.1. *(Makkai-Shelah [MaSh285].) Suponga que κ es un cardinal fuertemente compacto $> \omega$ y T es una teoría en un fragmento de $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ de tamaño a lo sumo κ. Suponga además que T es categórica en cierto cardinal λ. Entonces*

(i) *Si $\lambda > \beth_{\kappa+1}(\kappa)$ entonces T es categórica en todo cardinal $\beth_\delta$, con δ divisible por $(2^\kappa)^+$.*
(ii) *Si λ es cardinal sucesor y $\lambda > (\kappa^{<\kappa})^+$ entonces T es categórica en todo cardinal $\geq min(\lambda, \beth_{(2^\kappa)^+})$.*

Observe que bajo las hipótesis esencialmente más fuertes del caso (ii), se logra un espectro *total* por encima de algún cardinal razonablemente alto. Cuando λ no es sucesor, caemos en el caso (i). Allí, la conclusión es menos fuerte en cuanto al estilo de espectro de categoricidad logrado. Sin embargo (y eso es tal vez lo más importante), Makkai y Shelah obtienen un espectro *no acotado* en ese caso.

Hay un detalle interesante aquí: se combinan propiedades distintas de las lógicas $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ y $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$. En efecto, bajo hipótesis de categoricidad, se puede probar que $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ y $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ coinciden. Ahora bien, la propiedad de amalgamación vale para teorías de primer orden [CK] y en $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ cuando κ es fuertemente compacto; por otro lado, $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ no tiene la propiedad de Vaught-Tarski para uniones de cadenas de longitud κ, pero $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ sí la tiene. La combinación de estas dos propiedades es un punto crucial en la prueba de Makkai y Shelah.

El siguiente teorema de interés para nosotros es el de Kolman y Shelah, que aparece en [KlSh362]. Allí los autores inician la reducción a hipótesis de grandes cardinales menos fuertes. Se pierde la definición de tipos como conjuntos de fórmulas. Aún así, la existencia de cardinales medibles permite llevar a cabo construcciones relativamente fuertes: ultraproductos generalizados. El artículo contiene la demostración de la propiedad de amalgamación para la clase de modelos de T de cardinal $< \lambda$, para $\lambda \geq \kappa$, donde T es una teoría en la lógica $L_{\kappa\omega}$, categórica en λ. Este primer paso hacia la prueba de categoricidad se tiene de manera mucho menos inmediata que en el caso de la combinación de $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ y $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$.

En [Sh472] (la continuación de [KlSh362]), Shelah demuestra la parte 'descendente' del Espectro de Categoricidad:

Teorema 4.2.2. *Si T es una teoría en la lógica $L_{\kappa\omega}$, categórica en λ, y $\lambda \geq \kappa$, con κ medible, entonces T es categórica en todos los cardinales del intervalo $[\kappa, \lambda]$.*

Obsérvese que esto solo resuelve el problema del espectro ***por debajo*** del cardinal de la hipótesis. La generalización de ésto a cardinales superiores a λ es problemática, y parece requerir la construcción de modelos primos en cierto sentido por encima de diagramas complicados de amalgamación. Aún está abierto ese desarrollo.

4.2.2 Adiós a la Compacidad. La reducción de hipótesis de grandes cardinales en realidad debe dirigirse a los dos casos importantes 'compactos' y 'medibles.' Por debajo, las hipótesis relevantes conjuntísticas son más bien de carácter combinatorio: diamantes débiles, GCH en algunos intervalos.

Hay una línea muy promisoria que ha iniciado Shelah en [Sh576]. En este artículo, la idea es eliminar todas las trazas de compacidad (como la no-definibilidad de buen orden, existencia de modelos de Ehrenfeucht-Mostowski o existencia de grandes cardinales). Siguiendo ideas hasta cierto punto paralelas a las trabajadas en [Sh87a], la primera generalización de Estabilidad a contextos distintos del clásico, Shelah comienza a armar una maquinaria para 'transmitir categoricidad' de un cardinal a su sucesor, mediante la construcción (ardua) de modelos saturados y sobre todo mediante la generalización de la no bifurcación para probar que 'todo modelo es saturado en el cardinal sucesor en cuestión.' El desarrollo detallado de versiones especiales del diamante débil, y sobre todo, el primer uso de *pcf* en el tema, muestran la complejidad del asunto. ¡*pcf* fue desarrollada originalmente para tratar en ZFC (o cerca de ZFC) asuntos de aritmética cardinal, como la Hipótesis de los Cardinales Singulares, o la misma Hipótesis Generalizada del Continuo!

Teorema 4.2.3. *(Hipótesis: diamantes débiles alrededor de λ.) Si $\mathfrak{K}$ es categórica en λ, λ^+, $LS(\mathfrak{K}) \leq \lambda$ y $1 \leq I(\lambda^{++}, \mathfrak{K}) < 2^{\lambda^{++}}$ entonces $\mathfrak{K}$ tiene un modelo de tamaño λ^{+++}.*

Por otro lado, en [Sh600] (la continuación de [Sh576]), Shelah prueba que, de manera paralela a como sucede en el Teorema 4.1.4, dadas hipótesis ligeramente más fuertes que las del Teorema 4.2.3, la categoricidad 'se propaga' hacia arriba por

$$\lambda, \lambda^+, \lambda^{++}, \ldots, \lambda^{+n}, \ldots$$

No se sabe qué ocurre más allá: ni siquiera se sabe qué clase de modelos hay (si los hay), por ejemplo, en cardinal $\lambda^{+\omega}$. Hay problemas serios de cofinalidad en ese punto. Es posible (conjetura del mini-folklore que rodea estos temas)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BIBLIOTECA

que haya teoremas de categoricidad para clases 'refinadas', que en cierta forma agarren lo esencial de la clase original.

4.2.3 De nuevo algo de estructura en las hipótesis. Volviendo al tema de 'rebajar cardinales,' Shelah y Villaveces desarrollan actualmente el siguiente frente del proyecto global aquí esbozado: suponer como hipótesis 'razonable' que la clase no tiene modelos maximales. Es una hipótesis bastante natural, y en principio bastante más débil que el 'admitir amalgamación.' Adicionalmente, se admite algo de teoría de conjuntos: ciertos diamantes débiles, GCH en algunos intervalos.

Problema 4.2.4. *¿Cómo son los posibles espectros de categoricidad en este caso?*

Naturalmente, el proyecto debe resolver algunos obstáculos adicionales antes de pasar realmente a esta 'pregunta-test.' Así, por ejemplo, en [ShVi635], los autores prueban que

(1) Bajo hipótesis razonables, las bases de amalgamación son densas en CEAs sin modelos maximales.
(2) Una subclase (densa) captura amalgamación disjunta (el embrión de la no bifurcación).
(3) Los límites de cadenas de modelos controladas por omisión de tipo son únicos. Esto es crucial si uno quiere una prueba razonable de categoricidad.

En este momento, la pregunta-test (aún abierta) más acuciante es

Problema 4.2.5. *¿Hay una noción razonable de amalgamación no bifurcante en clases sin modelos maximales?*

Referencias

[Bld] John T. Baldwin, *Fundamentals of Stability Theory*, New York: Springer, 1987.

[Bue] Steven Buechler, *Essential Stability Theory*, New York: Springer, 1996.

[CK] Chen C. Chang and Jerome H. Keisler, *Model Theory, volume 73 of Studies in Logic and the Foundation of Math.*, Amsterdam: North Holland, 1973.

[Fr] Harvey Friedman, "Countable Models of Set Theory" **40** (1972), 113–124.

[GgSh 83] Donato Giorgetta and Saharon Shelah, "Existentially closed structures in the power of the continuum", Annals of Pure and Applied Logic **26** (1984), Proceedings of the 1980/1 Jerusalem Model Theory year, 123–148.

[GrSh 174] Rami Grossberg and Saharon Shelah, "On universal locally finite groups", Israel Journal of Mathematics **44** (1983), 289–302.

[Har] Bradd Hart, "Review of 'Classification Theory, Revised Edition' by S. Shelah", Journal of Symbolic Logic **58** (1993), 1071–1074.

[HaSh 323] Bradd Hart and Saharon Shelah, "Categoricity over P for first order T or categoricity for $\phi \in L_{\omega_1\omega}$ can stop at $\aleph_k$ while holding for $\aleph_0, \cdots, \aleph_{k-1}$", Israel Journal of Mathematics **70** (1990), 219–235.

[Ho] Wilfrid Hodges, "What is a structure theory?", Bulletin of the London Mathematical Society **19** (1987), 209–237.

[Io] José Iovino,. *A quick introduction to Banach space model theory*, preprint.

[Io2] José Iovino, *The Morley Rank of a Banach space*, The Journal of Symbolic Logic **62** (1997).

[Ke] Jerome Keisler, "Some applications of the theory of models to set theory", *In Logic, methodology and philosophy of science - Proceedings of the 1960 International Congress* (1962), Stanford University Press, 80–86..

[KlSh 362] Oren Kolman and Saharon Shelah, "Categoricity of Theories in $L_{\kappa,\omega}$, when κ is a measurable cardinal. Part 1", Fundamenta Mathematicae **151** (1996), 209–240.

[MaSh 285] Michael Makkai and Saharon Shelah, "Categoricity of theories in $L_{\kappa\omega}$, with κ a compact cardinal", Annals of Pure and Applied Logic **47** (1990), 41–97.

[Sh 87a] Saharon Shelah, "Classification theory for nonelementary classes, I. The number of uncountable models of $\psi \in L_{\omega_1,\omega}$. Part A", Israel Journal of Mathematics **46** (1983), 212–240.

[Sh 87b] Saharon Shelah, "Classification theory for nonelementary classes, I. The number of uncountable models of $\psi \in L_{\omega_1,\omega}$. Part B", Israel Journal of Mathematics **46** (1983), 241–273.

[Sh 200] Saharon Shelah, "Classification of first order theories which have a structure theorem", American Mathematical Society. Bulletin. New Series **12** (1985), 227–232.

[Sh 300] Saharon Shelah, "Universal classes", In *Classification theory* (Chicago, IL, 1985), volume 1292 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin (1987), Proceedings of the USA–Israel Conference on Classification Theory, Chicago, December 1985; ed. Baldwin, J.T., 264–418.

[Sh 472] Saharon Shelah, "Categoricity of Theories in $L_{\kappa^*\omega}$, when κ^* is a measurable cardinal. Part II", Fundamenta Mathematicae, sometido.

[Sh 576] Saharon Shelah, "Categoricity of an abstract elementary class in two successive cardinals", Israel Journal of Mathematics, sometido.

[Sh 600] Saharon Shelah, "Categoricity in abstract elementary classes: going up inductive step", in preparation.

[ShVi 635] Saharon Shelah and Andrés Villaveces, "Toward Categoricity for Classes with no Maximal Models", Annals of Pure and Applied Logic, aceptado.

[Sh:c] Saharon Shelah, *Classification theory and the number of nonisomorphic models*, volume 92 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam: North-Holland, 1990.