Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen IV (1997), pp. 115–126

UN MÉTODO NUMÉRICO PARA EL CÁLCULO DE LA VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA

IGNACIO MANTILLA P.
JORGE MAURICIO RUÍZ V.(*)

Resumen. En este trabajo se presenta un método numérico, especialmente formulado para el cálculo de la velocidad minimal de propagación de una epidemia. El método numérico propuesto resulta ser una interesante e inédita variante del tradicional método de Newton para encontrar raíces de sistemas de ecuaciones no lineales. Se presenta la prueba de su convergencia local.

Abstract. We present a numerical method to find out the minimal spread speed of an epidemy. The numerical method proposed is an interesting variation of Newton's method to find out roots of systems of non-linear equations.

Keywords. Propagation, epidemics, numerical methods, non-linearity.

1. Un modelo epidemiológico de propagación espacio–temporal

A partir de las tres clases del modelo epidémico clásico de Kermack y Mackendrick (S := Susceptibles, I := Infectados, R := Removidos), construimos un modelo de propagación en el espacio y en el tiempo, más general, el cual describe el siguiente sistema de ecuaciones integrodiferenciales parciales:

(*)Texto recibido 3/12/98, revisado 21/5/99. Ignacio Mantilla, Jorge Mauricio Ruíz, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional-Sede Bogotá. e-mail:igmantil@matematicas.unal.edu.co, jmruiz@ciencias.ciencias.unal.edu.co. El presente trabajo es derivado de la tesis "Estudio Numérico de un Modelo Epidemiológico de Propagación Espacio Temporal", para optar al título de Maestría en Matemáticas, en la Universidad Nacional de Colombia.

BIBLIOTECA

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -(k * I)(x,t)S(x,t) \\ \frac{\partial I}{\partial t} = (k * I)(x,t)S(x,t) - \rho I(x,t) \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \rho I(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} S(x,0) = S_0(x) = \overline{\overline{S}} > 0, \\ I(x,0) = I_0(x) \geq 0, \; R(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

donde S, I, R denotan las densidades de individuos susceptibles, infecciosos y removibles. Estas son funciones del tiempo t y de una variable espacial $x \in \mathbb{R}$. S, I, R son $C^{2,1}(\cdot,\cdot)$.

$$(k * I)(x,t) := \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)I(y,t)dy \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

es la convolución de k con I, donde

$$k(x-y) := \bar{k}V(x,y) = \bar{k}v(x-y), \quad \bar{k} > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)d\xi = 1.$$

$\bar{k}$ se llama la rata de infección y ρ la rata de mortalidad.

El primer modelo que describe la propagación de una epidemia en el tiempo fue presentado por Kermack y Mckendrick en 1927 [14]. Sin embargo, es D. Kendall, quien en 1965 [13] generaliza este modelo, teniendo en cuenta la distribución de la población en el espacio y formulando para su descripción un sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

Kermack y Mckendrick [14] derivaron además un teorema umbral, el cual establece que para que una epidemia tenga lugar se debe satisfacer la condición $\overline{\overline{S}} > \rho/\bar{k}$; es decir, la infección inicial se propaga sólo si el número inicial de susceptibles excede el umbral $\rho/\bar{k}$. Es así que el número de infectados por la epidemia podrá ser positivo si y sólo si $\overline{\overline{S}} > \rho/\bar{k}$.

2. Ondas viajeras

En los trabajos de D.G. Aronson [1] [2], P.C. Fife [9] [10], H.F. Weinberger [23], K. Schumacher [19] [20], H.R. Thieme [22], entre otros, hay interés en la búsqueda de soluciones de (1.1)-(1.2) en forma de ondas viajeras, es decir, soluciones en las cuales las variables x, t que intervienen en el modelo pueden escribirse como funciones de $z := x + ct$, $c > 0$. El sistema se ve transformado, haciendo la sustitución correspondiente, en el siguiente sistema de ecuaciones integrodiferenciales ordinarias:

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} \frac{dS}{dz} = -\frac{1}{c}(k * I)(z)S(z) \\ \frac{dI}{dz} = \frac{1}{c}(k * I)(z)S(z) - \frac{1}{c}\rho I(z) \\ \frac{dR}{dz} = \frac{1}{c}\rho I(z), \qquad z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Considerando este sistema bajo las "condiciones de frontera"

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} \lim_{z\to-\infty} S(z) &= S(-\infty) = \overline{\overline{S}}, \\ \lim_{z\to-\infty} S(z) &= R(-\infty) = 0 = \lim_{z\to-\infty} R(z) = R(-\infty), \end{cases}$$

una solución de (2.1)-(2.2) será llamada *onda viajera* de velocidad c.

Definición 2.1 Sea $c > 0$ y $z := x + ct$. Una onda viajera de velocidad c se llama regular a izquierda, si existen $\mu_l, q_l > 0$ tales que

$$\lim_{z\to-\infty} I(z)e^{-\mu_l z} = q_l.$$

μ_l se llama la rata de crecimiento. La onda se llama regular a derecha, si existen $\mu_r, q_r > 0$ tales que

$$\lim_{z\to+\infty} I(z)e^{\mu_r z} = q_r;$$

a μ_r se le llama rata de extinción.

La transformación del sistema (2.1) en un problema de punto fijo (ver [18]) cuya ecuación característica es

$$\text{(2.3)} \qquad L_c(\mu) = \frac{\overline{\overline{S}}k_c(\mu)}{\mu + \frac{\rho}{c}} = 1 \quad \text{con } \mu \in (-\bar{\beta}, \bar{\beta}) - \{\rho/c\},$$

donde $\bar{\beta} := \sup\{\mu \in \mathbb{R} : k(z)e^{\gamma z} \in L_1(\mathbb{R}) \text{ para todo } 0 < \gamma\mu\}$ y

$$\text{(2.4)} \qquad k_c(\mu) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} k(z)e^{\mu z}dz$$

motivan el teorema 2.2 y la definición 2.3.

Teorema 2.2. *Una condición necesaria y suficiente para la existencia de ondas viajeras no triviales de velocidad c es*

$$c \geq c^*,$$

donde c^* es la velocidad minimal definida en 2.3.

Para $c > c^*$ la onda viajera está determinada de manera única (salvo traslación); es regular a izquierda y regular a derecha.

Prueba. Ver [16].

Definición 2.3 (Velocidad Minimal) La constante c^* se define a través de:

$$c^* := \inf\{c : \text{ existe } \quad \mu \text{ con } L_c(\mu) = 1\}$$

y es llamada velocidad minimal de una onda viajera. Considerando como núcleo $k(z) := \frac{\bar{k}\beta}{2} e^{-\beta|z|}$, $z \in \mathbb{R}$ podemos derivar una "función velocidad" C de la ecuación característica (2.3)

$$C(\mu) = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\bar{\bar{S}}\bar{k}\beta^2}{\beta^2 - \mu^2} - \rho\right\}; \tag{2.5}$$

se tiene, para la velocidad minimal, que $c^* = C(\mu^*)$ para un adecuado μ^*.

3. Un método numérico para el cálculo de la velocidad minimal

A continuación presentamos un método numérico, especialmente formulado para el cálculo de la velocidad minimal. En él se calculan c^* y μ^*, de tal manera que $C(\mu^*) = c^*$. El método resulta ser una interesante e inédita variante del tradicional método de Newton para encontrar raíces de ecuaciones no lineales. Por su excelente comportamiento y rápida convergencia, hemos querido adicionalmente incluir la demostración de su convergencia local.

Antes de iniciar con el cálculo de c^*, observemos que a partir de (2.3) es fácil demostrar las siguientes proposiciones (ver [18]).

Proposición 3.1. *Si μ satisface la ecuación característica y $L_c'(\mu) = 0$ entonces $k_c'(\mu) = 1/\bar{\bar{S}}$.*

Proposición 3.2. *Si* $k_c'(\mu) = \frac{1}{\overline{\overline{S}}}$ *y* $L_c(\mu) = 1$ *entonces* $L_c'(\mu) = 0$.

Como estamos interesados en hallar la velocidad minimal, de acuerdo con las proposiciones (3.1) y (3.2), procedemos así: de (2.4) obtenemos $k_c'(\mu) = \frac{1}{\overline{\overline{S}}}$ y usando (2.3) conseguimos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_c'(\mu) - \frac{1}{\overline{\overline{S}}} = 0 \\ L_c(\mu) - 1 = 0. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Deseamos encontrar μ y c de tal manera que la pareja (μ, c) satisfaga el sistema (3.1). Para ello utilizaremos el siguiente método.

De (2.4) y usando el núcleo $k(z) = \frac{\bar{k}\beta}{2} e^{-\beta|z|}$, tenemos, $k_c(\mu) = \frac{\bar{k}\beta^2}{c(\beta^2 - \mu^2)}$; entonces $k_c'(\mu) = \frac{2\bar{k}\beta^2\mu}{c(\beta^2-\mu^2)^2}$. Por lo tanto, la primera ecuación de (3.1) se transforma en

$$\frac{2\bar{k}\beta^2\mu}{c(\beta^2 - \mu^2)^2} - \frac{1}{\overline{\overline{S}}} = 0,$$

es decir,

$$\frac{2\overline{\overline{S}}\bar{k}\beta^2\mu - c(\beta^2 - \mu^2)^2}{\overline{\overline{S}}c(\beta^2 - \mu^2)^2} = 0.$$

Definamos como:

$$f_c(\mu) := 2\overline{\overline{S}}\bar{k}\beta^2\mu - c(\beta^2 - \mu^2)^2.$$

La segunda ecuación de (3.1) nos conduce a la definicón de $\mathcal{C}(\mu)$, dada en (2.5): $\mathcal{C}(\mu) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\overline{\overline{S}}\bar{k}\beta^2}{(\beta^2-\mu^2)} - \rho\right)$; de esta manera el sistema (3.1) es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_c(\mu) = 0 \\ \frac{1}{\mu}\left(\frac{\overline{\overline{S}}\bar{k}\beta^2}{(\beta^2-\mu^2)} - \rho\right) = c. \end{array} \right.$$

Hemos notado que si μ satisface la ecuación característica para $c = c^*$, entonces μ es un cero de f_c. Para el cálculo de este cero μ^* y la velocidad minimal c^*, generamos dos sucesiones (μ^n), (c^n) tales que para $n \to \infty$, $\mu^n \to \mu^*$ y $c^n \to c^*$, donde los valores iniciales μ^0 y c^0 son dados.

Sea

$$g(\mu) := \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\overline{\overline{S}}\bar{k}\beta^2}{(\beta^2 - \mu^2)} - \rho\right\}$$

y

$$h(\mu, c) = \mu - \frac{f_c(\mu)}{f_c'(\mu)};$$

usaremos el método de Newton en el cálculo de μ^* como cero de $f_c(\mu)$.
El método propuesto puede describirse explícitamente como sigue.
Dado un valor inicial $\begin{pmatrix} \mu^0 \\ c^0 \end{pmatrix}$, definimos

$$\begin{aligned}
\mu_0^{(n+1)} &:= \mu^n \\
\mu_{(k+1)}^{(n+1)} &:= h(\mu_k^{(n+1)}, c^n), \qquad k = 0(1)s \quad (s = s(n)), \\
\mu^{(n+1)} &:= \mu_{(s+1)}^{(n+1)}, \\
c^{(n+1)} &:= g(\mu^{(n+1)}), \qquad n = 0(1)...
\end{aligned}$$

La condición $|c^{(n+1)} - c^{(n)}| < \epsilon$ permite terminar el cálculo con precisión ϵ.
Para ilustrar más explicitamente el método, veamos cómo trabaja éste en las dos primeras iteraciones. Dados μ^0, c^0, tenemos

$$k = 1 \quad \begin{cases} \mu_0^{(1)} = \mu^0 \\ \mu_1^{(1)} = h(\mu_0^{(1)}, c^0) = h(\mu^0, c^0) \\ \mu_2^{(1)} = h(\mu_1^{(1)}, c^0) \\ \vdots \\ \mu_{s+1}^{(1)} = h(\mu_s^{(1)}, c^0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mu^1 &= \mu_{s+1}^{(1)} \\
c^1 &= g(\mu^1)
\end{aligned}$$

$$k = 2 \quad \begin{cases} \mu_0^{(2)} = \mu^1 \\ \mu_1^{(2)} = h(\mu_0^{(2)}, c^1) \\ \mu_2^{(2)} = h(\mu_1^{(2)}, c^1) \\ \vdots \\ \mu_{s+1}^{(2)} = h(\mu_s^{(2)}, c^1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mu^2 &:= \mu_{s+1}^{(2)} \\
c^2 &= g(\mu^2).
\end{aligned}$$

Nota: s depende de cada n y corresponde al número de iteraciones necesarias para lograr la precisión deseada con la sucesiva sustitución.

A manera de ejemplo, retomemos el núcleo $k(z) = \frac{\bar{k}\beta}{2}e^{-\beta|z|}$. Si denotamos con σ^2 la varianza de $k(z)$ $(= 2/\beta^2)$, entonces para $\sigma = 2.3$, $\beta = 0.614875$ y considerando los siguientes datos: precisión $\epsilon = 10^{-9}$, $\mu^0 := 10^{-8}$ y $c^0 := 70$ km^2/año, $\bar{k} = 10.5$ $\rho = 10$, $\bar{\bar{S}} = 2$, se obtienen los siguientes valores:

i	μ_i	c_i
0	0.000000010000000	70.000000000000000
1	0.325866026421097	58.925788197130729
2	0.303479363161509	58.531908905787908
3	0.302589236356443	58.531330353442051
4	0.302587923553161	58.531330352187013
5	0.302587923550313	58.531330352187020

La velocidad minimal es $c^* = 58.53133$ km^2/año y $\mu^* = 0.30258$.
Todas las simulaciones realizadas, con diferentes valores de $\mu \in J_c := \left(\max\left\{-\frac{\varrho}{c}, -\beta\right\}, \beta\right)$ y diferentes velocidades, arrojan el mismo resultado.

4. Convergencia del método

Para cada n, después de fijar c^{n-1} se calcula μ^n por el método de Newton. Esto quiere decir que la sucesión $\mu_k^{(n)}$, $k = 1(1)\ldots$ converge cuadráticamente. Para $r = 1(1)\ldots$, definimos:

$$h^{[r+1]}(\mu, c) := h(h^{[r]}(\mu, c), c),$$

siendo $h^{[1]}(\mu, c) := h(\mu, c)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mu^{n+1} &= h^{[s+1]}(\mu^n, c^n), \\ c^{n+1} &= g(\mu^{(n+1)}), \quad n = 0, (1)\ldots \end{aligned}$$

Eligiendo s suficientemente grande, podemos suponer que s no depende de n. En tal caso el método arroja una sucesión de vectores

$$\begin{pmatrix} \mu^{n+1} \\ c^{n+1} \end{pmatrix} = \Phi(\mu^n, c^n) := \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} (\mu^n, c^n),$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mu, c) &:= h^{[r]}(\mu, c), \quad r > s \\ \varphi_2(\mu, c) &:= g(\varphi_1(\mu, c)). \end{aligned}$$

Veamos que esta sucesión converge localmente. Para ello probemos que $\|\phi'(\mu^*, c^*)\|_\infty < 1$, donde

$$\phi'(\mu^*, c^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial c} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial c} \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{aligned} h^{[r]} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} \mu \\ c \end{pmatrix} &\longrightarrow h^{[r]}(\mu, c) \end{aligned}$$

es tal que $h^{[r+1]}(\mu, c) = h(h^{[r]}(\mu, c), c)$, entonces:

$$\begin{aligned} h^{[2]}(\mu, c) &= h(h(\mu, c), c) \\ &= h(\mu - \frac{f_c(\mu)}{f_c'(\mu)}, c) \\ &= \mu - \frac{f_c(\mu)}{f_c'(\mu)} - \frac{f_c(\mu - \frac{f_c(\mu)}{f_c'(\mu)})}{f_c'(\mu - \frac{f_c(\mu)}{f_c'(\mu)})} \\ &= h(\mu, c) - \frac{f_c(h(\mu, c))}{f_c'(h(\mu, c))}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} h^{[2]} &= \frac{\partial h}{\partial \mu} - \frac{[f_c'(h)]^2 \frac{\partial h}{\partial \mu} - f_c''(h) f_c(h) \frac{\partial h}{\partial \mu}}{[f_c'(h)]^2} \\ &= \frac{f_c''(h) f_c(h) \frac{\partial h}{\partial \mu}(\mu, c)}{[f_c'(h(\mu, c))]^2}, \end{aligned}$$

entonces $\frac{\partial}{\partial \mu} h^{[2]}(\mu^*, c^*) = 0$.
Ahora calculemos $\frac{\partial}{\partial c} h^{[2]}(\mu^*, c^*)$. Para facilitar la notación llamamos $\theta_\mu(c) := f_c(\mu)$. Tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial c} f_c(\mu) = \theta_\mu'(c) = -(\beta^2 - \mu^2)^2;$$

como $h(\mu, c) = \mu - \frac{f_c(\mu)}{f_c'(\mu)}$, entonces

$$\frac{\partial h}{\partial c} = -\frac{\theta_\mu'(c) f_c'(\mu) - f_c(\mu)[\frac{\partial}{\partial c} f_c'(\mu)]}{[f_c'(\mu)]^2}.$$

Luego

$$\frac{\partial h}{\partial c}(\mu^*, c^*) = -\frac{\theta'_{\mu^*}(c^*)}{f'_{c^*}(\mu^*)} = \frac{(\beta^2 - \mu^*)^2}{f'_{c^*}(\mu^*)}$$

En el caso de $h^{[2]}(\mu, c)$ tenemos que

$$h^{[2]}(\mu, c) = h(h(\mu^*, c^*), c^*) = h(\mu^*, c^*) = \mu^*,$$

y además

$$\begin{aligned}\frac{\partial h^{[2]}}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c}[h(h, c)] &= \left(\frac{\partial h}{\partial c}(h, c)\right)\left(\frac{\partial h}{\partial c}(\mu, c)\right) \\ &= \frac{(\beta^2 - h^2)^2}{f'_c(h)} \frac{(\beta^2 - \mu^2)^2}{f'_c(h)},\end{aligned}$$

entonces en (μ^*, c^*) tenemos:

$$\frac{\partial h^{[2]}}{\partial c} = \left(\frac{\partial h}{\partial c}\right)^2.$$

Puesto que $h^{[r+1]} = h \circ h^{[r]}$ para $r \geq 1$, usando inducción sobre r, se tiene que $\frac{\partial h^{[r+1]}}{\partial c} = \left(\frac{\partial h}{\partial c}\right)^{r+1}$, luego

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu}\phi_1(\mu^*, c^*) = \frac{\partial}{\partial \mu}h^{[r]}(\mu^*, c^*) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial c}\phi_1(\mu^*, c^*) = \left[\frac{\beta^2 - \mu^{*2}}{f'_{c^*}(\mu^*)}\right]^{r+1} \quad \text{para } r \geq 1. \end{cases}$$

Ahora calculemos $\frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu}$ y $\frac{\partial \varphi_2}{\partial c}$:

$$\varphi_2 = g(\varphi_1)$$

entonces, evaluando en (μ^*, c^*) se sigue:

$$\text{(4.2)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu}\varphi_2 &= g'(\varphi_1)\frac{\partial}{\partial \mu}\varphi_1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial c}\varphi_2 &= g'(\varphi_1(\mu^*, c^*))\frac{\partial}{\partial c}\varphi_1 \\ &= g'(\mu^*)\frac{\partial}{\partial c}\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

porque $g'(\mu^*) = 0$, ya que μ^* es un mínimo local de g.

BIBLIOTECA

De (4.1) y (4.2) observamos que basta probar que $\frac{\partial}{\partial c}\varphi_1(\mu^*, c^*) < 1$ para concluir que:

$$\|\phi'(\mu^*, c^*)\|_\infty < 1.$$

Puesto que $\frac{\partial h^{[r+1]}}{\partial c}(\mu^*, c^*) = \frac{(\beta^2-\mu^2)^2}{f'_{c^*}(\mu^*)}$ y $f'_c(\mu^*) = 2\bar{\bar{S}}\beta^2\bar{k} + c^* 4(\beta^2 - \mu^{*2})\mu^*$ y teniendo en cuenta que $\mu^* \in J_c = \left(\max\left\{-\frac{\rho}{c}, -\beta\right\}, \beta\right)$ y que a partir de $L_c(\mu) = 1$ se tiene que

$$\bar{\bar{S}}\bar{k}\beta^2 = c(\beta^2 - \mu^2)(\mu + \frac{\rho}{c}),$$

tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{(\beta^2-\mu^2)^2}{f'_{c^*}(\mu^*)} &= \frac{(\beta^2-\mu^2)^2}{2c^*(\beta^2-\mu^{*2})(\mu^* + \frac{\rho}{c^*}) + 4c^*\mu^*(\beta^2-\mu^2)} \\ &= \frac{\beta^2 - {\mu^*}^2}{6c^*\mu^* + 2\rho}.\end{aligned}$$

De $6c^*\mu^* + 2\rho > 1$ y $1 > (\beta^2 - \mu^2) > 0$ se sigue que

$$\frac{(\beta^2 - {\mu^*}^2)}{f'_{c^*}(\mu^*)} < 1,$$

con lo cual se completa la demostración.

Nota: Para los valores usados en el ejemplo, $\frac{\beta^2 - {\mu^*}^2}{6c^*\mu^* + 2\rho} = 0.00226914$.

El método presentado aquí puede ser usado para resolver sistemas no lineales de la forma:

$$\begin{cases} f_y(x) = 0 \\ g_x(y) = 0. \end{cases}$$

Ilustraremos el funcionamiento del método a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo. Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} f_y(x) &:= 5y \cos y + x^3 - x - 8 = 0 \\ g_x(y) &:= x^2 y - y^2 x + 3x - 2 = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Partiendo de $x_0 := 2$ y $y_0 := 0$ como valores iniciales se obtiene la siguiente sucesión, la cual converge para $i = 13$ con una precisión de 10^{-9}

i	x_i	y_i	$g_x(y)$	$f_y(x)$
0	2.000000000000000	0.000000000000000	-4.000000000000000	-2.000000000000000
1	2.166312747397789	2.885932011430889	-0.000000000000001	-13.960644744104986
2	2.919330849743234	3.568109080774692	-0.000000000000002	-2.281609572063665
3	3.009287583926623	3.649251870777479	-0.000000000000000	0.297125016702324
4	2.997888044834415	3.638966653529805	-0.000000000000000	-0.045190787992642
5	2.999627647680552	3.640536151533543	-0.000000000000001	0.006753877979848
6	2.999367792790700	3.640301704958408	-0.000000000000001	-0.001012122457329
7	2.999406737096054	3.640336841305664	0.000000000000002	0.000151613378651
8	2.999400903404702	3.640331578029608	0.000000000000001	-0.000022712674858
9	2.999401777331288	3.640332366504095	0.000000000000002	0.000003402476259
10	2.999401646412596	3.640332248386565	0.000000000000003	-0.000000509709241
11	2.999401666024921	3.640332266081207	0.000000000000001	0.000000076357175
12	2.999401663086890	3.640332263430455	-0.000000000000001	-0.000000011438709
13	2.999401663527022	3.640332263827552	0.000000000000001	0.000000001713586

Observamos que la solución aproximada al sistema (4.3) es $x = 2.999401663527022$ y $y = 3.640332263827552$. La escogencia de los valores iniciales se hace siguiendo criterios similares a los usados para el tradicional método de Newton.

Referencias

1. D. G Aronson, *The asymptotic speed of propagation of a simple epidemic* **14** (1978), Research Notes in Mathematics, 1–23.
2. D. G Aronson and H. F. Weinberger, *Multidimensional nonlinear diffusio arising in populations genetics.* **30** (1978), Advances in Mathematics, 33–76.
3. C. Castillo, F. Brauer, *Modelos de la Propagación de Enfermedades Infecciosas*, Monografia Cornell University, 1994.
4. O. Dieckmann and H. G. Karper, *On the bounded solutions of a nonlinear convolutions equations* **2**, Non Linear Analysis, Theory, Methods and Aplications, 721–737.
5. O. Dieckmann, *Thresholds and traveking waves for the geographical spread of infection*, J. Math Biology **6** (1978), 109–130.
6. O. Dieckmann, *Run for your life: A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic*, J. Diff. Eq **33** (1979), 58–73.
7. H. Estrada, I. Mantilla, *Estudios de los efectos de las terapias antivirales para el tratamiento del SIDA*, Rev. Fac. Uni. Nal. Colombia **5(1)** (1997), Medellín, 5–24.
8. C. F. Gerald and P. O. Wheatley, *Applied Numeriacal Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
9. P. C. Fife and J. B. MacLeod, *Ahe aproach of solutions of nonlinear diffusion equations to traveling front solutions* **65** (1977), Arch. Rational Mech. Anal, 335–361.
10. P. C. Fife, *Asymptotic state for equations and reactions and diffusion* **84** (1978), Bull. Amer. Math. Soc, 693–726.

11. H. O. Herr, *Numerische Behandlung Deterministischer Epiedemiemodelle,*, Doktorarbeit, J. Gutenberg-Universität, Mainz, 1987.
12. Y. Hososno, *Travelling wave solutions for a simple diffusive epidemic model*, China-Japan Symposium on Reaction Diffusion Equations and their Applicationas and Computational Aspects (1997), World Scientific Publishing Co Pte ltd, Singapour, 23–36.
13. D. G. Kendall, *Mathematical models of the spread of infection*, In: Mathematics and Computer Science in Biology (1965).
14. W. O. Kermack and A. G. Mckendrick, *A contribution to the mathematical theory of epidemics*, Proc. Roy. Soc. A **115** (1927), 700–721.
15. I. Mantilla, *Un modelo de propagación espacio-temporal de una epidemia*, Rev. Fac. Uni. Nal. Colombia **1(3)** (1993), Medellín, 33–45.
16. I. Mantilla, *Sobre la velocidad asintótica de propagación de una epidemia*, Rev. Colombiana de Mátematicas **27** (1993), 55–65.
17. J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, 1989.
18. J. M. Ruiz, *Estudio Numérico de un Modelo Epidemiologico de Propagación Espacio Temporal*, Tesis de Maestria en Matemática (1998), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
19. K. Schumacher, *Travelling front solutions for integro-differential equations (I)*, J. reine angew. Math **316** (1980(a)), 54–70.
20. K. Schumacher, *Travelling front solutions for integro-differential equations (II)*, Biological Growth and Spread, Lecture Notes in Biomathematics (Eds. E. Jäger, H. Rost, and P. Tautu) **38** (1980(b)), Springer-Verlag.
21. J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis Second edition*, Springer-Verlag, New York, 1993.
22. H. R. Thieme, *Asymptoptic estimates of the solutions of nonlinear integral equations and asymptotic speed for the spread of population*, J. reine angew. Math **306** (1979), 94–121.
23. H. F. Weinberger, *Asymptoptic behavior of a model in population genetics* **648** (1978), Springer-Verlag.