Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen VII No. 2 (2000), pp. 51–59

UNO ES INFINITO

JESÚS HERNANDO PÉREZ(*)

RESUMEN. Se presenta una propuesta para manejar, matemáticamente, las palabras 'infinito' y 'número', distinguiendo dos situaciones cualitativamente diferentes: pluralidad y cantidad.

Palabras clave: Pluralidad, cantidad, número, ordinal, cardinal, infinito, infinitamente pequeño, infinitamente grande, analítico,sintético.

1. Introducción

La reflexión sobre el infinito, en la cultura occidental, tiene una tradición que se remonta hasta Zenón de Elea; sus famosas aporías, sobre lo uno y lo múltiple y sobre el movimiento, pueden ser interpretadas como pensamientos en contra de la regresión infinita. La tradición Aristotélica, vigente hasta finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX, impuso la teoría del infinito potencial. Según esta teoría pensar el infinito equivale a utilizar una construcción mental que permite pasar de un estado dado o de una situación dada a la siguiente de manera indefinida. El matemático alemán Georg Cantor cambió completamente esta manera de pensar e introdujo, al lado de la teoría de conjuntos, es decir al lado de las ideas de 'elementos' y 'pertenencia', la idea de infinito actual.

Sin embargo, el infinito en el sentido de Zenón estaba también muy ligado a la 'cantidad infinitamente divisible', idea que en manos de Leibniz se convirtió en la de 'cantidades infinitamente pequeñas'. Este pensamiento tiene como uno de los precursores más importantes al filósofo Demócrito para quien una circunferencia es un polígono regular de infinitos lados infinitamente pequeños.

(*) Texto de la conferencia inaugural en el Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, efectuado en Bogotá, diciembre de 2000. Jesús Hernando Pérez, Profesor Asociado Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
e-mail: jhpalcazar@multiphone.net.co.

Leonhard Euler, seguidor de Leibniz en la concepción del cálculo, estableció el infinito actual mucho antes que Cantor; para él, existían cantidades infinitamente grandes Ω y cantidades infinitamente pequeñas $1/\Omega$, que poseen, según la propuesta de Leibniz, propiedades análogas a las de las cantidades usuales de la Geometría y de la Física.

Hay pues dos tipos de infinito: el de la 'pluralidad' y el de la 'cantidad', y cada uno de ellos puede ser visto 'potencialmente' ó 'actualmente'. La concepción del infinito cantidad en la obra de Cauchy corresponde al infinito cantidad visto potencialmente.

En estas notas haremos una presentación muy general de estas maneras de entender el infinito contrastándolas con la correspondiente noción de finitud.

2. El infinito como pluralidad

La pluralidad esta asociada a las colecciones y por lo tanto a las estructuras matemáticas conjuntistas. El 'número' es el resultado de clasificar estructuras; por lo tanto, existen diferentes tipos de números: uno por cada tipo de estructura y cada teoría (sistema de axiomas) dentro de este tipo.

La idea es la siguiente: dado un tipo τ de estructuras matemáticas, consideremos la clase ε_τ de todas las estructuras de tipo τ y dentro de ella la clase $\varepsilon_\tau T$ de las estructuras que satisfacen una teoría T (conjunto de axiomas). En esta clase se considera entonces la noción de isomorfismo, la cual clasifica (divide en clases de equivalencia) la clase $\varepsilon_\tau T$. Numerar esta clase significa:

1. Encontrar en cada una de estas clases una estructura 'típica' o 'canónica' (no explico en qué sentido son típicas o canónicas).
2. Asociarle a cada estructura canónica un número o un sistema de números que la identifica.
3. Establecer entre estos números o sistemas de números operaciones y relaciones que representen las operaciones y las relaciones entre las estructuras en $\varepsilon_\tau T$.

Los ejemplos trabajados por Cantor fueron los siguientes: el tipo en el cual no hay operaciones, ni relaciones, y el tipo en el cual se tiene una relación binaria con las propiedades de un buen orden. Estas investigaciones condujeron a Cantor a las nociones de número cardinal y de número ordinal respectivamente.

Recordemos rápidamente el ejemplo de estructuras de buen orden.

Un buen orden es una estructura constituida por un conjunto X y una relación binaria $\leq_x$ sobre X, de tal manera que:

1. $\leq_x$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva (orden).
2. Para cada subconjunto no vacío Y de X, existe en Y un elemento y_0 tal que $y_0 \leq y$ para todo $y \in Y$ (buen orden).

Dos conjuntos bien ordenados $(X, \leq_x)$ y $(Y, \leq_y)$ son isomorfos, si y solo si, existe una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que, para cada $x, y \in X$ si $x \leq_x y$ entonces $f(x) \leq_y f(y)$.

Con estas nociones queda constituida y clasificada la clase ε_{b0} de los conjuntos bien ordenados. Esta clase también queda numerada; en efecto, Cantor descubrió los números ordinales, los cuales, al comienzo no eran otra cosa que simples abstracciones. Posteriormente Johann von Neumann introdujo los ordinales como conjuntos ordenados canónicos.

Recordemos esta definición:

1. Un conjunto X es transitivo si y solo si para todo $y \in X$, si $x \in y$ entonces $x \in X$.
2. Un ordinal es un conjunto transitivo α tal que si en α se considera la relación $\leq_\alpha$ definida en la siguiente forma:

$$x \leq_\alpha y \text{ sii } x = y \text{ ó } x \in y$$

α es bien ordenado.

El teorema fundamental de la teoría de conjuntos bien ordenados es el siguiente:

Dado un conjunto bien ordenado $(X, \leq_x)$ existe un único número ordinal $(\alpha, \leq_\alpha)$ tal que $(X, \leq_x)$ es isomorfo a $(\alpha, \leq_\alpha)$.

De esta manera, los ordinales numeran la clase de conjuntos bien ordenados ε_{b0}.

Algunos ejemplos de ordinales son los siguientes:

$0 = \emptyset,$
$1 = \emptyset,$
$2 = 0, 1,$
$3 = 0, 1, 2, ...,$
$\omega = 0, 1, 2, ...,$
$\omega + 1 = 0, 1, 2, .., \omega,$
$\omega + 2 = 0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1.$

Todas las estructuras matemáticas tienen un dominio **X** sobre el cual están definidas las operaciones y las relaciones que constituyen la estructura; por esta

razón, Cantor estudió la clasificación de la clase Conj de todos los conjuntos: un isomorfismo entre dos conjuntos X, Y es, simplemente, una función biyectiva entre $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$. El resultado de clasificar la clase de todos los conjuntos es la cardinalidad y los números cardinales. La definición de número cardinal resulta un poco más compleja que la de número ordinal: Depende de si se acepta o no el axioma de elección, se utiliza el siguiente principio:

Todo conjunto se puede bien ordenar.

En esta forma, se define el cardinal de $\mathbf{X}$ como el primer ordinal correspondiente a los buenos órdenes sobre $\mathbf{X}$. Así pues, un cardinal es un tipo especial de ordinal.

Esta diferencia es otro de los descubrimientos fundamentales de Cantor: ω y $\omega + 1$ son números ordinales diferentes que tienen el mismo cardinal, puesto que existe una función biyectiva entre ω y $\omega + 1$. Por supuesto, esta función no respeta el orden.

Hay todavía una complicación adicional en la teoría de cardinales: como los cardinales son ordinales, los primeros se pueden ordenar totalmente y cada cardinal α tiene un siguiente α^+. Ahora bien, según otro teorema de Cantor, muy conocido, el cardinal de todo conjunto A es estrictamente menor que el cardinal de $\mathcal{P}(A)$ y entonces es posible plantear el siguiente problema:

$$¿card(A)^+ = card(\mathcal{P}(A))?$$

Este problema no pudo ser resuelto por Cantor; ni siquiera el siguiente caso particular:

$$¿card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = card(\mathbb{N})^+?$$

(Usando modelos internos y forcing, Gödel y Cohen demostraron la independencia de la afirmación anterior.)

Todos los infinitos de la pluralidad tienen que ver con la siguiente definición de 'infinito cardinal'.

Un conjunto X es infinito si existe un 'subconjunto propio' $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{X}$ de tal manera que $card(\mathbf{X}) = card(\mathbf{Y})$.

$\mathbf{Y}$ es subconjunto propio de $\mathbf{X}$ si:

a. Para todo $x \in \mathbf{Y}$, $x \in \mathbf{X}$.
b. Existe $x \in \mathbf{X}$ tal que $x \notin \mathbf{Y}$.

Es claro que el concepto de 'subconjunto propio' depende de la relación '$\in$' de pertenencia.

Un conjunto será finito si no es infinito. Hay otras definiciones de 'finito' no necesariamente equivalentes a la que aquí se ha dado.

Podemos entonces, en general, intentar definir el significado de infinito para un tipo τ de estructuras y una teoría $\mathbf{T}$:

Una estructura $\mathfrak{A} = (A, ...)$ que satisface la teoría $\mathbf{T}$ es $\mathbf{T}$-infinita si existe una '$\mathbf{T}$-subestructura propia' $\mathfrak{B} = (B, ...)$ tal que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas.

Aquí, '$\mathfrak{B}$ es $\mathbf{T}$-subestructura propia de $\mathfrak{A}$' significa lo siguiente:

1. B es un subconjunto *propio* de A.
2. Las relaciones y operaciones en $\mathfrak{B}$ son restricciones a B de las operaciones y relaciones en $\mathfrak{A}$.
3. $\mathfrak{B}$ satisface los axiomas de $\mathbf{T}$.

Por ejemplo, $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ es una T-subestructura propia de $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ siempre y cuando la teoría T no sea particularmente rica y no tenga fórmulas como $\forall x \exists y(y + y = x)$; (pares,$\leq$) es una T-subestructura propia de $(\mathbb{N}, \leq)$ y de $(\mathbb{Z}, \leq)$ y de $(\mathbb{R}, \leq)$ (de nuevo si T es una teoría con pocos axiomas).

Para el caso de los conjuntos bien ordenados, ω, $\omega + 1$ son 'infinitos'. En efecto, (pares, $\leq$) es una subestructura propia de $(\omega, \leq_\omega)$ y los dos son isomorfos; (pares $\cup\, \omega$, $\leq$) es una subestructura propia de $(\omega + 1, \leq)$ y los dos son isomorfos.

Aplicando esta 'noción de infinito' a los grupos abelianos finitamente generados, y recordando el teorema de clasificación de estas estructuras, tenemos lo siguiente:

1. Todo grupo abeliano finitamente generado es isomorfo a un único producto cartesiano finito de grupos de la forma $\mathbb{Z}$ ó $\mathbb{Z}/(p^e)$ donde $e \in \mathbb{N}$, $e \geq 1$ y $p \in \mathbb{N}$ es un número primo.
2. Lo anterior significa que cada grupo abeliano finitamente generado determina, univocamente, varios números: n = número de veces que aparece $\mathbb{Z}$ en el producto cartesiano. $p_1, ..., p_n$ los números primos que intervienen; para cada $i = 1, ..., m$ una tupla $(e_{11}, ..., e_{1n})$ de números naturales mayores o iguales a 1 y tales que $e_{11} \leq ... \leq e_{1n}$. En otras palabras, el grupo abeliano canónico correspondiente seria:

$$Z^n \times Z/(p_1^{e_{11}}) \times ... \times Z/(p_1^{e_{1i1}}) \times ... \times Z/(p_m^{e_{m1}}) \times ... \times Z/(p_n^{e_{mim}})$$

3. De acuerdo a la definición de infinito, el grupo $\mathbb{Z}$ sería un ejemplo de infinito; en efecto, (pares, $+$) es un subgrupo propio de $(\mathbb{Z}, +)$ y estos dos grupos son isomorfos. En esta forma, todo grupo abeliano canónico finitamente generado que contenga como factor a $\mathbb{Z}$ es infinito. Si un grupo canónico no tiene como factor a $\mathbb{Z}$, será entonces finito.

4. Según lo anterior, a los grupos de la forma $\mathbb{Z}^n$ deberíamos asociar el número natural n, que en este caso estaría representado un infinito; pongamos por caso, 1 representa al infinito $\mathbb{Z}$.
5. El número 3 aparece doblemente: 3 como finito corresponde al grupo canónico $\mathbb{Z}/(3)$ o a los grupos canónicos $\mathbb{Z}/(p^3)$ donde p es un número primo cualquiera; y como infinito, correspondiendo al grupo $\mathbb{Z}^3$.
6. 4 aparece como finito en los grupos de la forma $\mathbb{Z}/(p^4)$ donde p es un número primo arbitrario, y como infinito en el grupo Z^4.

El panorama anterior es bastante diferente en el caso de los espacios vectoriales finitamente generados sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Los elementos canónicos, en este caso, son los espacios de la forma $\mathbf{K}^n$ y *todos ellos son finitos independientemente del cardinal de* $\mathbf{K}$.

3. El infinito como cantidad

El infinito como cantidad tiene dos interpretaciones: la analítica y la sintética. En estas notas centraremos la atención en la versión analítica debida al matemático Abraham Robinson ($\cong$ 1950); la versión sintética, originada en los trabajos de William Lawvere ($\cong$ 1963), por razones de espacio, no será presentada en este trabajo.

El infinito cantidad fue explicado por la teoría conocida con el nombre de 'Análisis no estándar' desarrollada, en sus elementos básicos, por el matemático Abraham Robinson. Esta teoría tuvo antecedentes, muy importantes, en la obra pionera de Leopoldo Löwenheim y Thoralf Skolem; estos matemáticos desarrollaron una teoría de conjuntos no estándar, que con el tiempo se ha venido convirtiendo, después de la obra de Paul Cohen, en una herramienta importante de la teoría de conjuntos.

El aporte de Robinson se basa en una propiedad fundamental de los lenguajes de primer orden: son compactos. Esto ultimo significa lo siguiente:

Un conjunto $\mathbf{T}$ de sentencias en un lenguaje de primer orden $\mathbf{L}_\tau$ es consistente (es decir tiene un modelo), si y solamente si toda parte finita de $\mathbf{T}$ tiene un modelo. ('Primer orden' significa que cuantificamos sobre variables que se refieren a individuos (no a subconjuntos) de un dominio dado; 'compacidad' vale en *primer orden con cuantificación finitística*).

Apliquemos este teorema a la teoría de primer orden de los números reales incrementada por las proposiciones $0 < \varsigma < 1/n, \quad n = 1, 2, \ldots$ donde ς es un símbolo nuevo. Más explícitamente, consideremos el lenguaje de primer orden en el cual se cuenta con un símbolo por cada número real, uno por cada función y uno por cada relación. En este lenguaje escogemos todas las

sentencias α que son verdaderas en $\mathbb{R}$ cuando se interpreta cada símbolo como el objeto correspondiente. Llamamos $\mathbf{T}(\mathbb{R})$ al conjunto de estas sentencias. A continuación escogemos un símbolo de constante ς y consideremos la teoría $\mathbf{T}$ como la reunión de $\mathbf{T}(\mathbb{R})$ con el conjunto de sentencias $\{0 < \varsigma < 1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Esta teoría $\mathbf{T}$ es consistente pues cualquier subconjunto finito de $\mathbf{T}$ se verifica en $\mathbb{R}$. Siendo consistente la teoría $\mathbf{T}$ existe un conjunto $\mathbb{R}^*$ (llamado dominio hiperreal) en el cual todos los símbolos de $\mathbf{T}$ se interpretan y todas las sentencias de $\mathbf{T}$ son verdaderas con esta interpretación; este conjunto no puede ser igual a $\mathbb{R}$ porque aquí no hay cantidades infinitamente pequeñas.

En $\mathbb{R}^*$ se interpretan todos los símbolos de $\mathbf{T}$, por lo tanto, se interpretan todos los símbolos de $\mathbf{T}(\mathbb{R})$ y la constante ς. Ahora bien, para cada número real, para cada función real y para cada relación real hay un símbolo en el lenguaje de $\mathbf{T}(\mathbb{R})$ entonces, en $\mathbb{R}^*$ existen objetos de la misma naturaleza que los interpretan. En esta forma, en $\mathbb{R}^*$ existe un individuo por cada número real y una relación por cada relación real, respetando las respectivas aridades.

Todos estos elementos se notarán con el mismo símbolo con el que se notan en $\mathbb{R}$. Así, si e es el nombre de un número real (el número de Euler), este será, también, el nombre del correspondiente elemento de $\mathbb{R}^*$; si $<$ es el nombre de la relación binaria de orden estricto en $\mathbb{R}$ este será el nombre de la correspondiente relación binaria en $\mathbb{R}^*$. Esta ultima relación tiene las mismas propiedades de primer orden que posee la misma relación en $\mathbb{R}$. En efecto, la sentencia:

$$\forall_x \forall_y \forall_z (x < y \ \wedge \ y < z \Rightarrow x < z)$$

es verdadera en $\mathbb{R}$ y por lo tanto pertenece a $\mathbf{T}(\mathbb{R})$, lo cual implica que la respectiva relación en $\mathbb{R}^*$ también satisface esta sentencias.

Veamos el caso de la función logaritmo natural.

En primer lugar, si dos números reales r_1, r_2 son diferentes, la sentencia $r_1 \neq r_2$ es verdadera en $\mathbb{R}$ y por lo tanto en $\mathbb{R}^*$ lo cual permite identificar $\mathbb{R}$ como un subconjunto de $\mathbb{R}^*$; así, 0, 1 son elementos diferentes de $\mathbb{R}^*$. En $\mathbb{R}^*$ existen las operaciones $+$ y $\cdot$ y también la función exponencial, con los mismas propiedades de primer orden que las correspondientes en $\mathbb{R}$. Además, cada una de estas funciones hiperreales extiende la función real análoga, y algo similar sucede con las relaciones. Por ejemplo si r_1, r_2 son números reales que satisfacen la ecuación: $r_1 = e^{r_2}$ entonces se tendrá una sentencia verdadera en $\mathbb{R}$ que por lo tanto es válida en $\mathbb{R}^*$.

Para el caso de la función logaritmo natural, simbolizada mediante Ln, tendríamos las siguientes sentencias verdaderas en $\mathbb{R}$ y por lo tanto en $\mathbb{R}^*$:

$$\forall x (x > 0 \Rightarrow \exists! y \ (y = Ln\ x))$$

$$Ln\ 1 = 0,\ Ln(e) = 1,$$
$$\forall x \forall y (x > 0 \ \text{ y } \ y > 0 \Rightarrow Ln(xy) = Ln(x) + Ln(y)),$$
$$\forall x (Ln(e^x) = x),$$
$$\forall x (x > 0 \Rightarrow e^{Ln\ x} = x)$$

En este caso, también, la función 'logaritmo natural' hiperreal es una extensión de la función 'logaritmo natural' real.

Los subconjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ son relaciones 1- arias en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, existen subconjuntos $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$ de $\mathbb{R}^*$ que satisfacen las mismas propiedades de primer orden que los correspondientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Asi, $\mathbb{Z}^*$ es un anillo conmutativo y $\mathbb{Q}^*$ es un cuerpo. $\mathbb{Q}^*$ es denso en si mismo y denso en $\mathbb{R}^*$ pues estas son propiedades de primer orden:

$$\forall x \forall w ((Q_x \wedge Q_w \wedge (x < w)) \Rightarrow \exists z\ (Q_z \wedge (x < z) \wedge z < w)));$$
$$\forall x \forall w ((x < w) \Rightarrow \exists z\ (Q_z \wedge y(x < z) \wedge (z < w)))$$

Interpretando la constante c en $\mathbb{R}^*$ se tendrá un elemento positivo más pequeño que cualquier número real positivo. Estas son las cantidades infinitamente pequeñas previstas por Demócrito, Leibniz y Euler; si $r \in \mathbb{R}$, rc, c^2, c^3, ... son hiperreales infinitamente pequeños. Pero entonces $1/c$, $1/c^2$ y $1/rc$ serán cantidades infinitamene grandes. También existen cantidades infinitas negativas: $-c$, $-c^2$, $-1/c$, $-1/cr$, etc.

Estos infinitos son de naturaleza diferente a los infinitos de la pluralidad: en la pluralidad no hay infinitesimales; la adición entre cantidades infinitas es conmutativa, también lo es la multiplicación; en la pluralidad ordinal esto deja de ser cierto: $\omega + 1 \neq 1 + \omega$, $2 \cdot \omega \neq w \cdot 2$, en el caso de ordinales.

Hay, también, cantidades naturales enteras y racionales infinitas. Para el caso de los enteros esto se sigue de la siguiente propiedad de primer orden:

$$\forall x \exists! y\ (Zy \wedge (y \leq x) \wedge (x < y + 1))$$

En el dominio estándar éste número se denomina 'la parte entera de x'. En el caso hiperreal se tendrá entonces que cada número hiperreal α determina un único hiperentero n tal que $n \leq \alpha < n + 1$; este hiperentero n denomina 'la parte hiperentera del hiperreal α'. Si Ω es hiperreal infinito positivo, su parte hiperentera será, entonces, un hiperentero infinito. Si Ω es hiperentero infinito y $n \in \mathbb{N}$, $\Omega + n$ y $\Omega - n$ serán hiperenteros infinitos; también lo serán Ω^n, $\Omega + \Omega, ..., \Omega^\Omega$, etc.

Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión, esta determina una hipersucesión $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^*$ que es una extensión de la sucesión dada. De otra parte, es posible demostrar el siguiente teorema: Para un número real L, $L = \lim_{n \to \infty} f(n)$, si y sólo si,

para cada hipernatural infinito Ω, $L - f(\omega)$ es una cantidad infinitesimal (esto se denota $L \approx f(\omega)$ y se lee 'L es infinitamente próximo a $f(\Omega)$'). Esto significa que la definición de límite en el sentido de Cauchy-Weirstrass es completamente equivalente a la de Euler. En esta forma, el infinito como cantidad potencial es completamente equivalente al infinito como cantidad actual: acercarse 'tanto como se quiera' a L equivale a $L \approx f(\Omega)$, donde Ω es un número natural infinito (actual).

4. Conclusión

Para comprender de una manera más completa el tema del infinito es indispensable tener en cuenta la versión 'sintética' de las teorías matemática. En este sentido, ¡lo dicho en este escrito resulta muy incompleto! 'Finito', 'Infinito' son conceptos que pueden definirse sintéticamente en sus versiones para la 'pluralidad' y para la 'cantidad'.

Las definiciones sintéticas de estos conceptos ofrecen otra panorámica de la dualidad finito-infinito. Para el caso de la cantidad, por ejemplo, la versión sintética de lo infinitamente pequeño da origen a los infinitesimales nilpotentes que no aparecen en la teoría analítica de Robinson.

A pesar de las limitaciones, lo dicho en este escrito es suficiente para formarse una idea inicial, muy general, sobre este tema tan fundamental: la dualidad finito-infinito, su relación con los números o sistemas de números, y la diferencia entre pluralidad y cantidad.

Referencias

[1] Anglin W., *The philosophy of mathematics. The invisible art.* The Edwin Mellen Press. Lewiston, Lampeter. 1997.
[2] Bolzano B., *Paradoxes of the infinity.* D. Reidel Publishing Company. Boston, Lancaster, 1983.
[3] Adamek J., *Theory of mathematical structures.* Routledge and Keagan, London, 1950.
[4] Dauben J., *Georg Cantor.* Harvard University Press, Cambridge Mass., 1979.
[5] Dauben J., *Abraham Robinson.* Princeton University Press, New Jersey, 1995.
[6] Dehornoy P., et alt., *Ideas del infinito.* Investigación y ciencia, 23. Edición en español de Scientific American.
[7] Hallet M., *Cantorian set theory and limitation of size.* Claredon Press, Oxford, 1984.
[8] Lavine S., *Understanding the infinite.* Harvard University Press, Cambridge Mass., 1994.
[9] Robinson A., *Non-standar Analysis.* Princeton Univ. Press, Princeton New Jersey, 1974.