EXAMENES UNIVERSITARIOS

1. Examen final de Cálculo I (01511) (2a.opción). Ingenierías.

1.a) Demostrar que

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^s}\,dx = \frac{2^{1-s}-1}{1-s}, \quad s \neq 1;$$

y

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log 2.$$

b) Demuestre que

$$\lim_{s\to 1} \frac{2^{1-s}-1}{1-s} = \log 2$$

Si f es una función continua en el intervalo $a \leq t \leq b$, y si g es una función derivable tal que su recorrido esté contenido en el intervalo $a \leq t \leq b$, mostrar que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right) = f(g(x))g'(x).$$

Si f es continua en el intervalo $a \leq t \leq b$, y si g, h, son son funciones derivables cuyos recorridos estén contenidos en dicho intervalo, demostrar que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\right) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

3) Sin calcular las áreas respectivas, es decir, si el área comprendida por las curvas $y = x^3 + x^2$ e $y = x^3 + 1$, es igual al área de la región comprendida por las curvas $y = x^2$ e $y = 1$.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional, Enero de 1.967

2. Examen final de Cálculo avanzado (1527) (1a. opción).

Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ($a_i \in C$, $a_n \neq 0$) un polinomio de grado n. Un número complejo u se dice un <u>cero de</u> P <u>si</u> $P(u) = 0$; diremos que u es un cero de orden ρ (ρ entero ≥ 1) si $P(z) = (z-u)^\rho Q(z)$, donde Q es un polinomio de grado menor que el de P y tal que $Q(u) \neq 0$. (Obsérvese que $P(u) = 0$.)

a) Mostrar que si u es un cero de P de orden $\rho > 1$, entonces u es un cero de P' de orden $\rho-1$, y que si $\rho = 1$, entonces u no es cero de P'. Deducir entonces que si u es un cero de P de orden $\rho \geq 1$, entonces u es un polo simple (polo de orden 1) dela función racional

$$f(z) = P'(z)/P(z).$$

Muestre entonces que $\operatorname{Res}_{z=u} |f(z)| = \rho$ (ρ es el orden del cero u de P).

b) Sabemos por la teoría de las fracciones parciales que $f(z) = P'(z)/P(z)$ admite un desarrollo del tipo

$$(1) \qquad f(z) = \frac{b_1}{z-u_1} + \frac{b_2}{z-u_2} + \dots + \frac{b_k}{z-u_k} \qquad (k \leq n)$$

donde los u_i son <u>todos los ceros distintos de</u> P. Usar (1) para determinar que

$$(2) \qquad b_i = \rho_i,$$

donde ρ_i es el ordendelcero u_i. Si $v_1, v_2, \dots, v_n$ <u>son todos los ceros de</u> P, usar (1) y (2) para deducir la relación

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-v_j}$$

c) Si $a \neq v_j$ ($j = 1,2,\dots,n$), mostrar que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{v_j-a} = -P'(a)/P(a)$$

y que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(v_j-a)^2} = \frac{P'^2(a) - P(a)P''(a)}{P^2(a)}.$$

d) Si $P(z) = (z-i)(z-2)(z^2+2iz-1)$, calcular las siguientes integrales

$$\int_{\vec{K}_3(0)} \frac{P'(z)}{P(z)} dz \quad ; \quad \int_{\vec{K}_1(4+i)} \frac{P'(z)}{P(z)} dz.$$

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, diciembre de 1966.

3. <u>Primera composición de cálculo I (01511). Ingenierías.</u>

Considere la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 2 & \text{si } -1<x<1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x\leq -1 \end{cases}$$

a) Estudiar el dominio de f y trazar su gráfica.

b) Diga en qué puntos es discontinua la función, mostrando (no gráficamente) por qué es discontinua en los dichos puntos.

c) Estudie la derivabilidad de la función f, indicando en qué puntos no existe la derivada. Trace el gráfico de las función f'.

d) Encontrar los puntos de intersección de los gráficos de f y f'.

e) Halle la ecuación de la recta tangente al gráfico de f y que pasa por el punto $(2,3)$. Halle la ecuación de la recta tangente al gráfico de f' en el punto $(2,4)$. Halle la intersección de las dos rectas anteriores.

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, septiembre de 1966.

4. Examen parcial de Cálculo avanzado (1527).

1.- Sean

$$f(z) = \begin{cases} z^2 \cdot \text{sen}\frac{1}{|z|} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} z \ \text{sen}\frac{1}{|z|} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Demuestre en primer lugar que g es continua en 0; deducir entonces que f es derivable y por lo tanto continua en 0. Use luego el hecho de que $\lim_{x\downarrow 0} \text{sen}(1/x)$ no existe, para mostrar que g no es derivalbe en 0.

a) Demostrar que

$$\lim_{z\to 0} \frac{\text{sen } z}{z} = 1$$

b) Compruebe que $\text{sen}(\pi n + z) = (-1)^n \text{sen } z$, n entero, y utilice este hecho para mostrar que

$$\lim_{z\to n} \frac{z - n}{\text{sen } \pi z} = \frac{(-1)^n}{\pi}$$

3.- a) Demuestre que si $k = k_1 + k_2$, entonces para $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, $-\pi < \theta_1, \theta_2 < \pi$, tenemos

$$\log_{(k)} z_1 z_2 = \log_{(k_1)} z_1 + \log_{(k_2)} z_2.$$

b) Si a es un número real, sabemos que

$$z^a = \{\rho^a e^{ai(\Theta + 2k\pi)} ; k\in Z\}, \quad z = \rho e^{i\Theta}, \ -\pi < \Theta < \pi$$

Las ramas de esta función multívoca están dadas por

$$z^a_{(k)} = \rho^a e^{ai(\Theta + 2k\pi)} \quad \text{(rama k-ésima, } k = 0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

Mostrar que

$$z^{a+a'}_{(k)} = z^a_{(k)} \, z^{a'}_{(k)} .$$

4.- a) Defina lo que es un conjunto abierto en el plano complejo.

b) Demuestre que la unión de dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

c) Dé dos definiciones equivalentes de lo que es un conjunto acotado.

d) ¿A qué llama Ud. un conjunto compacto? Dé por lo menos dos ejemplos distintos de conjuntos compactos.

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, noviembre 1966.

5. Examen parcial de Cálculo I (01511). Ingenierías.

1.- Dados $\log 2 = 0,69315$ y $\log 3 = 1,09861$, hallar $\log 24$ y $\log(3/16)$

2.- Halle las ecuaciones de las rectas tangentes y normal al gráfico de $f(x) = \text{arcsen}\, x$ en el punto que corresponde a $x = -1/2$.

3.- Calcule las integrales indefinidas

$$\int \frac{dx}{1 + 7x^2} , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - 9x^2)}}$$

4.- Definimos la función L de la manera siguiente:

$$L(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} , \qquad x \geq 2$$

Deducir:

$$\text{a)} \quad L(x) = x/(\log x) + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} - 2/(\log 2)$$

$$\text{b)} \quad L(x) = x/(\log x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!\,x}{\log^{k+1} x} + n! \int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t} + C_n$$

donde C_n es una constante que depende de n. Demuestre que existe una constante b tal que $\int_b^{\log x} (e^t/t)dt = L(x)$, y halle el valor de b.

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, noviembre 1966.

6. Examen parcial de Cálculo avanzado (1527).

1) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 3x^2 + x \log x.$$

2) Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + x^2\left(\frac{dy}{dx} - 4y\right) = 0$$

se pide: a) encontrar un procedimiento que permita reducirla a una ecuación de primer orden, y b) hecho lo anterior, resolverla.

(Nota: en la respuesta figura la integral

$$\int e^{-(x^3/3 + 4x)}dx ;$$

les rogamos no intenten calcularla - pues es perder el tiempo)

3) Considere la ecuación $y'' + ay' + by = p(x)e^{mx}$, donde a, b, y m, son constantes, y $p(x)$ es un polinomio de grado n.

a) Muestre que el cambio de variable $y = u(x)e^{mx}$ transforma esta ecuación en

$$u'' + (2m + a)u' + (m^2 + am + b)u = p(x).$$

b) Use la parte (a) para deducir que la ecuación dada tiene una solución de la forma $y = q(x)e^{mx}$, donde $q(x)$ es un polinomio. ¿Cuál es la relación entre los grados de q y de p?

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, octubre de 1.966.

7. Examen final de Cálculo Avanzado (1527). 2a. opción.

1.a) Demostrar la convergencia de la serie cuyo término general es

$$u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t(\text{sen } t)}{1 + t^2}dt,$$

y deducir que este resultado la convergencia de la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{t\ (\text{sen } t)}{1+t^2}dt.$$

b) Obtenga la convergencia de la integral I usando uno de los teoremas demostrados en el curso.

2. Consideremos la ecuación diferencial:

$$\text{(E)} \qquad z(z+2)w' + (z+1)w - 1 = 0$$

donde $w = w(z)$ es una función de variable compleja. El método de los coeficientes indeterminados usado en el caso de la variable real, es válido aquí también; úselo para determinar una serie de Taylor alrededor de $z=0$ cuya suma sea solución de la ecuación (E) y precise su radio de convergencia. (Cada paso debe estar justificado).

8. Primer examen parcial de Cálculo IV (01515). Ingenierías.

1) Encontrar el momento de inercia alrededor del eje z del tetraedro homogéneo (densidad constante) limitado por los planos $z = x + y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.

2) Enunciar y demostrar el criterio de comparación.

3) Estudiar a la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\, dx$$

4) Hallar el intervalo de convergencia de la siguiente serie:

$$2 + \frac{3}{3(x+1)} + \frac{4}{9(x+1)^2} + \frac{5}{27(x+1)^3} + \dots + \frac{n+2}{3^n(x+1)^n} + \dots$$

9. Examen parcial Cálculo IV (01515). Ingenierías).

1) Hallar el valor principal de $(1+i)^{2-i}$.

2) Determinar todas las curvas planas para las cuales la parte de cada tangente entre el eje X y el punto de tangencia quede bisectada por el eje Y.

3) Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(1 - x^2y)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0.$$

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Octubre de 1966.

10. Examen parcial de Cálculo IV (01515). Ingenierías.

1) Hallar el intervalo de convergencia de la siguiente serie:

$$1 + x \log a + x^2 \frac{\log^2 a}{2!} + x^3 \frac{\log^3 a}{3!} + \dots + x^n \frac{\log^n a}{n!} + \dots$$

2) Desarrollar la serie de Maclaurin de $(\cos x)/\sqrt{(1+x)}$.

3) Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\operatorname{sen} y \frac{dy}{dx} + \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen} x$$

4) Resolver por serie de potencias de x la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \operatorname{sen}(xy)$$

con la condición inicial $y(0) = 1/2$.

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, diciembre 1966.

11. Examen parcial de algebra (01502). Psicología.

1) Sea A = $-1,3,5,-2,6$. Sea f una función definida en A así: $f(x) = x^2-5$. Hallar: a) El rango o recorrido de **f**; b) Describir a f como un conjunto de parejas ordenadas. c) Decir si f es uno a uno y por qué.

2) Efectuar las operaciones indicadas y simplificar:

$$\left\{\frac{x^2}{x+3} + \frac{x+3}{x^2}\right\} \times \left\{\frac{5x-1}{x} + \frac{x}{5x-1}\right\}$$

3) Si $P(x) = 4x^5 - 7x^3 + 4x^2 + 5x - 1$, y $Q(x) = 2x^2 - x$, hallar $P(x)/Q(x)$.

4) Definir: a) Número real. b) Número racional. c) Número natural. d) Polinomio.

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, diciembre de 1966.