

1. Exámenes parciales de Matemáticas (1980-1981)

2. Exámenes parciales de Matemáticas (1981-1982)

3. Exámenes parciales de Matemáticas (1982-1983)

4. Exámenes parciales de Matemáticas (1983-1984)

5. Exámenes parciales de Matemáticas (1984-1985)

6. Exámenes parciales de Matemáticas (1985-1986)

7. Exámenes parciales de Matemáticas (1986-1987)

8. Exámenes parciales de Matemáticas (1987-1988)

9. Exámenes parciales de Matemáticas (1988-1989)

10. Exámenes parciales de Matemáticas (1989-1990)

11. Exámenes parciales de Matemáticas (1990-1991)

12. Exámenes parciales de Matemáticas (1991-1992)

13. Exámenes parciales de Matemáticas (1992-1993)

14. Exámenes parciales de Matemáticas (1993-1994)

15. Exámenes parciales de Matemáticas (1994-1995)

16. Exámenes parciales de Matemáticas (1995-1996)

17. Exámenes parciales de Matemáticas (1996-1997)

18. Exámenes parciales de Matemáticas (1997-1998)

12. Segundo examen parcial de Cálculo I (01511).Geología. Estadística.Química.

1. Halle el área limitada por las curvas $y^2 = x$ y $x = 4$.

2. Halle expresiones para dy/dx si

a) $y = \sqrt[3]{x(x-2)/(x^2+1)}$ ($x > 2$) ;

b) $y = \cos u(x)$.

3. Muestre que $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$.

4. Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int e^{x/3} dx$; b) $\int dx/(3x+2)^2$.

Departamento de Matemáticas.

Univ. Nacional de Colombia.

Junio 7, 1966.

13. Primer examen parcial de Algebra(01502)Curso básico.

1. Sean R el conjunto de todos los números pares positivos, S el conjunto de los números impares mayores que 8 y $T = \{1, 2, 6, 9\}$. Hallar:

a) $(R \cup S) \cap T$; $(R \cup T) \cap S$;

b) $(S \cup T) \cap R$; $(R \cap T) \cup S$;

c) $\{x \mid x \in R \cup T, \wedge, x \notin S\} \cup \{x \mid x \in S, \wedge, x \notin R \cup T\}$

d) $\{x \mid x \in R \cup T, \wedge, x \in S\} \cap \{x \mid x \in S, \wedge, x \notin R \cup T\}$

2. Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 1-x & \text{si } x < 0 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x > 2 \\ x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

a) Hallar $f(0)$, $g(-4)$, $f(3)$, $g(3)$, $g(-1)$, $f(-3)$.

b) Decir si f y g son inyectivas o no, y por qué.

c) Decir si f y g son sobre o no, y por qué.

d) Dibujar el gráfico de f.

e) Dibujar el gráfico de g.

3.a) Efectuar la operación indicada:

$$\frac{6x^{3n} + 5x^{2n} - 18x^n + 8}{3x^n - 2}$$

b) Simplificar la expresión siguiente:

$$- \{ -3x + (-x - [2y - 3]) \} + \{ -(2x + y) + (-x - 3) + 2 - (x + y) \} .$$

R.TOVAR

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia

Marzo, 28, 1967

14. Primer examen parcial de Cálculo IV(01515).Ingenierías.

1.Hallar, usando integración múltiple, el volumen que está incluído simultáneamente entre el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, el paraboloides de ecuación $x^2 + y^2 = z$ y los planos $z = 0$ y $z=2$.

2. Estudiar la convergencia de las series siguientes:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad ; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{(n+1)}}$$

(log significa logaritmo natural.).

3.a) Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}}{\sqrt{(n^2+n)}} = 1$$

b) Demostrar que para $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} .$$

R.LOSADA,C.de TAKAHASHI,S.GAMBA,J. MALPICA

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia.

Febrero 28, 1967.

15. Primer examen parcial de Cálculo II (01513). Ingeniería.

1. Encontrar todas las asíntotas del gráfico de la relación

$$x^2y - y^3 + y^2 + 1 = 0.$$

2. Demostrar que una parábola es el límite de una hipérbola cuando uno de los extremos del eje (ó vértice) A y el foco correspondiente permanecen fijos, y el centro O se aleja indefinidamente.

3. Demostrar que la longitud del radio de la circunferencia tangente en el vértice a una rama de una hipérbola, y tangente también a sus asíntotas, es igual a la longitud del segmento de la recta que pasa por uno de los focos, normal al eje focal, y comprendido entre la curva y la asíntota.

4. Demostrar que el gráfico de $\rho(A \cos \theta + B \sin \theta) = C$, en donde A y B no son simultáneamente nulos, es siempre una recta.

R. MORALES, F. GUTIERREZ, L. SORIANO, O. DEGREIFF, J. VARELA.
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia.
Marzo 28, 1967.

16. Primer examen parcial de Cálculo I (01511). Ingeniería.

Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas así:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq -1 \\ -2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Dígase si f y g son inyectivas y por qué. ¿Cuáles de estas funciones son sobre? ¿Por qué?
- b) Hállense $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $g(-3)$, $g(0)$, $g(3)$.
- c) Hállese una expresión para $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; determí-

nese f^{-1} , si esto es posible.

d) Estúdiense la continuidad de f en el punto 0, y la de g en los puntos 1 y -1.

e) Hállese la ecuación de la recta normal al gráfico de f en el punto $(3, 1/2)$.

R. TOVAR, D. CABALLERO.

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia.

17. Primer examen parcial de Cálculo I (01511). Ingeniería. Economía. Administración de Empresas.

1. Hállense las discontinuidades, y remuévanse las removibles, de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)} & \text{si } x \neq 1, -1. \\ 1 & \text{si } x = 1, -1. \end{cases}$$

2. Dada $f(x) = 4x^2 - 6x + 2$ ($-\infty < x < \infty$), encuentrese f^{-1} restringiendo adecuadamente el dominio de f . Dibújense los gráficos de f y f^{-1} .

3. Dadas $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $h(x) = x - 1$, encuentrese una expresión para $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ y determínese el dominio máximo de $f \circ g \circ h$.

4. Hállese el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices están dados por: $A = (1, 6)$, $B = (-1, 2)$, $C = (7, 1)$.

5. Hállese el n -ésimo término y el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de la sucesión siguiente:

$$(a_n) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{15}, \frac{10}{35}, \frac{17}{63}, \frac{26}{99}, \dots \right)$$

F. LLERAS

Departamento de Matemáticas.

Universidad Nacional de Colombia.

Marzo 28, 1967.

18. Primer examen parcial de Cálculo Avanzado (01526). Matemáticas.

temáticas. Física.

1. Recuerdese que una curva en $\mathbb{R}^n$ no es otra cosa que una función $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo de la recta real. Sabemos entonces que

$$\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{e}_1 + \dots + r_n(t)\vec{e}_n$$

donde las r_k ($k=1, \dots, n$) son las funciones componentes. Sea ahora, $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo con valores reales, y considérese la siguiente función $\vec{h}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por la relación

$$\vec{h}(t) = \lambda(t)\vec{r}(t) \quad (t \in I)$$

Si a es un punto de acumulación de I , mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{h}(t) = A\vec{L}$$

si existen $A = \lim_{t \rightarrow a} \lambda(t)$ y $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{L}$. Deducir que si $\vec{r}$ y λ son funciones continuas en I , entonces $\vec{h}$ es continua en I .

2. Para una función arbitraria $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ considérese el cociente

$$\frac{\vec{r}(t+k) - \vec{r}(t)}{k} \quad (t, t+k \in I)$$

Si el límite de este cociente cuando $k \rightarrow 0$ existe, este límite lo llamamos la derivada de $\vec{r}$ en el punto t , y se nota $\vec{r}'(t)$. Mostrar que

$$\vec{r}'(t) = \sum_{k=1}^n r'_k(t)\vec{e}_k$$

Si $\vec{h}$ es la función del punto anterior, muéstrese que si existen $\lambda'(t)$ y $\vec{r}'(t)$ para cada $t \in I$, entonces existen $\vec{h}'(t)$ y se tiene

$$\vec{h}'(t) = \lambda(t)\vec{r}'(t) + \lambda'(t)\vec{r}(t).$$

En particular, muéstrese que si $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función constante, i.e., $\lambda(t) = c$, para todo $t \in I$, entonces

$$\vec{h}'(t) = c\vec{r}'(t).$$

3.a) Si $\vec{r}(t) = e^{3t} \vec{e}_1 + e^{-3t} \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $t \in \mathbb{R}$, muéstrese que todos los puntos de la curva determinada por $\vec{r}$ están sobre un mismo plano.

b) ¿Cuál es la ecuación del plano osculador en cualquier punto de la curva?

c) Hállese $\vec{u}(t) = \vec{r}'(t)/\|\vec{r}'(t)\|$ y compruébese que $\langle \vec{u}(t), \vec{u}'(t) \rangle = 0$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

d) Verifique que $r_1(t) \cdot r_2(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y utilice este hecho para trazar un dibujo de la curva definida por $\vec{r}$.

V.ALBIS

Universidad Nacional de Colombia

Departamento de Matemáticas.

Marzo de 1967.

19. Primer examen de Análisis Matemático V(01548). Matemáticas.

1. Sea $\overline{\mathcal{M}}$ el subespacio lineal cerrado determinado por $\mathcal{C}$. Demostrar que $\overline{\mathcal{M}}$ es el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{H}$ la forma siguiente: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $f_k \in \mathcal{C}$.

2. Demostrar que cualquier sistema ortonormal de $\mathcal{H}$ es enumerable.

3. Demostrar que si un espacio $\mathcal{H}$ tiene un sistema ortonormal completo, entonces $\mathcal{H}$ es separable.

4. Sea V_n el espacio lineal euclidiano de dimensión n . Mostrar que V_n es completo.

Y.TAKEUCHI

Departamento de Matemáticas.

Universidad Nacional de Colombia.

Marzo de 1967.

20. Primer examen parcial de Matemáticas Especiales(01537). Física.

1. Encontrar la expresión de $\cot z$ en la forma de

de fracciones parciales.

2. Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

3. Demostrar la convergencia de

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$$

4. 4. Calcular

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \cos^{2n} x \, dx$$

usando las funciones Beta y Gama.

21. Primer examen parcial de Análisis Matemático I(0154

3). Matemáticas.

1. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \text{ es racional, } x \in [-1, 0] \\ x & \text{si } x \text{ es irracional, } x \in [0, 1] \end{cases}$$

Demostrar:

- i) f es continua (en su dominio de definición)
- ii) el dominio de f no tiene punto aislado.
- iii) Si A es un conjunto abierto contenido en el recorrido de f , entonces $f^{-1}(A)$ no es un abierto.

2. Sea $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ un conjunto abierto acotado donde los I_k ($k=1, \dots$) son intervalos abiertos disjuntos, y sea $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} I_k$. Mostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.

3. Sea S' el conjunto de todos los puntos de acumulación de S ; a) demostrar que S' es cerrado. b) Si S es acotado, demostrar que S' tiene un máximo y un mínimo (en el caso de E_1).

4. Sea f una función de variable real, y sea $g(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$ demostrar que g es continua por la derecha.

22. Primer Examen parcial de Topología (01557) Ciencias de la Educación.

1. Sean X un conjunto y $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ métricas sobre X . Demuestre que δ definida por

$$\delta(x, y) = \sum_{k=1}^n \delta_k(x, y)$$

es también una métrica sobre X .

2. Sean $(X_1, \delta_1), \dots, (X_n, \delta_n)$ espacios métricos. Sea $X = \prod_{k=1}^n X_k$ y defínase $\delta: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ por la condición:

$$\delta((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sup_{1 \leq k \leq n} (\delta_k(x_k, y_k))$$

Demuéstrese que δ es una métrica sobre X .

3. Sean X un conjunto y δ_1 y δ_2 métricas sobre X . Las proposiciones siguientes son equivalentes:

- Todo conjunto abierto de X para δ_1 es un abierto de X para δ_2 .
- Toda bola abierta de X para δ_1 contiene una bola abierta de X para δ_2 con mismo centro.

J. CHARRIS

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Febrero de 1967

23. Primer examen parcial de Topología (01551) Matemáticas.

1. Demostrar : a) si C es un subconjunto conexo de un espacio topológico (X, τ) que tiene una separación $X = (A|B)$ entonces $C \subseteq A$ o $C \subseteq B$.

b) Si H es conexo y si $H \subseteq E \subseteq \bar{H}$, entonces E es conexo.

2. Considerando en $\mathbb{R}^2$ la topología usual, es decir, la que tiene por base el conjunto de todos los cuadrados de la forma $A = \{(x, y) ; |x-a| < \varepsilon, |y-b| < \varepsilon\}$,

y tomando como dato el hecho de que en esta topología cada uno de los segmentos de línea recta son conexos, demuestre que: el conjunto de todos los puntos que tienen por lo menos una coordenada racional es conexo.

3. Mostrar que cada componente de un espacio topológico está contenida en alguna casi-componente y que estas casicomponentes son cerradas.

O.R. RUIZ

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia.

24. Composición de Programación Lineal. Centro de Cómputo.

Escriba un programa para calcular $\arctg x$ usando las siguientes fórmulas en las cuales x^2 puede ser mayor o menor que 1.

para $x^2 > 1$

$$\arctg x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + 1/(3x^3) - 1/(5x^5) + \dots$$

para $x^2 < 1$

$$\arctg x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots$$

Sume la serie usando un número suficiente de términos, de tal manera que el último término sumado sea $< 4(10)^{-5}$. Resuelva el problema para $0 < x < 1,5$ usando incrementos de 0,1.

Determinar también el número de términos necesarios para alcanzar la precisión requerida para cada valor de x . No use ninguna de las dos series dadas para calcular $\arctg 1$. ¿Por qué?

CENTRO DE COMPUTO

Universidad Nacional de Colombia.

Febrero de 1967.