solución de problemas

SOLUCION DE PROBLEMAS

140.- Muestre que si n es múltiplo de 6, entonces

(I) $$\sum_{m=o}^{n/2} \binom{n}{2m} (-3)^m = 2^n.$$

Solución: Consideremos

$$(1 + x)^n + (1 - x)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k$$

(1) $$= 2 \sum_{m=o}^{n/2} \binom{n}{2m} (x^2)^m,$$

pues n es múltiplo de 2. Si $x = i\sqrt{3}$, entonces (1) se convierte en

(2) $$(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n = 2 \sum_{m=o}^{n/2} \binom{n}{2m} (-3)^m$$

donde $i = \sqrt{(-1)}$. Ahora bien, $(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n$ $= 2^n.e^{i\pi n/3}$ y $(1 - i\sqrt{3})^n = 2^n(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^n = 2^n.e^{-i\pi n/3}$.

Como n es múltiplo de 3, entonces $n/3 = k$ es un entero, y entonces

$$(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n = 2^n(e^{i\pi k} + e^{-i\pi k})$$

$$= 2^n.2.$$

Es decir,

$$2.2^n = 2 \sum_{m=o}^{n/2} \binom{n}{2m} (-3)^m$$

de donde resulta (I).

Antiguo Alumno de la Facultad.

137.- Halle el error en la siguiente «demostración»:

«Consideremos un cuadrado de lado 8 y cortémoslo en cuatro pedazos como se indica en la figura 1; luego tomemos estos pedazos para formar el rectángulo de lados 13 y 5 que aparece en la figura 2. Concluímos entonces que 64 = 65.»

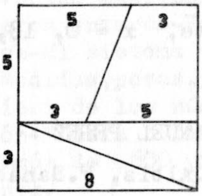


Figura 1

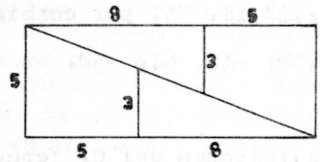
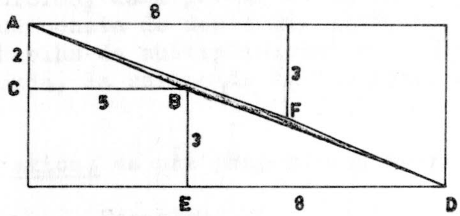


Figura 2

Solución: Tomando papel y tijeras, y haciendo los cortes indicados en la figura 1, obtenemos la siguiente figura



El error consiste en creer que los ángulos $\sphericalangle CBA$ y $\sphericalangle EDB$ son iguales. Como $\tan \sphericalangle CBA = 2/5$, y $\tan \sphericalangle EDB = 3/8$, y $2/5 \neq 3/8$, tenemos, en efecto, que $\sphericalangle CBA \neq \sphericalangle EDB$. De paso hemos demostrado que el área del rectángulo ABDF es igual a uno.

ROBERTO SUAREZ

(Otras soluciones de: Otoniel Gutiérrez, Gabriel Tello)

138.- Determinar todos los números enteros positivos que divididos por 17 dan un residuo igual al cuadrado del cociente respectivo.

Solución: Se trata de determinar todos los números enteros x, y, tales que

$$x = (17)y + y^2, \quad \text{con} \quad 0 \leq y^2 < 17,$$

tal como lo indica el algoritmo de la división euclídea. Debemos tener, por tanto, $0 \leq |y| < \sqrt{(17)}$, es decir, $y = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, y, por consiguiente, $x = 0, 18, -16, 38, -30, 58, -42, 84, -52$.

MANUEL PEREZ

(Otras soluciones de: O. Yepes, Ed.Albis, F.Sanabria)