ALGUNOS ASPECTOS DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA A NIVEL MEDIO

por

Alonso TAKAHASHI

Introducción

Esta ponencia fué presentada originalmente bajo el título: «Nociones Matemáticas Importantes en la Enseñanza Media». Sin embargo, durante su redacción, los propósitos iniciales fueron considerablemente ampliados, pues nos pareció imprescindible la consideración de otros tópicos relacionados íntimamente con los objetivos de este congreso y la formulación de algunas sugerencias de tipo práctico.

En primer lugar, tratamos de situar los temas particulares a los cuales deseábamos referirnos dentro de un contexto más general que hiciera referencia a toda la enseñanza matemática dentro del bachillerato. También nos pareció adecuado intentar un análisis de la efectividad de los esfuerzos llevados a cabo para mejorar dicha enseñanza, esfuerzos que en parte están representados por congresos como el actual; en realidad, se ha tratado de sugerir medios adecuados para lograr que los resultados de estas actividades no sean, como ocurre con frecuencia, completamente nulos. Estas consideraciones conducen inevitablemente a un tercer aspecto, quizás el más importante de la cuestión: los profesores.

Es así como el material originalemnte elegido para esta conferencia aparece en segundo lugar, debido precisamente a su carácter particular.

Primera Parte

A grandes rasgos,la instrucción matemática impartida en nuestro bachillerato tiende a incluir los tópicos siguientes: a) Sistemas numéricos(números naturales,enteros,racionales,reales y complejos) y otros temas relacionados (p.e. divisibilidad,números primos,potenciación y radicación,expresiones decimales,logaritmos,etc.). b) Algunas funciones elementales (polinomios y fracciones racionales incluyendo ecuaciones algebraicas,funciones trigonométricas (trigonometría)). c) Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales (casos particulares) .d) Geometría de Euclides.(Recientemente se han agregado por lo menos en los programas oficiales,otros temas como Geometría Analítica y Cálculo).

Se acepta,mas o menos unanimemente,que todos los temas anteriores deben hacer parte de lo que se enseñeen el Colegio.La única discrepancia se presenta con relación a la Geometría de Euclides,la cual es ahora considerada por muchos matemáticos como una antigüedad inútil.

En realidad,la obre de Euclides,en la cual se basan,directa o indirectamente,los textos tradicionales,ha conservado sus privilegios debido en gran parte al hábito y a ciertas creencias como la de que es la <u>única</u> manera de presentar elementalmente el método axiomático o que las vocaciones matemáticas deben nacer necesariamente del contacto con los Elementos de la Geometría.El caso es que,si bien el tratado de Euclides representa el primer intento sistemático de axiomatización y muchos edultados matemáticos importantes se deben a una profunda comprensión de hechos geométricos,su desarrollo no satisface las exigencias lógicas actuales,escamoteando además muchas nociones de inmenso interés como las estructuras vectorial y métrica del plano y del espacio. Así por ejemplo,se estudian gran número (multitud) de propiedades insustanciales de los triángulos y en cambio no se mencionan los métodos vectoriales por medio de los cuales pueden tratarse los mismos triángulos(un triángulo es la mitad de un paralelogramo,el cual a su vez esta determinado por dos vectores) en forma mas efectiva.

Las propuestas actuales para mejorar el tratamiento de la Geometría pueden clasificarse en tres grupos:

(a) Un enfoque analítico basado en la noción de <<espacio vectorial con producto interno>>,el cual permite usar libremente los números reales y el álgebra.Este enfoque es muy flexible y elimina barreras que no tienen razón de ser entre tópicos como el álgebra,vectores y geometría.La Geometría adquiere asi un estilo y un lenguaje acorde con el resto de la matemática actual.

(b) Desarrollar una axiomatización mas precisa que la de Euclides aprovechando las aportaciones de Hilbert y otros geómetras de este siglo.También se tiene aquí la oportunidad de usar al lenguaje universal de los conjuntos y las relaciones.

(c) Emplear métodos informales (figuras de cartón, películas,etc.) que capaciten a los estudiantes para utilizar la información contenida en la geometría clásica sin llevar a cabo un desarrollo completo de la teoría. Algo parecido se hace regularmente con los números reales:enunciando sus propiedades características,puede llegar a utilizarselos correctamente sin necesidad de efectuar una construcción de ellos,la cual,en un nivel inferior a la universidad no tiene razón de ser.

Agreguemos que,en niveles superiores,la geometría como tal tiende a desaparecer,sucediendo que la mayoría de las asignaturas que incluyen dicha palabra en su nombre son en realidad ramas del análisis,el álgebra y la topología.

Volviendo a los cursos del bachillerato,es un hecho que todos los tópicos antes mencionados han estado enseñándose en forma mas o menos igual(o <<clásica>>)durante mucho tiempo,y aún se enseñan asi en la mayoría de nuestros colegios.Sinembargo,ultimamente han surgido diversas inquietudes tendientes a reformar la enseñanza modernizándola y depurándola.Se preconiza un nuevo enfoque de la matemática elemental el cual,superficialmente,se manifiesta por medio de una terminología especial:se habla de <<conjuntos>>, << leyes de composición >> ,<< grupos >>, << espacios vectoriales >>, << isomorfismos >>,etc.,

Debemos entonces mostrar la naturaleza y conveniencia de estas modificaciónes,y cómo,si es el caso,debe llevarse a cabo su incorporación en nuestra enseñanza.

En primer lugar,y como punto de partida creemos indiscutible que,en todos los niveles,todo lo que se enseñe bajo el título de matemática debe ser o tender directamente a lo que hoy consideramos como matemática (haciendo énfasis en los tópicos verdaderamente útiles).Si bien es cierto que (usando las palabras de N.Bourbaki),<< desde los griegos,quien dice matemática dice demostración >> y que,esencialmente,<< lo que era una demostración para Euclides lo es también a nuestros ojos >>,el alumno no debe verse obligado a cubrir durante su corta vida estudiantil,el camino recorrido por la matemática desde los orígenes de la civilización hasta hoy,pasando por las etapas de la oscuridad conceptual,ideas e interpretaciones erróneas y corrientes de investigación que luego se han estancado (mencionemos incidentalmente que,no han faltado situaciones en que se considera interesante investigar la solubilidad de ecuaciones de grados 3000 y 4000)

En efecto,de esta manera el estudiante puede llegar muy tarde a comenzar su adaptación mental al estilo de la matemática de esta época.

Los profesores debemos aceptar que algunos temas que nosotros estudiamos y que se consideran imprescindibles,sean luego relevados,sin que los nuevos estudiantes esten inferiormente preparados porque no han oido hablar de este o aquel tema que ya hoy no es importante.Esta actitud exige cierto esfuerzo pues como dice A.Delachet,(con relación a la geometría de Euclides) << el hombre maduro no desecha sin pesar un juguete querido de su infancia >> .

Al paso que avanza la investigación,los estudiantes se verían aplastados si además de los nuevo pretendieramos comunicarles todo lo pasado.Es entonces necesario seleccionar temas que revelen esquemas generales y lineas directivas del pensamiento matemático contemporáneo y sus aplicaciónes actuales y futuras: en otros términos,se debe tender hacia las << estructuras fundamentales>> .

Es necesario entonces abolir,en todas las circunstancias, las descripciones confusas y las seudodemostraciones;aclarar completamente el sentido técnico de las afirmaciones sin detrimento de las interpretaciones << intuitivas >> de los diversos entes y relaciones matemáticos.Es también muy útil justificar las definiciones mostrando el origen y la evolución de las nociones fundamentales.Permanentemente debe tratarse de acostumbrar al estudiante a un lenguaje preciso ,a entender y utilizar con propiedad las expresiones del tipo << ... y ... >> << ... ó ... >> , << si ... ,entonces ... >> , << existe ... >> y lograr poco a poco que comprenda que es una demostración . Es conveniente por ejemplo,hacer ver que aunque una afirmación sea muy plausible (tanto,que pueda calificarse de evidente),es necesario demostrarla para que pueda ser legalmente admitida dentro del sistema que se ha adoptado. Esto puede llevarse a cabo aún sin dar la demostración del caso (por ejemplo, si ésta es complicada y no ilustra procedimientos interesantes).

En modo alguno significa lo anterior que debamos dictar altas matemáticas desde niveles elementales, pues creemos que los los enfoques excesivamente abstractos y formales a edades tempranas pueden resultar catastróficos, ya que, para << comprender >> el sentido de una axiomatización debe contarse de antemano con diversos ejemplos "concretos" de la estructura que desea estudiarse. Empleando una analogía; es seguramente muy difícil describir lo que es un artrópodo a alguien que no ha visto una araña u otro especímen de dicha clase.

Sinembargo, la enseñanza debe articular convenientemente las diversas etapas, de tal manera que no haya desconciertos debido a cambios radicales en enfoque y estilo de la exposición; es necesario unificar el lenguaje y tender siempre a emplear los esquemas generales de razonamiento. Esto exige naturalmente que la diferencia entre lo que el profesor conoce y lo que pretende enseñar sea la mayor posible.

Las características más notorias de la matemática en este siglo son seguramente su unidad y armonía debidas a la consideración de situaciones generales presentes en muchos casos particulares que conducen naturalmente a la formulación de teorías multivalentes (aplicables a diversos sistemas << concretos>>). Para expresar todas estas teorías se tiene un lenguaje común, el de los Conjuntos, y unos marcos generales de referencia, las estructuras (algebraicas, ordinales, topológicas y mixtas). Practicamente todos los desarrollos se basan en ciertas nociones medulares de las cuales las mas importanteses quiza el concepto general de función; en efecto, muchos de los entes matemáticos mas importantes, como las operaciones o leyes de composición (adición, multiplicación, exponenciación, etc.), la probabilidad, la distancia, las matrices, etc. son funciones. Son también fundamentales las nociones de producto cartesiano, relación de equivalencia (y conjunto cociente), orden, ley de composición, grupo, espacio vectorial, espacio métrico, etc. Pero, insistimos de nuevo, no se trata de entrenar al estudiante de secundaria a un estudio abstracto y sistemático de estos tópicos, sino de tener presente la importancia de dicho enfoque en la elaboración y desarrollo de los programas de estudio, mostrando los diversos especímenes particulares de estructuras importantes que van apareciendo progresivamente, de tal manera que, llegado el momento adecuado, la axiomatización no constituya otra cosa que el paso final esperado que delinea con precisión una situación muchas veces observada.

La tendencia a la <u>estructuración</u> aparece acompañada de una notación y una terminología muy concisas, sugestivas y de gran precisión. Por ejemplo:

<< la imagen de x por medio de f >>

<< el conjunto X partido por la relación R >>

$f: X \longrightarrow Y$, $x \longmapsto x^3$, $x \simeq y \pmod{R}$

eliminando asi notaciones ambiguas y enunciados imprecisos que confunden y puedan llegar a crear desconfianza en los alumnos.

Una estructura particular, facilmente presentable en niveles elementales y que por hallarse en el corazón de la matemática es una fuente de ejemplos de estructuras importantes por medio de los cuales pueden ilustrarse los sistemas y características antes mensionados, es el espacio numérico n-dimensional $\mathbb{R}^n$ al cual nos referiremos en la segunda parte.

Las metas que anteriormente hemos sugerido no son utópicas. Así, los alumnos en los gimnasios suizos (entre los 15 y 18 años) aprenden a usar el álgebra de los conjuntos y se familiarizan con los sistemas numéricos,polinomios,ecuaciones (incluyendo métodos numéricos),combinatoria,cálculo vectorial, trigonometría,grupos,anillos,cuerpos,espacios vectoriales; geometría métrica afín y proyectiva,nociones de geometrías no euclidianas;construcción de los números reales,isomorfismo con la recta,números racionales;logaritmo,función exponencial;crecimiento y decrecimiento de funciones,función inversa;vecindades límites,continuidad;derivadas e integrales, cálculo diferencial;funciones vectoriales;aplicaciones lineales,formas cuadráticas.

Aunque nuestras sugerencias son mas modestas,debemos admitir la inconveniencia de un cambio radical arriesgandonos a eliminar lo poco que hay sin que podamos luego sustituirlo por algo mejor.

LLegamos así a nuestro segundo punto o sea la consideración de los mecanismos para reformar la enseñanza.

Es un hecho que,en esa dirección las mejoras logradas no han sido mayores.Parece que la efectividad de los encuentros y congresos se ve seriamente comprometida ya que sus recomendaciones dificilmente se aplican.

Por esta razón creemos que los congresos sobre enseñanza no deben reducirse a producir un montón de recomendaciones y programas los cuales,en el mejor de los casos,paran en los archivos de donde nunca vuelven a salir.Para que el lapso entre las consabidas recomendaciones y su realización no sea infinito,es necesario plasmarlas en obras concretas.De esta manera las mismas sugerencias se depuran,los interesados pueden entenderlas sin ambiguedades y se evitan las interpretaciones forzadas que siempre resultan inconvenientes.

Con más precisión,creemos que deben formarse comisiones permanentes compuestas por profesores de bachillerato y profesores universitarios,cuya tarea consista en redactar textos o en su defecto esquemas muy detallados que puedan servir de guias para la redacción de los mismos (siempre siguiendo, naturalmente,las recomendaciones aceptadas).Esto conjuraría en parte el peligro representado por la proliferación de textos mediocres en cuya publicación no se tiene en cuenta la responsabilidad que implican las obras de estudio para los jóvenes;también se combatiría asi la imposición tradicional, por razones de tipo poco docentes,de libros caducos y desorientadores.

Constituyendo adecuadamente estos comites puede lograrse que sus textos y programas sean de aceptación general pues en ellos pueden eliminarse al máximo las parcializaciones que puede tener un determinado autor defendiendo ideas superficialmente atractivas pero de poca utilidad.

Es claro que no puede obligarse a un autor a escribir un libro por ejemplo de álgebra,según ciertas directrices.Sinembargo,un comité bien acreditado lograría que sus recomendaciones fueran tenidas muy en cuenta para la adopción de textos en los colegios.Además,si no pueden elaborarse textos dentro de los plazos requeridos,deben entonces usarse transitoriamente obras extranjeras bien escogidas.Si alguno de nuestros productos no son recomendables,y además podemos conseguir otros mejores,no debemos obligarnos a consumir los propios y continuar deteriorandonos.

En los Estados Unidos y dentro del School Mathematics Study Group (SMSG) funcionan comités como los aquí propuestos. Con respecto a ellos el profesor Beagle,integrante del grupo mencionado,hace algunas observaciones interesantes:

<< En la preparación de los textos adoptamos como princi-

pio básico el de que estos deberían ser el resultado de un esfuerzo conjunto de aquellos grupos más directamente interesados: los profesores mismos y los investigadores matemáticos. Cada uno de nuestros grupos de acción comprendía, por lo tanto, una representación igual de estos sectores de la profesión matemática y se hizo todo lo posible para convencer a cada participante de que se hallaba en igualdad de condiciones con los demás, pero que cada uno de ellos poseía conocimientos y capacidades importantes para el esfuerzo total del grupo >>.

....

<< En su gran mayoría, las personas que trabajaron en nuestros textos fueron escogidas por su reconocida capacidad tanto en matemática como en su enseñanza, y por su aptitud para cooperar con éxito en un grupo; y en los pocos casos en que algunas personas fueron escogidas no por su capacidad sino por la importancia de sus posiciones, ello resultó casi siempre un error >> .

Para contribuir a la actualización del profesorado las obras en cuestión se pueden publicar en dos versiones: una en la cual aparecería la materia como debe desarrollarse en los cursos regulares y otra (destinada especialmente a los profesores) con tratamientos más completos incluyendo digresiones y demostraciones rigurosas.

Aún suponiendo un acuerdo en cuanto a los objetivos próximos (por ejemplo la antes mencionada edición de textos o de guías para textos), queda aún el problema de capacitar el suficiente número de profesores para dictar los cursos según el nuevo enfoque. La carencia del personal en este campo es el factor más importante en contra de un cambio drástico en el estilo y contenido de la enseñanza, pues es necesario dar plazos razonables para que el profesorado se adapte a lo que ha venido a llamarse << la nueva matemática >> y a los temas más avanzados de la matemática clásica .Así por ejemplo,la enseñanza del cálculo en el bachillerato debería postergarse todavía por algunos años.

La producción de licenciados en matamáticas por parte de las facultades de Ciencias de la Educación no suple las necesidades de los colegios (suponiendo naturalmente que las directivas de estos desean mejorar a toda costa el nivel de la instrucción que imparten),y aún más,muchos de estos licenciados son absorbidos por las universidades que proliferan en nuestro medio.Parece entonces conveniente reducir la duración de la carrera de licenciado (destinados a la docencia de los colegios),eliminando materias poco formativas y que durante muchos años no harán parte de nuestra enseñanza secundaria. Esta reducción no es tan insólita si se recuerda que para enseñar en una de nuestras universidades basta haber coronado una carrera ordinaria de más o menos cinco años.Además,deben siempre ofrecerse cursos que permitan progresar a los profesores despues de la terminación de sus estudios regulares.

Debido a situaciones de hecho no debe pretenderse llevar a cabo una selección a corto plazo de todo el profesorado;se hace necesario resolver parcialmente el problema distinguiendo por ejemplo dos etapas en el bachillerato (digamos de cuatro y dos años respectivamente),en la segunda de las cuales se exigieran profesores de un cierto nivel representado por un título universitario o por la aprobación de cursos adecuados.

Y mirando ahora la otra cara de la moneda,es apena justo hablar de las compensaciones de los profesores.

La remuneración en nuestra profesión en todos los niveles ha sido siempre escasa,lo cual obliga al profesor a recargarse de clases disminuyendo, como es apenas lógico, la calidad de su trabajo. Se supone también que un profesor de << dedicación exclusiva >> debe dedicarse exclusivamente a dictar clases, es decir, que no debe hacer nada diferente. Un profesor, sobre todo cuando está tratando de actualizar rápidamente sus conocimientos, no debería dictar más de quince horas de clase en la semana, para así poder dedicar algún tiempo a la preparación de sus cursos (confrontación de diferentes obras, construcción de ejemplos y ejercicios, búsqueda de métodos de exposición) y al mejoramiento de su propia formación (asistencia a cursos, participación en seminarios, lectura de libros, etc.).

Con el objeto de atraer elementos cada vez más valiosos al ejercicio de la docencia es necesario buscar la dignificación de esta profesión. A este respecto es interesante observar que en manos de los gobiernos hay muchos mecanismos que pueden utilizarse efectivamente para estimular las actividades que crea más convenientes. Es muy obtimista pensar que en una misma persona coincidan el gusto y ciertas dotes para el estudio de una ciencia como la matemática al lado de una resignación más o menos franciscana a una vida modesta. Por esta razón muchos de los estudiantes que tienen las primeras características se desvían hacia carreras mucho más productivas como la ingeniería.

Por último, es imperiosa la reglamentación a escala nacional de los cursos de capacitación y de la edición de por lo menos una revista dedicada exclusivamente a los profesores y estudiantes de matemática de bachillerato. Tanto el aprovechamiento de esos cursos como las colaboraciones en revistas bien acreditadas proporcionarían medios para que los profesores más capaces y más interesados en mejorar su formación progresaran en su carrera por medios diferentes a los de la antiguedad.

SEGUNDA PARTE

Mencionaremos ahora, algunos tópicos que, en nuestro concepto, es conveniente incluir en la escuela secundaria. Además, sugerimos enfoques posibles para otros temas que ya figuran en los programas vigentes. No tratamos en ningún momento de proponer un plan de estudios sino de presentar ciertas ideas que podrían tenerse en cuenta al elaborar esa clase de planes o al redactar textos. la enumeración de los tópicos en cuestión tampoco pretende indicar cuál sería la ordenación más conveniente para su exposición.

Durante la precipitada preparación de estas lineas nos ha guiado el convencimiento de que es conveniente proveer lo más rapidamente posible al estudiante de las ideas unificadoras modernas, incluyendo a la vez aquel material tradicional que ha demostrado ser siempre útil y que evita tratamientos excesivamente abstractos y formales proporcionando ejemplos familiares de situaciones generales. Un gran número de estos temas clásicos encuentran en los enfoques modernos un marco adecuado para su presentación sistamática mostrando con más profundidad su significado y sus interrelaciones.

1. Sistemas numéricos.

El conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ de los números enteros debe introducirse tan pronto como sea posible. No vale la pena comenzar llevando a cabo una construcción de los enteros, siendo preferible enseñar a manejarlos rapidamente. Basta entonces enunciar sus propiedades fundamentales (las cuales se reproduciran en gran parte cuando se estudien los polinomios), deduciendo luego las diversas reglas que más tarde serán de uso corriente. Hay que destacar que el subconjunto $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ de los números naturales mencionando la inducción matemática (la cual debe ilustrarse con ejemplos abundantes y bien escogidos); también debe mencionarse el principio de buena ordenación .

La construcción del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales puede efectuarse con bastantes detalles, mostrando de paso casos importantes de producto cartesiano y relación de equivalencia: Si $\mathbb{Z}^*=\{\ldots,-2,-1,1,2,\ldots\}$, se considera el conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ formado por las parejas ordenadas (m,n) de números enteros con $n\neq 0$ (es decir, $m\in\mathbb{Z}$ y $n\in\mathbb{Z}^*$); los elementos de este conjunto pueden representarse por medio de puntos de un plano.

Se dice que los elementos (m,n) y (m',n') de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ son << equivalentes>> (y se escribe $(m,n)\cong(m',n')$), si $mn'=nm'$ y se demuestra que esta << relación >> es

a) Reflexiva (es decir, $(m,n)\cong(m,n)$)

b) Simétrica (Si $(m',n')\cong(m,n)$ entonces $(m,n)\cong(m',n')$

c) Transitiva (Si $(m,n)\cong(m',n')$ y $(m',n')\cong(m'',n'')$, entonces $(m,n)\cong(m'',n'')$.

Para cada elemento (m,n) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ se considera entonces el conjunto de todos los elementos (m',n') de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ que son equivalentes con (m,n). Este conjunto es la clase de equivalencia de (m,n) y se designa m/n; si (m',n') es un elemento de m/n se dice un << representante >> de ella; dos clases son iguales si y solo si cada representante de una de ellas es equivalente a cada representante de la otra. El conjunto de todas las clases de equivalencia se designa $\mathbb{Q}$; es el conjunto de los números racionales.

Se define además una adición y una multiplicación entre clases usando para ello un representante y mostrando que el resultado de dichas operaciones no depende de los representantes particulares usados, de tal manera que se trata de verdaderas operaciones entre clases, es decir, operaciones en $\mathbb{Q}$; tambien se define en este conjunto una relación de orden que goza de las propiedades usuales. Se obtiene de esta manera un ejemplo muy importante de estructura: la de cuerpo ordenado

La identificación entre $\mathbb{Z}$ y una parte de $\mathbb{Q}$ (ejemplo de lo que recibe el nombre técnico de isomorfismo)permite cosiderar los enteros como un tipo particular de números racionales.

La exposición de estas nociones puede beneficiarse con el uso moderado del lenguaje de los conjuntos y de la notación lógica,lograndose enunciados abreviados y precisos:

$n \in \mathbb{Z}$:<< n es un número entero >>

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$:<< todo número natural es entero >>

$m|n \wedge n|p \Rightarrow m|p$:<< si m divide a n y n divide a p,entonces m divide a p >> .

Con caracter informativo,puede mencionarse la posibilidad de construir $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$ siguiendo un procedimiento similar al usado para obtener $\mathbb{Q}$.

Con miras a continuar la ampliación del campo numérico, se usa la representación de los números racionales por medio de puntos de una recta,mostrando así la conveniencia de introducir los números irracionales(para"llenar"la recta).En todo caso el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales(racionales e irracionales) debe presentarse(sin construirlo),enunciando sus propiedades características:algebráicas, ordinales y de continuidad.En este capítulo hay varios tópicos importantes que no deben descuidarse,por ejemplo:cálculo de valores absolutos,desigualdades y representación decimal.El uso de las tablas de logaritmos para efectuar cálculos numéricos es útil para familiarizarse al estudiante con la propiedad fundamental de la funcióm log: $\log(xy) = \log x + \log y$.

La definición de número complejo no presenta dificultad: se considera el conjunto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (formado por todas las parejas ordenadas (x,y) de números reales) y se define:

$(x,y) + (u,v) = (x+u, y+v)$

$(x,y).(u,v) = (xu-yv, xv + yu)$

Verificandose inmediatamente que con estas operaciones el conjunto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo el cual recibe el nombre de cuerpo de los números complejos. Es necesario mencionar de nuevo una <<identificación>>, esta vez entre $\mathbb{R}$ y una parte de $\mathbb{C}$.

Se logra así la representación mas o menos rápida de los sistemas numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ entre los cuales y mediante las identificaciones del caso existen las relaciones de inclusion

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}$$

2. El espacio Numérico $\mathbb{R}^n$.-

La introducción temprana de $\mathbb{R}^n$ es conveniente no solo por su importancia intrínseca y su relativa sencillez sino tambien por que constituye una fuente de ejemplos importantes de varias estructuras de interés fundamental.

La definición de igualdad entre n-plas ordenadas de números reales (llamadas tambien vectores de n componentes o vectores n-dimensionales) es muy simple:

$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ si y solo si $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, ... , $x_n=y_n$. Es decir: la igualdad entre vectores significa igualdad << componente a componente >>.

Así por ejemplo, la ecuación

$(3x+2y-z, 2x-5y+7z, x-2y+4z) = (-1,0,3)$ es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x+2y-z &= -1 \\ 2x-5y+7z &= 00 \\ x-2y+4z &= 3 \end{aligned}$$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ esta constituido por todas las n-plas de números reales y se llama el espacio numérico n-dimensional

Según esta definición:

$(-1,\sqrt{2},0,5) \in \mathbb{R}^4$, $(-1,8,3) \notin \mathbb{R}^2$

Los elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ pueden representarse por medio de flechas en el plano cartesiano y en el espacio tridimensional ordinario, respectivamente.

Tambien la adición vectorial y la multiplicación de un número (<< escalar >>) por un vector, se definen << componente a componente >>.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)+(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = (x_1+x'_2, \ldots, x_n+x'_n)$

$a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$.

Interpretación en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (por medio de flechas), **regla** del paralelogramo.

Puede comprobarse muy facilmente que si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ y $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ son vectores (elementos de $\mathbb{R}^n$) y a, b son escalares (números reales) entondes:

EV1) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$

EV2) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0}$ donde $\vec{0} = (0,0,\ldots,0)$

EV3) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ donde $-\vec{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

EV4) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

EV5) $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$

EV6) $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$

EV7) $a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x}$

EV8) $1\vec{x} = \vec{x}$.

Estas son las propiedades características de los espacios vectoriales o mas precisamentes, son los axiomas de la estructura de Espacio Vectorial.

Usando unicamente las propiedades EV1) a EV8) (y las de los números reales) pueden demostrarse otras relaciones, p.ej. $0\vec{x} = \vec{0}$, $a\vec{0} = \vec{0}$, $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$, etc. ; estas ecuaciones pueden tambien demostrarse directamente usando las definiciones de las operaciones, adquiriendo entondes un carácter innecesariamente particular.

Las vectores

$$\vec{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$$
$$\vec{e}_2 = (0,1,\ldots,0)$$
$$\vdots$$
$$\vec{e}_n = (0,0,\ldots,1)$$

tienen propiedades interesantes: 1) Si $a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n = \vec{0}$ entonces $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$,2) Todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ puede expresarse (de manera única) en la forma

$$\vec{x} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n$$

Generalizando, pueden darse las nociones de combinación lineal vectores linealmente independientes y bases. Los vectores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ constituyen la <u>base usual</u> de $\mathbb{R}^n$; cuando $n=3$ se acostumbra escribir $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ en lugar de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, respectivamente.

Partiendo de la expresión de la distancia entre dos puntos del plano ($\mathbb{R}^2$) (o del espacio ordinario):
$d(\vec{x},\vec{y}) = \left[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right]^{1/2}$, si $\vec{x} = (x_1,x_2), \vec{y} = (y_1,y_2)$, se intruduce naturalmente una <u>distancia</u> entre pares de elementos de $\mathbb{R}^n$:
$d(\vec{x},\vec{y}) = \left[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2\right]^{1/2}$ o, ebreviadamente:
$d(\vec{x},\vec{y}) = \left\{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2\right\}^{1/2}$
donde $\vec{x} = (x_1 , x_2 ,\ldots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_1 , y_2 ,\ldots, y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$. En un principio, pueden verificarse numericamente (en casos particulares) algunas de las propiedades que se espera que tenga una << distancia >>, por ejemplo, comprobar que si
$\vec{x} = (1,-1,0,2), \vec{y} = (2,5,-8,0)$, $\vec{z} = (3,1,-2,1)$ entonces
$d(\vec{x},\vec{y}) + d(\vec{y},\vec{z}) > d(\vec{x},\vec{z})$

Definiendo el <u>producto interno</u> de dos vectores $\vec{x},\vec{y}$ respectivamente iguales a $(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, por medio de la ecuación

$$x.y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

se puede demostrar que esta operación goza de las propiedades siguientes:

PI1) Si $\vec{x} \neq \vec{0}$ entonces $\vec{x}.\vec{x}$ 0

PI2) $\vec{x}.(\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x}.\vec{y} + \vec{x}.\vec{z}$

PI3) $(a\vec{x}).\vec{y} = a(\vec{x}.\vec{y})$

PI4) $\vec{x}.\vec{y} = \vec{y}.\vec{x}$

De estas propiedades se deduce la desigualdad

$$|\vec{x}.\vec{y}| \leqslant \sqrt{\vec{x}.\vec{x}}\sqrt{\vec{y}.\vec{y}}$$

(la cual puede tambien demostrarse directamente).

La <u>norma o la longitud</u> de un vector $\vec{x}$ es,por definición, el número real

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}.\vec{x}}\ .$$

Es claro que esta moción coincide con la usual para $n = 2,3$

De las propiedades del producto interno se deducen las siguientes propiedades de la norma:

N1) Si $\vec{x} \neq \vec{0}$ entonces $0 < \|\vec{x}\|$

N2) $\|a\vec{x}\| = |a|\,\|\vec{x}\|$

N3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Las nociones de norma y distancia están intimamente relacionadas,en efecto :

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|\ ,$$

y en virtud de esta ecuación,a partir de las propiedades N1), N2),N3) de la norma pueden deducirse las siguientes propiedades fundamentales de la distancia:

D1) $d(\vec{x},\vec{y}) = 0$ si y solo si $\vec{x} = \vec{y}$

D2) $d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{y},\vec{x})$

D3) $d(\vec{x},\vec{y}) \leqslant d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y})$ (<< desigualdad triangular >>)

Como en $\mathbb{R}^2$ puede definirse adecuadamente una multiplicación la cual junto con la adición usual confieren a este conjunto una estructura de cuerpo (el cuerpo de los números complejos),es natural preguntarse si es posible hacer lo mismo para $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$,etc.Pueden entonces mencionarse los cuaterniones y el << Teorema final de la Aritmética >> .

Es tambien interesante señalar que,salvo una pequeña modificación en la definición del producto interno(la cual altera la propiedad PI4)),todas las nociones hasta ahora consideradas,con sus respectivas propiedades,pueden introducirse en el conjunto $\mathbb{C}^n$ formadò por todas las n-plas ordenadas de números complejos.

3. Conjuntos

Los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ se usan comunmente para ilustrar graficamente la unión,intersección y diferencia de conjuntos.

Es conveniente considerar los conjuntos que aparecen ligados a ecuaciones o desigualdades (conjuntos-solución).Ejemplo: $x^2 + y^2 < 4$ (círculo << abierto >>), $2x-3y = 2$ (recta), $3x-4y \leq 1$ (semiplano << cerrado >>),etc.La solución de sistemas de ecuaciones y/o desigualdades aparece como intersección de soluciones parciales .En particular,si no existen puntos que satisfacen las condiciones(es decir,el sistema carece de solución) ,el << conjunto >> en cuestión es vacío:es el <u>conjunto vacio</u> ϕ .Este << conjunto >> es entonces indispensable para que la intersección de dos conjuntos sea siempre un conjunto. Igual cosa sucede con los <u>conjuntos unitarios</u> (es decir,los que tienen unicamente un elemento).

El <u>algebra de los conjuntos</u> o estudio de las propiedades de la union,la intersección y la diferencia puede entonces desarrollarse considerando conjuntos << abstractos >>,esto es, conjuntos de elementos de naturaleza no especificada.De igual manera se analizan y definen las nociones de producto cartesiano,relación (o conjunto de parejas ordenadas),equivalencia y cociente.

La noción general de función requiere una atención especial:

(1) Una funciŕn f de un conjunto A en un conjunto B, hace corresponder a cada elemento x de A un elemento y de B y uno solo. Este elemento y es entonces la imagen de x según f y se designa frecuentemente f(x).

Esta importante noción de función puede analizarse en términos de conjuntos.

(2) Una función de A en B es un conjunto f constituido por parejas ordenadas (x,y) (donde $x\in A, y\in B$), tal que:

(i) Para cada x de A existe un y de B tal que $(x,y)\in f$.

(ii) Si (x,y) y (x,y') pertenecen a f, entonces y=y'.

En lugar de $(x,y)\in f$ se escribe $y = f(x)$.

En (1) se ha dado la describción << dinámica >> que comunment hay que tener en mente para manejar funciones. En cambio (2) es la definición precisa del concepto; según ella, una función es un caso particular de relación.

Para indicar que f es una función de A en B y que al elemento x de A le hace corresponder el elemento f(x) de B se escribe

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Si un elemento de A es una pareja ordenada, p.ej. (x,y), entonces, en lugar de f((x,y)) se escribe f(x,y).

Ejemplos de funciones: 1) Cada una de las operaciones entre lo números es una función. Por ejemplo, la adición en $\mathbb{Q}$ es una función de $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$:

$$+: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$(x,y) \longrightarrow x + y$$

(en este caso en lugar de +(x,y) se escribe x + y)

2) El producto unterno:

$$\cdot: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{x},\vec{y}) \longrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y}$$

(en este caso en lugar de $\cdot\,(\vec{x},\vec{y})$ se escribe $\vec{x}\cdot\vec{y}$)

3) La distancia:

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{x},\vec{y}) \longrightarrow d(\vec{x},\vec{y})$$

4) El determinante (de orden 2): Si $\vec{x} = (x_1,x_2)$ y $\vec{y} = (y_1,y_2)$ son elementos de $\mathbb{R}^2$,se define:

$$\det(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 .$$

En lugar de $\det(\vec{x},\vec{y})$ se escribe tambien

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Entonces:

$$\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Esta función tiene propiedades muy interesantes:

Det.1) $\det(a\vec{x} + b\vec{y},\vec{z}) = a\det(\vec{x},\vec{z}) + b\det(\vec{y},\vec{z})$

$\det(\vec{x},a\vec{y} + b\vec{z}) = a\det(\vec{x},\vec{y}) + b\det(\vec{x},\vec{z})$

Det.2) $\det(\vec{x},\vec{y}) = -\det(\vec{y},\vec{x})$

Det.3) $\det(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = 1$ (donde $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$)

5) Sucesiones:una sucesión (p.ej. una sucesión de números racionales) es una función s de $\mathbb{N}^*$ en $\mathbb{R}$:

$$s : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

En en este caso,en lugar de $s(n)$ se escribe s_n .La sucesión s tambien se designa (s_n) ó $(s_1,s_2,\ldots,s_n,\ldots)$

4. Estructuras Algebraicas.

Aunque para ilustrar la definición de ley de composición se cuente con abundantes ejemplos numéricos (las operaciones entre números) es muy conveniente introducir ejemplos de naturaleza diferente;por ejemplo:

1) Adición y multiplicación de matrices:Una matriz(2x2) esta determinada por cuatro números dispuestos en dos filas y dos columnas;se considera que dos matrices A y B,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

son iguales ,si y solo si, $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ y $a_{22} = b_{22}$. La suma A + B, el producto cA (c número real) y el producto AB se definen como sigue:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{21} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \qquad cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

El determinante de A es $\det(\vec{x},\vec{y})$,siendo $\vec{x} = (a_{11}, a_{21})$ y $\vec{y} = (a_{12}, a_{22})$,es decir, $\vec{x}$ (resp.$\vec{y}$) es el vector determinado por la primera(resp.segunda) columna de A

2) Composición de permutaciones : por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3) La << aritmética del reloj >>: adición y multiplicación módulo 12,y en general,módulo un entero $m \neq 0$ (clases residuales).

La formulación del concepto de grupo puede basarse en la observación de varios casos particulares:el conjunto $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$) con respecto a la adición ;el conjunto de los números racionales diferentes de cero (resp.reales,complejos),con respecto a la multiplicación;el conjunto de las matrices (2x2) con respecto a la adición;el conjunto de las permutaciones de $\{1,2,3\}$ con respecto a la composición,etc. En cada uno de estos casos aparece un conjunto G provisto de una <u>ley de composición interna</u> π definida en G,tal que:

G1) $(x\pi y)\pi z = x\pi(y\pi z)$ para todo x,todo y y todo z de G.

G2) Existe en G un único elemento e tal que

$$x\pi e = x = e\pi x$$

para todo x de G.

G3) Para cada x de G existe en G un único elemento x' tal que

$$x\pi x' = x'\pi x = e$$

(x' es el <u>inverso</u> de x y se nota frecuentemente x^{-1})

Se dice entonces que G es un <u>grupo</u> (con respecto a la ley π). Si además se cumple que $x\pi y = y\pi x$ para todo x y para todo y elementos de G, se dice que el grupo es <u>conmutativo</u> o <u>abeliano</u>; en este caso en lugar de π se escribe + y el inverso de x se nota $-x$.

Además de los ejemplos usados para motivar esta definición pueden mencionarse estos:

1. El conjunto de los números racionales (resp. reales) positivos respecto a la multiplicación.

2. El conjunto G formado por las matrices

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

con respecto a la multiplicación.

3. El conjunto $G_L(\mathbb{R}^2)$ formado por todas las matrices (2x2) cuyo determinante no es cero, con respecto a la multiplicación.

La utilidad de una noción abstracta como la de grupo puede ponerse de manifiesto con ejemplos como el siguiente:

<u>Teorema</u>. Si G es un grupo (con respecto a π) y a, b son elementos de G, entonces existe un único elemento x de G tal que $a\pi x = b$

<u>Demostración</u> (i) Existencia: como $a\in G$ entonces $a'\in G$ (por G3), luego $x_o = a'\pi b$ es un elemento de G. Ahora bien, este elemento satisface al ecuación propuesta; en efecto:

$$\begin{aligned} a\pi x_o &= a\pi(a'\pi b) \\ &= (a\pi a')\pi b \quad \text{(por G1)} \\ &= e\pi b \quad \text{(por G3)} \\ &= b \quad \text{(por G2)} \end{aligned}$$

ii) Unicidad: Si x_1 es un elemento de G que satisface la ecuación considerada, es decir, $a\pi x_1 = b$, entonces: $a'\pi\ (a\ \pi\ x_1) = (a'\pi\ b)$; Pero $a'\pi(a\ \pi\ x_1) = (a'\pi a)\pi x_1 = e\pi x_1 = x_1$. Luego $x_1 = a'\pi\ b$, es decir, $x_1 = x_o$.

La sencilla demostración anterior permite hacer una serie de afirmaciones particulares; por ejemplo:

1) Si m,n son números enteros,existe un único número entero k tal que m+k=m

2) Si a,b son números reales positivos,existe un único número real positivo x tal que ax=b.

3) Si A,B son matrices cuyo determiante no e nulo,existe una única matriz X,con determinante no nulo,tal que AX=B.

4) Si P,Q son permutaciones (p.ej. de $\{1,2,3\}$)existe una única permutación R tal que P R = Q . Etc.

Si no mediara el teorema anterior,cada una de estas proposiciones debería ser demostrada individualmente,duplicando innecesariamente los paos de la demostración general.Se ilustra así la <u>economía de pensamiento</u> lograda al razonar en una estructura abstracta.

Una vez adquirida la noción de grupo,pueden introducirse sin mayor dificultad otras estructuras importantes:<u>Anillo</u> (enteros,polinomios,matrices (2x2)),<u>cuerpo</u> (racionales,reales, complejos,clases residuales módulo un número primo) y <u>espacio vectorial</u> ($\mathbb{R}^n$,conjunto de las funciones de un conjunto A en $\mathbb{R}$,o mas generalmente sobre un espacio vectorial E);deben tratarse tambien las nociones de dependencia e independencia lineal,<u>base</u> y <u>dimensión</u>,en un espacio vectorial cualquiera.

5.Algebra Lineal.

Los sistemas de ecuaciones lineales,empezando por los de dos ecuaciones con dos incognitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= y_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

se tratan con ventaja usando matrices:definiendo adecuadamente el producto de una matriz por un vector,el sistema (1) puede escribirse en la forma $A\vec{x} = \vec{y}$ y entonces si $A \in G_L(\mathbb{R}^2)$,puede <u>despejarse</u> $\vec{x}$ << multiplicando ambos miembros >> por A^{-1}, obteniendose $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$.

Con el objeto de tratar los sistamas más generales introduciendo a la vez nociones de grán importancia en toda la matemática, es conveniente considerar las matrices y su relación con las transformaciones lineales.

Una transformación lineal (de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$) es una función $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$f(a\vec{x} + b\vec{y}) = a\, f(\vec{x}) + b\, f(\vec{y})$$

para todo $\vec{x}$ y todo $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$ y todo a y todo b de $\mathbb{R}$ .El núcleo de f es el conjunto N(f) formado por los $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ cuya imagen por f es el vector cero de $\mathbb{R}^m$,el recorrido de f es el conjunto R(f) de los vectores de $\mathbb{R}^m$ que son imágenes por f de algún $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ .N(f) y R(f) son a su vez espacios vectoriales: son subespacios respectivamente de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ .El rango de f es la dimensión de R(f).

Para cada transformación lineal f existe una matriz A (de m filas y n columnas) tal que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ A en entonces la matríz de f.

Hay otros temas pertinentes:

1) Matrices y transformaciones.- << Identificación >> entre el conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y el conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$ de todas las matrices de m filas y n columnas. Transformaciones biunívocas, sobreyectivas y biyectivas; inversa de una transformación biyectiva; composición de transformaciones. Extensión de estas nociones a funciones cualesquiera. Composición de transformaciones y multiplicación de matrices. Adición y multiplicación por escalar de matrices y de transformaciones; operaciones analogas definidas en el conjunto de todas las funciones de un conjunto A en $\mathbb{R}$ o en un espacio vectorial E.

2) Determinantes.-Generalización de la función det (de orden 2) : se considera la función det de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ (n <<factores >>) en $\mathbb{R}$ que es: (Det1) Multilineal (es decir, lineal an cada una de sus n variables. (Det2) Antisimétrica y (Det3) Vale 1 en $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Unicidad, Propiedades. Diversas formas de desarrollar un determianate. Determinantes extraidos de una matriz, cálculo del rango de una matriz.

3) Sistemas de Ecuaciones Linales.-Notación matricial:un sistema de la forma

$$(s)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

es equivalente a la ecuación vectorial

$$f(\vec{x}) = \vec{y}$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ siendo A la matriz del sistema,es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El núcleo de la transformación linel f esta formado por las solusiones del sistema (s) homogéneo (es decir,el sistema (s) con $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$).El sistema (s) tiene solución si y solo si $\vec{y} \in R(f)$.Basandose en la ecuación dim N(f) + dimR(f) = n pueden analizarse completamente los sistemas lineales.

Para resolver efectivamente este tipo de sistemas lineales se cuenta con la regla de Cramer,método de aproximaciones sucesivas y métodos para invertir matrices.

Tambien son importantes los sistemas de desigualdades lineales relacionados con la programación lineal.

6: Transformaciones.

La consideración detallada de las traslaciones,rotaciones simetrías,semejanzas,isometrías,etc. (en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$) y de los diversos grupos formados por transformaciones de este tipo permite entre otras cosas un enfoque adecuado de la <u>geometría</u> como estudio de las propiedades(de las figuras) invariantes bajo un determinado grupo de transformaciones.

7.Polinomios

Tradicionalmente los polinomios se estudian desde dos puntos de vista diferentes:a) Como << expresiones >> que se suman,multiplican,dividen y factorizan y que dan origen a ecuaciones.b) Como funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que se derivan,integran y de las cuales se estudia su variación.

Dejando aparte ,inicialmente el enfoque b),puede desarrollarse el primero sistematizando su estudio por del uso de conceptos como Anillo,dominio de integridad y cuerpo.La analogía entre $\mathbb{Z}$ y el conjunto $\mathbb{R}[x]$de los polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{R}$,y entre la construcción de $\mathbb{Q}$ y la definición de las expresiones racionales,facilita la consideración de los polinomios y las fracciones y proporciona bases para tratamientos posteriores de caracter más abstracto.

8.Estructuras Métricas.

En $\mathbb{R}^n$ existen diversas definiciones aceptables de << distancia >>;por ejemplo,si se conviene que:

$$d_1(\vec{x},\vec{y}) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \ldots + |x_n-y_n|$$

$$d_2(x,y) = \max\left\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\ldots,|x_n-y_n|\right\}$$

se verifica facilmente que tanto d_1 como d_2 satisfacen las condiciones fundamentales (D1),(D2),(D3).(la interpretación de d_1 y d_2 en el plano es muy conveniente).Como muchas consecuencias de caracter topológico (relativas a límites y continuidad) dependen unicamente de estas tres propiedades,salta a la vista la utilidad de la estructura de espacio métrico: Un espacio métrico es un conjunto E provisto de una función

$$d: E\times E \longrightarrow E$$

que satisface las propiedades (D1),(D2),(D3).Los ejemplos abundan.

En un espacio métrico pueden definirse vecindades,conjuntos abiertos,conjuntos cerrados y muchas otras nociones que pueden ilustrarse con mucha cleridad en el plano cartesiano y en la recta real.

Se esta ahora en posición de introducir los conceptos fundamentales del Análisis:Sucesiones convergentes,series(incluyendo la mención de ls series que representan a las funciones elementales).Funciones continuas,límites.

9.Cálculo numérico.

La importancia actual de los métodos numéricos justifica la presentación temprana de sus aspectos elementales:aproximación de funciones por medio de polinomios (interpolación),diferencias finitas,cálculo aproximado de áreas (integración aproximada) y además métodos numéricos en algebra lineal.

10. Estadística y Probabilidades.

Es tambien recomendable una introducción a la teoría de la probabilidad y a la Estadística.La complicación en estos temas puede reducirse a un mínimo y en cambio su utilidad es considerable.Pueden por ejemplo estudiarse:Frecuencias relativas y la teoria de la probabilidad(como modelo matemático adecuado para analizar fenómenos aleatorios),axiomas de la probabilidad,distribuciones.Terminología estadística básica,procesamiento y presentación de datos,características de las muestras,etc.

BIBLIOGRAFIA

La producción de buenos textos en los paises de habla hispana,y especialmente en el nuestro,es por desgracia casi completamente nula.Esta situación se ha remediado ligeramente con alguna traducciones recientes de exelentes obras norteamericanas,inglesas y francesas.

A continuación mencionaremos algunos textos y obras de consulta de diferentes niveles,que consideramos recomendables:

Algebra.

1.Johnson,R.E. y otros.Modern Algebra (First course),Modern Algebra (Second Course).Addison-Wesley.1962.

2.Allendoerfer,C.B.-Oakley,C.O. Fundamentals of Freshman Mathematics .Mc.Graw-Hill (1959).Principles of Mathematics Mc.Graw-Hill (1955).

3.Taylor,H.E.-Wade,T.L. Matemáticas Básicas con vectores y matrices.Limusa-Wiley,Mexico (1966).

4.Toskey,B.R. College Algebra (A modern aproach).Addison-Wesley (1962).

5.Queysanne,M.-Delachet,A. El Algebra Moderna.Vergara Editorial (Barcelona).

6.Birkhoff,G.-MacLane,S. Algebra Moderna.Editorial Teide (Barcelona).(1954).

7.Lang,S. Linear Algebra.Addison-Wesley (1966).

Geometría

1.Moise,E.E. Geometria Moderna . Addison-Wesley (1966). Elementary Geometry fron an advanced standpoint.Addison-Wesley.

2.Delachet,A. La Géométrie Élémentaire.Presses Universitaires de France.

Cálculo

1.Lang,S. A first Course in Calculus y A second Course in Calculus .Addison-Wesley (1964).

2.Apostol,T. Calculus (Vol.I y Vol.II).Blaisdell.

Fundamentos y otros

1. Wilder, R.L. Introduction to the Foundations of Mathematics. John Wiley . 1965.
2. Kemeny, J.G. y otros. Finite Mathematical Structures. Prentice Hall 1959.
3. Goldberg, S. Probability, an Introduction. Prentice-Hall 1960.

Didactica

J. Piaget, E. Beth, J. Dieudonné, A. Lichneriwicz, G. Choquet, C. Gattengo. L'Enseignement des Mathématiques. Delachaux-Niestlé 1965.