Boletín de Matemáticas
Vol.II,1-2(1968),págs.18-35

ALGUNOS ASPECTOS DE LA MATEMATICA MODERNA

por

Gérard JOUBERT

Asistimos desde hace treinta años a un extraordinario desarrollo de la matemática. Las causas de este desarrollo son múltiples: El número creciente de investigadores en toda disciplina, en particular, em matemáticas, y los medios materiales limitados que necesita la investigación matemática, son causas del desarrollo de ésta, fáciles de descubrir. Sin embargo, hay otras más interesantes y más fundamentales, pero quizás más difíciles de analizar: unas están ligadas a la esencia misma de la matemática moderna que, liberada de las constricciones a las cuales se supeditaba la llamada matemática clásica, permite hoy las iniciativas más audaces; las otras provienen de las interacciones de la matemática con la física, interacciones que se efectúan, por lo demás, en beneficio de ambas.

Nos proponemos en esta conferencia analizar los dos tipos de causas anteriores y, particularmente, las primeras, de las cuales nos vamos a ocupar para comprender mejor por qué el matemático moderno puede más fácilmente que su predecesor dejar correr su imaginación creadora. Es, pues, necesario, creo, examinar las grandes líneas de la evolución del pensamiento matemático.

Históricamente hablando, nociones matemáticas relativamente abstractas como la de número entero o de medida de las cantidades, se hallan ya en los documentos más antiguos que han llegado hasta nosotros desde Egipto o Caldea, en donde ya se utilizaban convenientemente métodos algebraicos seguros. Sin embargo, la ausencia de demostraciones no permite considerar estos hechos como resultados de un pensamiento matemático verdadero. Así, pues, es a los griegos a donde necesitamos remontarnos para hallar las primicias de un tal pensamiento.

Antes de emprender esta ojeada histórica, volvamos un poco sobre lo que se entiende por «hacer matemática». Se puede decir, que la meta de toda actividad matemática es la obtención, mediante un raciocinio deductivo, de propiedades de entes de los cuales se conocen la definición y las propiedades iniciales.

Es, pues natural, si se quiere estudiar con detalle el estado del pensamiento matemático de una cierta época de la historia, hacerse las siguientes preguntas:

1) ¿Cuál era la naturaleza de los objetos que se consideraban ?

2) ¿Cuáles eran las propiedades iniciales que se les atribuían a dichos objetos ?

3) ¿Cuáles eran los métodos de raciocinio que se utilizaban ?

Es claro que la última pregunta que nos acabamos de hacer depende, de hecho, de la lógica, la cual, como parte de la filosofía, cubre un campo de aplicaciones más vasto que el de la matemática; por eso es deseable estudiar paralelamente la evolución de la lógica, pero como evidentemente no podemos hacerlo ahora, nos limitaremos a trazar la evolución de la lógica sólo en la medida en que ésta ha actuado sobre la matemática.

La historia matemática comprende esencialmente dos grandes períodos; uno muy largo que se extiende desde los griegos, cinco siglos antes de Cristo hasta el fin del siglo XVIII; el otro mucho más corto que empieza con el siglo XIX, pero que es fundamental puesto que ha visto nacer la denominada matemática moderna.

El primer período se caracteriza por un acuerdo casi general de todos los matemáticos sobre la manera de contestar las preguntas que nos hemos hecho. En primer lugar los objetos del matemático pertenecen a tres categorías esenciales: las cantidades, los números y las figuras. Por cantidad se entiende todo lo que se puede, hablando de una manera vaga, aumentar o disminuir, es decir, esencialmente las longitudes, las superficies y los vólumenes. En los números, podemos poner en primer lugar los números enteros ya bien conocidos, en segundo lugar, los números racionales, que estaban asociados a operaciones geométricas, como la división de segmentos en partes iguales es decir, de hecho, a una noción de medida de cantidades y finalmente algunos números irracionales asociados tambien a la medida de cantidades. Por ejemplo, era conocido desde la antiguedad que si el lado de un cuadrado tiene por medida 1, la diagonal de este cuadrado tiene por medida $\sqrt{2}$; un número irracional; mas aún existía una demostración correcta de este último hecho, que utilizaba lo que se llama hoy un raciocinio por el absurdo. En cuanto a las figuras ellas son las de la geometría tradicional de

Euclides que están formadas en especial por puntos, rectas, planos, círculos etc..

El hecho más notable en esta concepción de los objetos matemáticos es que estos objetos están dados como objetos de la naturaleza y que no está en nuestro poder el cambiarlos, así como un físico no puede cambiar los fenómenos naturales. Es de anotar que sobre este punto, la unanimidad es completa cualesquiera que sean los matices filosóficos que rodean esta concepción.

En este espíritu,las propiedades iniciales de esos objetos también están dadas y son independientes de la voluntad de quien las estudia: éste posee conocimiento de ellas por la intuición, que no puede engañarle si la emplea correctamente. Por ejemplo, la suma y la multiplicación de los números enteros están dadas por la naturaleza y no es posible concebir que dos más dos sea distinto de cuatro. De la misma manera la propiedad según la cual por un punto exterior a una recta dada pasa una y una sola paralela a la recta dada, propiedad conocida desde la antiguedad con el nombre de postulado de Euclides, era admitida por todos.

Filósofos de gran valor como Descartes y Pascal en Francia y Kant en Alemania fueron ardientes defensores de estas doctrinas pero, sinembargo, conviene notar que sobre estos dos puntos los griegos parecían tener conceptos más claros que sus sucesores y aunque no pudieron delucidar las nociones primitivas que eran el punto de partida de sus nociones tuvieron más o menos conciencia de que había en todas estas nociones una parte de arbitrario y una parte de convención entre los que las estudian. Además, para otras nociones no consideradas como primitivas se propusieron el problema de su existencia; es decir, vieron la necesidad de postular esta existencia o demostrarla. Es así como Euclides considera la noción de postulado como referente a propiedades primitivas de los objetos o como propiedades resultantes de un acuerdo convencional entre quienes las utilizan.

Los métodos de raciocinio no evolucionaron casi durante este período, de manera que es a los griegos a donde debemos remontarnos, para hallar los fundamentos lógicos básicos utilizados en esta etapa de la matemática; es igualmente a ellos a quienes corresponde el mérito de ordenar las demostraciones matemáticas en una sucesión de eslabones tal que el paso de un eslabón al siguiente no deja lugar a duda, lo que hace que la demostración obtenga el asentimiento universal.

Además, es notable que los textos más antiguos que tenemos sobre este período, nos muestran ya un método bastante cercano a la perfección, atribuyéndose a la Escuela Pitagórica el perfeccionamiento de este método.

En cuanto a la lógica, en general, la obra cumbre de este período de investigaciones filosófico-matemáticas es la de Aristóteles. Su gran mérito radica en haber conseguido sistematizar y codificar por primera vez, los procedimientos de raciocinio que eran vagos o que habían sido mal formulados por sus predecesores. La idea esencial de su obra, en sus relaciones con la matemática, es la posibilidad de reducir todo raciocinio a una aplicación sistemática de un pequeño número de reglas inmutables, independientes de la naturaleza particular de los objetos considerados, pero como su obra se dirige exclusivamente al estudio de lo que se llama ley del silogismo, es claro que ella no da cuenta de todas las operaciones lógicas utilizadas por el matemático.

El estado muy rudimentario de esta lógica y su estancamiento durante todo este período, en el cual Aristóteles permanece como maestro incontestado, debía impedir todo progreso en el análisis del raciocinio matemático, hasta el caso de que las reglas elaboradas por los matemáticos griegos, más avanzados que Aristóteles, no fueron discutidas. A lo sumo, durante esta etapa, se pueden señalar algunas tentativas de formalización que fueron los primeros pasos en la elaboración de la lógica formal, pero que no condujeron a ningún resultado nuevo.

En resumen, durante este período no hubo ninguna evolución sensible de las respuestas a las tres preguntas que nos hemos formulado, y aunque los conocimientos matemáticos aumentaban regularmente, se consideraba que los objetos, como sus propiedades primitivas, estaban dados, y se tenía plena confianza en las reglas de raciocinio dadas por los griegos.

El siglo XIX, en cambio, iba a ser testigo de trastornos considerables: se reconsideraron todas las bases de la matemática y el resultado de todas estas nuevas investigaciones fue el advenimiento de la llamada teoría de los conjuntos, que después de muchas viscisitudes, ha llegado a constituir la base de toda la matemática.

El primer golpe que se dió a las concepciones clásicas fue la aparición, a principios del siglo XIX de las geometrías no-euclidianas de Riemann y Lobacheski. En estas geometrías se conservan las nociones primitivas de punto, recta etc., pero se abandona el postulado de Euclides sobre las rectas paralelas. Se supone, por ejemplo, que por un punto pasa una infinidad de paralelas a una recta dada. Los matemáticos descubrieron entonces que, atribuyendo a los objetos matemáticos propiedades diferentes de las que se creían inmutables, era aun posible hacer matemáticas . Los raciocinios que se efectuaban a partir de estas nuevas premisas, parecían tan rigurosos como los otros y los resultados que se obtenían parecían tambien verdades matemáticas. Sinembargo, la mayor parte de los matemáticos se preguntaban todavía cual era entre estas geometrías, las que se hallaba verificada por la experiencia; provocaban así, el problema de las relaciones entre la matemática y la física, relaciones sobre las que hablaremos mas adelante. De todas maneras, admitían facilmente que, si una geometría no correspondía a la naturaleza, sus teoremas continuaban siendo verdaderos.

Quebrada la confianza en la intuición geométrica, los matemáticos esperaban hallar en lo que se llama

Análisis, y especialmente en la teoría de funciones, un terreno más sólido, ya que el Análisis por tener como punto de partida los números reales, cuya noción, como lo acabamos de notar, estaba ligada a la de cantidad era por tanto muy intuitiva. Así, descubriendo con temor que ciertas funciones continuas no tenían derivadas, o si se quiere que ciertas curvas no tenían tangentes, y otros engendros (para ellos) de esta especie se dieron cuenta que la intuición matemática en general no era muy segura y que, por tanto, era necesario revisar completamente las bases de la matemática.

Para entender, mejor, la desazón que cundió en los espíritus de esa época debemos señalar: el embarazo de los algebristas ante los nuevos números que se introducían poco a poco, a saber, los números negativos, los números imaginarios, etc., objetos matemáticos éstos, que no tenían ninguna representación concreta y que por lo tanto no estaban dados por la naturaleza, y en el estudio profundizado de la geometría de Euclides la observación de varias obscuridades en los raciocinios y lagunas en las definiciones; citemos, por ejemplo, la igualdad entre triángulo o la noción de punto situado entre dos rectas.

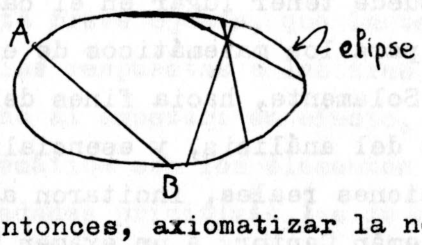
Estos hechos, incitaron a los matemáticos del siglo XIX a admitir que la naturaleza misma de los objetos que estudiaban, era en el fondo secundaria y que lo que en realidad importaba eran las relaciones entre estos objetos. Notaron además que las relaciones primitivas entre estos objetos podían ser modificadas a voluntad. Se encaminaban así hacía lo que se llama ahora el método axiomático, método que consiste esencialmente en raciocinar sobre entes abstractos provistos de propiedades arbitrarias; nació de esta manera la noción de estructura matemática.

En este espíritu, fueron revisados, en particular por el matemático alemán Hilbert, los fundamentos de la geometría euclidiana, lo mismo que los de las demás geometrías hasta el punto de que los axiomas de cada una de ellas fueron claramente explicitados.

Lo anterior nos hace ver que las dos primeras preguntas que nos hemos hecho, recibieron durante el siglo XIX respuestas muy diferentes a las de los siglos anteriores. Lo mismo ocurrió con la tercera la cual fue objeto de numerosas investigaciones por parte de grandes matemáticos y lógicos como Hilbert (ya citado),Leibnitz y Frege alemanes, Peano italiano y Boole inglés, investigaciones que permitieron poco más o menos la formalización del raciocinio matemático y precisar lo que era una deducción rigurosa.

Es interesante notar, que durante el siglo XIX se pudieron definir correctamente los números racionales, construyéndolos a partir de los números enteros, y los números irracionales. El método utilizado consistía en considerar un número racional como una clase de parejas de enteros, de hecho, la clase de las fracciones iguales a una de ellas y un número real como una clase de números racionales. Por ejemplo, se puede decir que la clase de todos los racionales x, tales que $x^2 < 2$ define el número real $\sqrt{2}$; basta después utilizar los números decimales que se acercan a $\sqrt{2}$ para obtener la escritura habitual. Por lo demás, los números imaginarios y la geometría euclidiana pudieron ser interpretados en términos de números reales mediante la geometría analítica y en fin, las geometrías no euclidianas recibieron modelos euclidianos. Por ejemplo, si se considera una circunferencia o una elipse y su interior y se llama recta toda cuerda de la circunferencia (o elipse) y se dice que dos rectas son paralelas si no se encuentran es claro entonces, que por un punto interior de la circunferencia (o elipse) pasa una infinidad de rectas paralelas a una recta dada.

De todas estas sucesivas construcciones resultó que, finalmente, toda la matemática se derivaba de la noción de número entero que quedaba así como única noción pri-



mitiva. Bastaba, entonces, axiomatizar la noción de entero para lograr las bases definitivas de la matemática. Fue el matemático alemán Dedekind quien emprendió esta axiomatización, utilizando los primeros resultados de la recién acabada de nacer teoría de conjuntos. En el momento mismo cuando ésta se terminaba, es decir, en el momento cuando parecía que todo estaba resuelto, numerosas controversias iban a atormentar al mundo matemátidurante un lapso de 30 años, comprendido entre 1900 y 1930.

Hablemos pues, ahora, de esta teoría de los conjuntos que fue objeto de tantas polémicas. Siempre los matemáticos en sus raciocinios manejaban los conjuntos en el sentido intuitivo de colección de objetos. Por ejemplo, conocían ya bien la noción de inclusión de un conjunto en otro. En cambio, la consideración de conjuntos infinitos, es decir, que contienen una infinidad de elementos, les había asustado durante mucho tiempo: un ejemplo simple que resulta de una observación de Galileo puede mostrar esta desconfianza hacia el infinito; nota éste que si asocia a todo entero n su cuadrado (n^2), se establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\mathbb{N}$ de todos los enteros, y una parte estricta del mismo, a saber el subconjunto de los cuadrados perfectos. Un tal fenómeno que no puede tener lugar en el caso finito era naturalmente para los matemáticos de esa época algo inquietante. Solamente, hacia fines del siglo XIX las necesidades del análisis, y esencialmente el estudio de las funciones reales, incitaron a un gran matemático, el alemán Cantor, a un exámen más profundizado de estas cuestiones lo cual lo condujo a hechar las bases de la teoría de conjuntos. Los primeros resultados obtenidos por Cantor fueron precisamente utilizados por Dedekind para axiomatizar los enteros. Sin embargo, a fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX aparecen los llamados conjuntos paradójicos, como, por ejemplo, el conjunto de todos los conjuntos,

conjuntos cuya consideración conducía a contradicciones intolerables. Fueron por eso muchos los matemáticos que se dedicaron al estudio de estos asuntos con el fin de salir del atolladero.

Sería evidentemente delicado, dar aquí precisiones sobre estos problemas y aun dar una definición correcta y completa de un conjunto. Sinembargo, se puede notar que la teoría de los conjuntos debe la resolución de sus problemas al progreso de la lógica formal de la cual ya hemos hablado. En espíritu, la lógica formal no busca lo que son las cosas que se llaman conjuntos ni lo que son los elementos de estos conjuntos, se esfuerza solamente en enumerar las condiciones que es necesario imponer a la relación de pertenencia de un elemento a un determinado conjunto. Se efectúa así, con un lenguaje formalizado, una axiomática de los conjuntos, evitando las contradicciones.

Resulta de esta breve ojeada, que la teoría de los conjuntos nos da las respuestas a las tres preguntas que nos hemos hecho al empezar: en efecto, ahora los objetos de la matemática son los elementos de los conjuntos; las propiedades primitivas, las de estos objetos; los axiomas, los de la teoría de conjuntos y los métodos de raciocinio los que fue necesario profundizar para resolver los problemas de la teoría de conjuntos. Nació así, una ciencia de los fundamentos que participa de la matemática y de la lógica formal y que es llamada hoy en día, la Metamatemática.

Empero no se puede pretender que todos los problemas han sido resueltos. Por ejemplo, no se puede afirmar todavía que la matemática no llegará a una contradicción fantástica; en cambio recientemente un metemático de los EE. UU. (COHEN) ha resuelto un problema en suspenso desde Cantor, y de todas maneras podemos decir que la teoría de los conjuntos es lo suficientemente sólida para servir de punto de partida a una matemática rigurosa.

Para ilustrar lo que precede y para dar una idea de la construcción de la matemática a partir de la teoría de los conjuntos, vamos a definir la noción de estructura. Para ello es necesario; en primer lugar, introducir dos nociones de teoría de conjuntos, la de aplicación de un conjunto hacia otro y la de conjunto producto.

Para entender estas nociones basta tener en mente la noción de conjunto en el sentido intuitivo de colección de objetos cuya naturaleza no es precisada. La pertenencia de un elemento x a un conjunto E se notará $x \in E$.

Consideremos dos conjuntos E y F, se llama aplicación f de E hacia F y se nota $f: E \to F$ cualquier procedimiento que a todo elemento $x \in E$ asocia un elemento único bien determinado $y \in F$, el cual se nota $y = f(x)$. Por ejemplo, si se escribe $y = x^2 + 1$ se define una aplicación del conjunto R de los números reales en sí mismo. Esta aplicación asocia a todo número real x, el número $x^2 + 1$, procedimiento que es de cálculo, aunque se pueden naturalmente considerar otros muy diferentes, como el que asocia a todo número real x, escrito en la forma decimal, $x = N,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, el número real $y = f(x) = N,\alpha_1\alpha_3 \ldots \alpha_{2n+1} \ldots$, en donde los α_i son iguales a uno de los números 0,1,2, ..., 9 y N es un entero.

Consideremos nuevamente dos conjuntos E y F; se llama producto cartesiano de estos dos conjuntos, y se nota $E \times F$, el conjunto de todas las parejas ordenadas (x,y) formadas por un elemento $x \in E$ y un elemento $y \in F$. Por ejemplo, si se identifica $\mathbb{R}$ con una recta, el plano se identifica con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, lo cual equivale a elegir en el plano dos ejes de coordenadas.

Con estas nociones, podemos ahora definir una tercera, la de ley de composición interna sobre un conjunto. Consideremos un conjunto E; se llama ley de composición interna sobre E una aplicación f del producto $E \times E$ en E: $f: E \times E \to E$; es decir, a toda pareja $(x,y) \in E \times E$ se asocia un elemento $z \in E$, $z = f((x,y))$, el cual se nota en general y más simplemente $z = xy$ ó $z = xoy$, en cuyo caso se dice que z es el compuesto de x é y. Los ejemplos simples de leyes de composición interna los constituyen la adición y la multiplicación de números enteros. En efecto, es claro que hacer la suma ó el producto de dos enteros x é y equivale a asociar a la pareja (x,y) el entero $x + y$ ó el entero xy.

Pero sobre el mismo conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros se pueden considerar otras leyes de composición interna, por ejemplo, la que a toda pareja (x,y) de enteros asocia el máximo común divisor de x e y si los enteros x e y no son ambos iguales a cero, y que a la pareja $(0,0)$ asocia el elemento 0.

Se puede también sobre el conjunto formado por los cuatro enteros 0, 1, 2, 3 definir una ley de composición interna por medio de la tabla siguiente:

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

donde, por ejemplo, el compuesto de 2 y 3 se encuentra en la intersección de la tercera fila y la cuarta columna de la tabla.

Se entiende ahora, después de estos ejemplos, por qué la igualdad $2 + 2 = 4$ no es inmutable, ya que de hecho depende de la ley de composición elegida: con respecto a la adición ordinaria tenemos $2 + 2 = 4$, y con respecto a la adición definida por la tabla se tiene $2 + 2 = 0$.

Volviendo al caso general, vamos ahora a tratar de definir la noción de estructura algebraica. Se dice que sobre un conjunto E se define una estructura algebraica si se dan sobre él una o más leyes de composición interna supeditadas a verificar ciertas condiciones que se dicen los axiomas de la estructura. Por ejemplo, se puede imponer a una de tales leyes que verifique la condición (x.y).z = x.(y.z) para todo x, y, z ∈ E (axioma de asociatividad) (la ley se ha notado .). Pues bien, el Algebra Moderna es el estudio de las estructuras algebraicas.

Veamos sobre estos ejemplos cómo la Matemática Moderna está liberada de la confrontación constante con la Naturaleza a la cual estaba sometida la Matemática Clásica, y comprendemos por qué un matemático moderno puede con más facilidad dejar correr su imaginación tal como lo habíamos afirmado en la introducción. Pero, en esa misma introducción hemos dicho también que una de las causas de desarrollo de la Matemática es su interacción con la Física que es la ciencia de la Naturaleza. Esto puede parecer contradictorio, pero para mostrar que esta contradicción es sólo aparente y que, a despecho de su abstracción siempre muy grande, la Matemática halla en la Física las fuentes de numerosas teorías, es necesario considerar rápidamente los métodos y las metas de la Física; este estudio permitirá igualmente ver que los progresos de la Física no habrían podido cumplirse sin los de la Matemática.

Las metas de la Física son claras: estudiar experimentalemnte los fenómenos de la naturaleza a fin de descubrir las leyes que los rigen y después deducir de estas leyes las consecuencias que permitan explicar los fenómenos y prever su evolución. Por ejemplo, el estudio experimental de la luz condujo a los físicos a considerarla como un fenómeno vibratorio, concepción que les permitió explicar toda una serie de fenómenos como las interferencias y la difracción.

Podemos entonces para la Física hacernos las mismas preguntas que para la Matemática, lo que puede conducir a dar las respuestas siguientes:

Los Objetos de la Física son los fenómenos de la Naturaleza y las relaciones primitivas entre estos objetos, las leyes de la Naturaleza. Es decir, ambas cosas están dadas independientemente de nuestra voluntad, la cual no interviene sino en la parte deductiva de la Física.

Pero si examinamos de cerca los métodos utilizados por el físico, comprobaremos, de hecho, que éste asocia a los fenómenos que estudia variables matemáticas y que las leyes que busca experimentalemnte son relaciones entre esas variables y, por tanto, las consecuencias que saca de estas leyes no son sino interpretaciones de resultados obtenidos por medio de cálculos matemáticos.

Se comprende ahora que, desde este punto de vista, no hay objetos físicos determinados definitivamente y que éstos, para un fenómeno particular, dependen de la concepción matemática de quien los estudia y lo mismo se puede decir sobre las relaciones entre estos objetos: basta considerar la historia de la luz para hallar variaciones considerables en la concepción de la luz.

Disponiendo de entes nuevos dados pore el progreso de la Matemática, la Física provee en recompensa de nuevos problemas a la matemática, o más precisamente, de nuevas estructuras que estudiar; estructuras que correctamente axiomatizadas está a la base de numerosas teorías de la Matemática Moderna.

Acabamos de ver cómo la Física contribuye eficazmente al desarrollo de la Matemática, pero es también claro que teorías físicas como la relatividad no hubieran podido nacer sin la existencia de teorías matemáticas audaces como la de las Geometrías no-euclídeas.

Espero ahora que el objetivo de esta conferencia, que no era otro que mostrar algunas causas del desarrollo de la Matemática, analizando algunos de sus aspectos, haya sido alcanzado.

Finalmente quiero hacer votos para que en Colombia haya muchas vocaciones matemáticas que contribuirán al desarrollo de esta Ciencia.

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá
Département de Mathématiques
Université de Dijon
Dijon

(Recibido en noviembre de 1967)