Boletín de Matemáticas
Vol.II(1968) págs. 36-62

FUNDAMENTOS DEL ANALISIS, I

por

Alonso TAKAHASHI

§0. CONVENCIONES

En este parágrafo las letras p y q designarán enunciados (proposiciones, condiciones, propiedades).

1) ~p es la negación de p. Se lee "no p" ó "es falso que p". Si p es una proposición falsa, ~p es una proposición verdadera; si p es una proposición verdadera, ~p es una proposición falsa. Si p es una condición entonces un objeto satisface la condición ~p cuando y solamente cuando no satisface la condición p.

2) p∨q es la disyunción de p y q; se lee "p ó q" (p es cierta ó q es cierta ó ambas son verdaderas). Si p y q son proposiciones entonces la proposición p∨q es verdadera cuando, y solamente cuando, una de las proposiciones p y q es verdadera.

3) p => q es una abreviación de (~p)∨q; se lee "si p entonces q", "p implica q" ó "q sólo si p".

Cuando p es falsa, ~p es cierta, luego p => q es cierta (aunque q sea falsa (!)).

4) p∧q es una abreviación de

$$\sim((\sim p)\vee(\sim q));$$

se lee "p y q".

5) $p \Leftrightarrow q$ es una abreviación de

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p);$$

se lee "p y q son equivalentes" ó "p si y sólo si q". En lugar de "si y sólo si" suele escribirse "sii". Dos proposiciones equivalentes son simultáneamente verdaderas o simultáneamente falsas.

ej. (1) p y $\sim\sim p$ son equivalentes.

(2) $p \vee q$ y $(\sim p) \Rightarrow q$ son equivalentes.

Si $p\{x\}$ es una condición que se refiere a x,

7) $(\exists x)(p\{x\})$ se lee "existe (por lo menos) un x tal que $p\{x\}$" ó "para algún x, $p\{x\}$". $\exists$ es el <u>cuantificador existencial</u>.

Para indicar que existe un objeto, y solamente uno, que satisface la condición $p\{x\}$ se escribe a veces $(\exists | x)(p\{x\})$, y se lee "existe un x, y uno solo, tal que $p\{x\}$" ó "existe un único x tal que $p\{x\}$".

8) $(\forall x)(p\{x\})$ se lee "para todo x, $p\{x\}$" ó "cualquiera sea x, $p\{x\}$". $\forall$ es el <u>cuantificador universal</u>.

$\sim(\forall x)(p\{x\})$ es equivalente a $(\exists x)(\sim p\{x\})$.

$\sim(\exists x)(p\{x\})$ es equivalente a $(\forall x)(\sim p\{x\})$.

§1. LA TEORIA DE CONJUNTOS

1. <u>Conjuntos</u>. La Matemática estudia ciertos <u>objetos</u>, atendiendo especialmente a sus <u>relaciones</u> mutuas.

A los objetos estudiados por la Matemática se acostumbra llamarlos <u>conjuntos</u>; resulta entonces que "objeto" y "conjunto" son sinónimos: cada uno de los objetos considerados es un conjunto. Así, por ejemplo, un <u>número</u> resulta ser un conjunto más o menos "complicado".

Los conjuntos se designan por medio de letras: x, y, ..., a, A, X, ..., u otros signos adecuados. Comúnmente se dice, por ejemplo, "el conjunto x" en lugar de "el conjunto designado por x".

2. Igualdad. Para indicar que dos signos, por ejemplo, las letras a y b, se usan para designar un mismo objeto (es decir, un mismo conjunto), se escribe

$$a = b,$$

y se lee "a (es) igual a b". En otros términos: a = b significa que las letras a y b son nombres del mismo objeto.

La negación de $a = b$ es $a \neq b$ (leído "a (es) diferente de b"). Con más precisión: $a \neq b$ es una abreviación de

$$\sim(a = b) .$$

Son propiedades de la igualdad:

(ig.1) $\alpha = \alpha$, cualquiera sea α.

(ig.2) Si $p\{x\}$ es una condición, y $\alpha = \beta$ entonces

$$p\{\alpha\} \Longleftrightarrow p\{\beta\} .$$

A partir de estas propiedades pueden demostrarse las siguientes:

(ig.3) Si $\alpha = \beta$ entonces $\beta = \alpha$.

(ig.4) Si $\alpha = \beta$ y $\beta = \gamma$ entonces $\alpha = \gamma$.

Unicidad. Una afirmación de "unicidad" es una proposición del tipo "existe a lo más un x tal que $p\{x\}$", donde p es una condición dada; es decir, se afirma que, si existe un objeto que satisfaga la condición p, entonces ése es el único objeto que la satisface. Para demostrar esto basta suponer que α y β satisfacen dicha condición, y bajo esta hipótesis probar que $\alpha = \beta$. En otras palabras, se trata de demostrar que

$$(p\{\alpha\} \wedge p\{\beta\}) \Rightarrow \alpha = \beta .$$

3. Pertenencia. Se admite la existencia de una relación que se verifica entre ciertos pares de objetos (conjuntos); para expresar que el objeto a está en dicha relación con el objeto b, se escribe

$$a \in b.$$

Se dice en este caso que "a pertenece a b" (o que "a es un elemento de b", "a es un miembro de b" ó "a está en b").

La negación de $a \in b$ se escribe $a \notin b$.

En lugar de

$$a \in x \wedge b \in x \wedge \ldots \wedge \ell \in x ,$$

se escribe comúnmente

$$a, b, \ldots, \ell \in x .$$

Cuantificadores localizados. Sean A un conjunto y $p\{x\}$ una condición.

(1) En lugar de $(\exists x)(x \in A \wedge p\{x\})$ suele escribirse

$$(\exists x \in A)(p\{x\}),$$

leyéndose "existe un x de A tal que $p\{x\}$" ó "para algún x de A, $p\{x\}$".

(2) En lugar de $(\forall x)(x \in A \Rightarrow p\{x\})$ suele escribirse

$$(\forall x \in A)(p\{x\}),$$

leyéndose "para todo x de A, $p\{x\}$" ó "cualquiera sea el elemento x de A, $p\{x\}$".

Se dice entonces que los cuantificadores han sido localizados en A.

4. Inclusión. Si todo objeto que está en la relación de pertenencia con a lo está también con b, se dice que a es un subconjunto (o **una parte**) de b, o que a está contenido en b, o que b contiene a a, y se escribe

$$a \subset b.$$

La afirmación $a \subset b$ significa entonces que para todo x, si x es un elemento de a entonces x es un elemento de b. Luego

$$a \subset b \text{ si y sólo si } (\forall x)(x \in a \Rightarrow x \in b).$$

Obsérvese que, para todo a

$$a \subset a.$$

En lugar de $a \subset b$ puede escribirse $b \supset a$.

La negación de $a \subset b$ se escribe $a \not\subset b$ (ó $b \not\supset a$). Obsérvese que $a \not\subset b$ no significa que $b \subset a$.

§2. PRINCIPIOS BASICOS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS.

Para desarrollar la Teoría de Conjuntos se admiten nueve Principios Básicos, de los cuales se espera que no encierren contradicción alguna (?).

1. Principio de Existencia. Tiene por objeto dar alguna sustancia a la discusión:

(PB.0) Existe (por lo menos) un conjunto.

2. Principio de la Extensión. Dice aproximadamente que los objetos de que trata la teoría pueden considerarse intuitivamente como agregados o colecciones de cosas, y nada más que eso. En forma más técnica: este principio relaciona la pertenencia ($\in$) y la igualdad ($=$), afirmando que cada objeto (conjunto) está completamente determinado por los objetos que están en la relación de pertenencia con él; es decir: si es verdad que todo objeto que está en la relación $\in$ con a lo está también con b, y recíprocamente, entonces a y b son nombres del mismo objeto. En símbolos:

(PB.1) $(\forall x)(x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b.$

Según (ig. 2) se tiene también que

$$(a = b) \Rightarrow (\forall x)(x \in a \Leftrightarrow x \in b),$$

luego:

$$(a = b) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in a \Leftrightarrow x \in b),$$

o también (según la definición de inclusión):

$$(a = b) \Leftrightarrow ((a \subset b) \wedge (b \subset a)).$$

3. Principio de Separación. Tiene por objeto reglamentar la formación de conjuntos a partir de condiciones; afirma que de un conjunto dado de antemano se pueden separar los objetos que satisfacen una determinada condición y formar así un nuevo conjunto:

(PB.2) Dado un conjunto U y una condición $p\{x\}$, existe un conjunto (y uno sólo) cuyos elementos son precisamente los elementos x de U que satisfacen la condición $p\{x\}$.

Este conjunto se designa

$$\{x \in U : p\{x\}\}$$

(es "el conjutno de los x de U tales que $p\{x\}$").

Si $a = \{x \in U : p\{x\}\}$ entonces, para todo x se tiene

$$x \in a \iff x \in U \wedge p\{x\}.$$

Si a es un conjunto y $p\{x\}$ es una condición tal que, para todo x

$$x \in a \iff p\{x\},$$

se escribe

$$a = \{x : p\{x\}\},$$

y se dice que a es "el conjunto de los x tales que $p\{x\}$". Según esto:

$$\{x \in U : p\{x\}\} = \{x : x \in U \wedge p\{x\}\}.$$

4. El conjunto vacío. Sea U un conjunto (véase PB.0), entonces, según PB.2, puede definirse:

$$\emptyset = \{x \in U : x \neq x\}.$$

PROPOSICION 1. Para todo x, $x \notin \emptyset$.

PROPOSICION 2. Para todo x, $x \in \emptyset \iff x \neq x$.

Demostración: Si $x \in \emptyset$ entonces $x \in U$ y $x \neq x$; en particular, $x \neq x$. Recíprocamente, $x \neq x \Rightarrow (x \in U \quad x \neq x)$, pues $x \neq x$ es falso (por ig.1). Luego $x \in \emptyset$. ∎

COROLARIO. $\emptyset = \{x : x \neq x\}$.

Este corolario muestra que $\emptyset$ no depende del conjunto U usado para definirlo. La condición $a \neq \emptyset$ se lee "a es un conjunto no vacío".

PROPOSICION 3. Para todo a, $\emptyset \subset a$.

Demostración: Cualquiera sea x, $x \in \emptyset \Rightarrow x \in a$ (pues, según proposición 1, $x \notin x$ es falso. ∎

5. Principio de conjuntos binarios. Tanto este principio como los que siguen, con dos excepciones, proporcionan diversos procedimientos para formar nuevos conjuntos a partir de otros dados.

Todos ellos afirman, bajo ciertas hipótesis, la existencia de conjuntos con propiedades especiales.

(PB.3) Si a y b son objetos, existe un único conjunto cuyos elementos son precisamente a y b.

Este conjunto se designa

$$\{a,b\}.$$

Se tiene entonces, para todo x,

$$x \in \{a,b\} \iff (x=a \vee x=b).$$

Luego:

$$\{a,b\} = \{x : x=a \vee x=b\}.$$

En lugar de $\{a,a\}$ se escribe $\{a\}$. Entonces:

$$x \in \{a\} \iff x = a, \text{ para todo } x.$$

Luego:

$$\{a\} = \{x : x = a\}.$$

Nota. En general, si existe un conjunto cuyos elementos son $a, b, c, \ldots,$ este conjunto se designa

$$\{a, b, c, \ldots\}.$$

6. Principio de Uniones. Con el objeto de evitar expresiones como "sea a el conjunto de los conjuntos x tales que ..." se emplea a veces el término "colección" como sinónimo de conjunto. Con esta terminología el principio de Uniones afirma que:

(PB.4) Para cada colección M existe un conjunto, y uno solo, cuyos elementos son precisamente los objetos que pertenecen a uno, por lo menos, de los conjuntos de la colección M.

Este conjunto se llama la unión de la colección M y se designa

$$\bigcup M \quad (\text{ó} \quad \bigcup_{y\in M} y).$$

Según la definición, para todo x,

$$x \in \bigcup M \iff (\exists y \in M)(x \in y).$$

Observación: Si $\{x\} \in M$ entonces $x \in \bigcup M$.

PROPOSICION 4. Si a, b, c son objetos, existe un único conjunto cuyos elementos son precisamente a, b y c.

PROPOSICION 5. Para todo y, si $y \in M$ entonces $y \subset \bigcup M$.

Si $M = \{a, b, c, \ldots\}$, en lugar de $\bigcup M$ se acostumbra escribir

$$a \cup b \cup c \cup \ldots.$$

Dados a y b, para todo x,

$$x \in a \cup b \iff (x \in a \vee x \in b),$$

luego:

$$a \cup b = \{x : x \in a \vee x \in b\}.$$

Intersección.

PROPOSICION 6. Si M es una colección no vacía, existe un conjunto, y uno solo, cuyos elementos son precisamente los x tales que $x \in y$ para todo y de M.

Demostración: Sea y_0 un elemento de M. Aplicando (PB.2) puede formarse el conjunto

$$\{x \in y_0 : x \in y \text{ para todo } y \text{ de } M\},$$

el cual satisface las condiciones. La unicidad sigue de (PB.1). ∎

El conjunto cuya existencia se afirma en la proposición anterior se llama la intersección de la colección (no vacía) M y se designa

$$\bigcap M \quad (\text{ó} \bigcap_{y \in M} y).$$

Para todo x,

$$x \in \bigcap M \iff (\forall y \in M)(x \in y).$$

PROPOSICION 7. Para todo y, si $y \in M$ entonces

$$\bigcap M \subset y.$$

Si $M = \{a, b, c, \ldots\}$, en lugar de $\bigcap M$ se acostumbra escribir

$$a \cap b \cap c \cap \ldots$$

Dados a y b, para todo x,

$$x \in a \cap b \iff (x \in a \wedge x \in b),$$

luego:

$$a \cap b = \{ x : x \in a \wedge x \in b \}.$$

Diferencia y Complemento. Si a y x son conjuntos, se define

$$a - x = \{ t \in a : t \notin x \}.$$

El conjunto $a - x$ es la diferencia de a y x.

Si $x \subset a$, en lugar de $a - x$ se escribe $\complement_a x$ este conjunto es entonces el complemento de x con respecto al conjunto a.

7. Principio del Conjunto de Partes. Se trata de garantizar la formación de un conjunto tomando como elementos los subconjuntos de un conjunto dado.

(PB.5) Para cada conjunto a existe un conjunto, y uno sólo, cuyos elementos son precisamente los subconjuntos de a.

Este conjunto se llama el conjunto de partes de a y se designa

$$P(a).$$

Para todo x,

$$x \in P(a) \Longleftrightarrow x \subset a,$$

luego:
$$P(a) = \{ x : x \subset a \} .$$

Observación: Si $x \in a$ entonces

$$\{x\} \in P(a).$$

PROPOSICION 8. Para todo conjunto a,

$$\emptyset \in P(a)$$

$$a \in P(a) .$$

Ejemplo: (1) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

(2) $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Dado un conjunto a y una condición $p\{x\}$, puede formarse, de acuerdo con (PB.5), el conjunto $P(a)$: aplicando entonces (PB.2) a este conjunto se obtiene el conjunto

$$\{ x \in P(a) : p\{x\} \} .$$

Llamando b a este conjunto se observa que, para todo x

$$x \in b \Longleftrightarrow (x \subset a \wedge p\{x\}),$$

de donde

$$b = \{ x : x \subset a \wedge p\{x\} \} .$$

Los elementos de este conjunto son las partes x de a tales que $p\{x\}$. Resumiendo:

PROPOSICION 9. <u>Para cada conjunto</u> a <u>y cada condición</u> $p\{x\}$ <u>existe un conjunto cuyos elementos son las partes de</u> a <u>que satisfacen la condición</u> $p\{x\}$.

§ 3. OBJETOS ESPECIALES

1. Parejas ordenadas. Los principios enunciados hasta ahora permiten construir objetos altamente organizados y que en consecuencia gozan de propiedades interesantes: son las <u>relaciones</u>. Con este fin hay que empezar precisando el concepto de pareja ordenada.

Si a y b son objetos, se define

$$(a,b) = \{a, \{a,b\}\}.$$

(a,b) es la <u>pareja ordenada</u> de componentes a y b (en este orden). a (resp. b) es la "primera" (resp. "segunda") componente de la pareja (a,b).

La afirmación

$$c \text{ es una pareja ordenada}$$

significa

$$(\exists a)(\exists b)(c = (a,b)).$$

Si no hay lugar a confusión, en lugar de "pareja ordenada" se dice simplemente "pareja".

PROPOSICION 1. <u>Cualesquiera sean</u> a, b, x, y,

$$(a,b) = (x,y) \text{ \underline{sii} } a = x \wedge b = y.$$

Esta proposición muestra que las parejas son efectivamente "ordenadas".

Producto cartesiano.

PROPOSICION 2. Si a y b son conjuntos, existe un único conjunto cuyos elementos son precisamente las parejas (x,y) tales que $x \in a$ y $y \in b$.

Este conjunto se llama el producto cartesiano de a y b (en este orden) y se designa

$$a \times b .$$

Para todo z,

$$z \in a \times b \iff (\exists x)(\exists y)(x \in a \wedge x \in b \wedge z=(x,y)).$$

Luego

$$a \times b = \{z : (\exists x)(\exists y)(x \in a \wedge y \in b \wedge z = (x,y)\}.$$

La fórmula que figura a la derecha en la igualdad anterior se abrevia comúnmente escribiendo

$$\{(x,y) : x \in a \wedge y \in b\},$$

lo cual se lee "el conjunto de las parejas (x,y) tales que $x \in a$ y $y \in b$."

En general, si existe un conjunto cuyos elementos sean las parejas ordenadas (x,y) tales que x é y satisfacen $p\{x,y\}$, dicho conjunto se designa

$$\{(x,y) : p\{x,y\}\}.$$

Relaciones. Una relación es, por definición, un conjunto cuyos elementos son parejas. Con más precisión

DEFINICION. ρ es una relación $\iff$

$$(\forall z)(z \in \rho \Rightarrow z \text{ es una pareja}).$$

Observación. $\emptyset$ es una relación.

Si ρ es una relación, en lugar de $(x,y) \in \rho$ suele escribirse

$$x \, \rho \, y .$$

lo cual se lee "x está en la relación ρ con y" ó "x está ρ-relacionado con y".

PROPOSICION 3. Para cada relación ρ existen conjuntos d_ρ y r_ρ tales que

(1) para todo x, $x \in d_\rho$ sii $(\exists y)(x\rho y)$,

(2) para todo y, $y \in r_\rho$ sii $(\exists x)(x\rho y)$.

Según esto:

$$d_\rho = \{ x : (\exists y)(x \rho y) \} ;$$

$$r_\rho = \{ y : (\exists x)(x \rho y) \} .$$

d_ρ se llama el dominio de ρ. r_ρ se llama el recorrido de ρ. El conjunto $d_\rho \cup r_\rho$ se llama el campo de la relación ρ y se designa c_ρ .

Inversas. Si ρ es una relación, el conjunto

$$\{(x,y) : y \rho x\}$$

es también una relación. Se llama la relación inversa de ρ y se designa

$$\rho^{-1}.$$

Evidentemente:

$$d_{\rho^{-1}} = r_\rho , \quad r_{\rho^{-1}} = d_\rho , \quad c_{\rho^{-1}} = c_\rho .$$

Composición. Si σ y ρ son relaciones, el conjunto

$$\{(x,z) : (\exists y)((x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \sigma)\}$$

es también una relación. Es la relación compuesta de σ y ρ (en este orden) y se designa

$$\sigma o \rho .$$

Fácilmente se prueba que

$$d_{\sigma o \rho} \subset d_\rho , \quad r_{\sigma o \rho} \subset r_\sigma .$$

3. Funciones. El concepto de función es quizás el más importante de la Matemática.

DEFINICION. Una función es una relación f tal que, para cada x existe a lo más un y tal que

$$(x,y) \in f.$$

En otros términos: f es una función si y sólo si f es una relación y además, para todo x, todo y é todo y'

$$(x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \Rightarrow y = y'.$$

Observación: $\emptyset$ es una función.

Si f es una función y $x \in d_f$, se usa el símbolo

$$f(x)$$

para designar al único y tal que $(x,y) \in f$. De este objeto $f(x)$ se dice que es el valor de f en x ó la imagen de x según f.

PROPOSICION 4. Si f y g son funciones, entonces $f = g$ si y sólo si $d_f = d_g$ y para cada x de este conjunto $f(x) = g(x)$.

Se dice que una función f es de a en b si

(i) $d_f = a$

(ii) $r_f \subset b$.

Intuitivamente, una función de a en b define una "regla" ó "ley" que a cada elemento x de a le hace corresponder un elemento y de b, y uno sólo. Para sugerir esta interpretación se escribe

$$f: a \to b$$

$$a \leadsto b.$$

Ej. Dado un conjunto a, el conjunto

$$\{(x,x) : x \in a\}$$

es una función de a en a. Se llama la función idéntica de a y se designa i_a. Esta función asigna a cada elemento x de a el mismo elemento x.

PROPOSICION 5. Si g y f son funciones, entonces $g \circ f$ es también una función.

DEFINICION. Sea f una función de a en b:

(1) f se dice biunívoca (ó uno a uno) si para todo x y todo x'

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

(2) f se dice sobreyectiva (o que es una función de a sobre b) si para todo elemento y de b existe un elemento x de a tal que $y = f(x)$. Es decir, si todo elemento de b es la imagen de algún elemento de a.

(3) Se dice que f es una biyección de a sobre b (o que f establece una correspondencia biunívoca entre a y b) si f es biunívoca y sobreyectiva.

PROPOSICION 6. Si f es una biyección de a sobre b, entonces f^{-1} es una biyección de b sobre a.

PROPOSICION 7. Si f es una biyección de a sobre b y g es una biyección de b sobre c, entonces $g \circ f$ es una biyección de a sobre c.

Equipotencia. Se dice que un conjunto a es equipotente con un conjunto b, y se escribe

$$a \text{ Eq } b,$$

si existe una biyección de a sobre b.

PROPOSICION 8. Para todo a, para todo b, y todo c:

(1) a Eq a,

(2) a Eq b => b Eq a,

(3) (a Eq b $\wedge$ b Eq c) => a Eq c.

Debido a la propiedad (2) de la anterior proposición, en lugar de "a es equipotente con b", puede decirse "a y b son equipotentes".

4. Operaciones. Una operación binaria (o ley de composición interna) en un conjunto E es una función $*: E \times E \to E$. Si $(x,y) \in E$, en lugar de $*((x,y))$ se escribe $x * y$.

5. Ordenes. Es importante introducir en Matemática la noción de "precedencia".

DEFINICION. Una relación de orden parcial (o simplemente un orden) es una relación $\leqslant$ que satisface las condiciones siguientes:

(1) Reflexividad: $x \leqslant x$, para todo elemento x de $c_{\leqslant}$.

(2) Antisimetría: $(x \leqslant y \wedge y \leqslant z$ => x = y, para todo x y todo y.

(3) Transitividad: $(x \leqslant y \wedge y \leqslant z$ => $x \leqslant z$, para todo x, todo y y todo z.

Si $\leqslant$ es un orden y $d_{\leqslant} = E$ se dice que $\leqslant$ es un orden en E y que E es un conjunto (parcialmente) ordenado por

Si $\leqslant$ es un orden en E y para todo x y todo y se tiene

$$x \leqslant y \vee y \leqslant x ,$$

se dice que $\leqslant$ es un orden total (o lineal).

Sea E un conjunto ordenado por $\leqslant$ y sea A una parte de E; se dice que a es un mínimo (resp. máximo) de A si $a \in A$ y además $a \leqslant x$ (resp. $x \leqslant a$) para todo x de A. Un conjunto (subconjunto de E) tiene a lo más un mínimo (resp. máximo).

DEFINICION. Se dice que un orden $\leqslant$ en E es un buen orden (o que E está bien ordenado por $\leqslant$) si toda parte no vacía de E tiene mínimo.

PROPOSICION 9. Todo buen orden es total.

§4. PRINCIPIOS BASICOS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS (Continuación)

1. Conjuntos recurrentes. Para cada conjunto x se define:

$$x^+ = x \cup \{x\}.$$

El conjunto x^+ se llama el siguiente de x. Según la definición de x^+, para todo t

$$t \in x^+ \iff (t \in x \vee t = x).$$

Ej. (1) $\emptyset^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.

(2) $\emptyset^{++} = \{\emptyset\}^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

PROPOSICION 1. Para todo x,

(1) $x \in x^+$

(2) $x \subset x^+$.

DEFINICION. Se dice que un conjunto a es recurrente si:

(i) $\emptyset \in a$

(ii) Para todo x, si $x \in a$ entonces $x^+ \in a$.

Intuitivamente, un conjunto recurrente a debe tener una infinidad de elementos. En efecto, $\emptyset \in a$ (según (i)) y entonces aplicando reiteradamente (ii), se observa que los objetos $\emptyset^+$, $\emptyset^{++}$, $\emptyset^{+++}$, ... son también elementos de a (y son distintos entre sí).

PROPOSICION 2. La intersección de cualquier colección no vacía de conjuntos recurrentes es un conjunto recurrente.

2. Principio del Infinito. Para el desarrollo de la Matemática usual son imprescindibles los conjuntos "infinitos". El principio del Infinito garantiza la existencia de estos conjuntos:

(PB.6) Existe un conjunto recurrente.

Esta afirmación implica (PB.0), por lo cual ésta última puede eliminarse de los principios básicos pasando a ser una proposición (demostrada).

3. Principio de Elección. Se trata en este caso de garantizar la posibilidad de formar un conjunto "eligiendo" un elemento de cada uno de los conjuntos mienbros de una colección.

(PB.7) Si M es una colección cuyos miembros son conjuntos no vacíos, entonces existe una función e con dominio M y tal que, para cada a de M

$$e(a) \in a.$$

De una función e que tenga estas propiedades se dice que es una función de elección para M.

4. Principio de Sustitución. Este principio propor-

ciona un procedimiento para formar conjuntos, más poderoso que (PB.2).

(PB.8) Si $p\{x,y\}$ es una condición, a es un conjunto y se tiene que, para cada elemento x de a existe a lo más un objeto y tal que $p\{x,y\}$, entonces existe un único conjunto b cuyos elementos son precisamente los objetos y tales que $p\{x,y\}$, para algún x de a.

5. Principio de regularidad. Con este principio se elimina explícitamente la existencia de conjuntos que posean propiedades intuitivamente patológicas.

(PB.9) Todo conjunto no vacío a tiene un elemento x tal que

$$x \cap a = \emptyset .$$

La siguiente proposición y su corolario ilustran el tipo de propiedades que se derivan de (PB.9).

PROPOSICION 3. Para todo x, $x \notin x$.

COROLARIO. (1) Para todo x, $x^+ \neq x$.

(2) No existen conjuntos a y b tales que $a \in b$ y $b \in a$.

§5. LOS NUMEROS NATURALES

1. El conjunto $\mathbb{N}$ de los Números Naturales. Los conjuntos

$$\begin{aligned} &\emptyset \\ &\emptyset^+ = \{\emptyset\} \\ &\emptyset^{++} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \\ &\emptyset^{+++} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} \end{aligned}$$

tienen, respectivamente, ninguno, uno, dos, tres, ... elementos, resultando así candidatos para llevar los nombres 0, 1, 2, 3, ..., respectivamente.

El conjunto cuyos elementos son los objetos $\emptyset$, $\emptyset^{+}$, $\emptyset^{++}$, $\emptyset^{+++}$, etc., es recurrente y está contenido en todo otro conjunto recurrente. Esta observación es la base intuitiva de la definición del conjunto $\mathbf{N}$ de los números naturales. En seguida se enuncia el teorema básico de existencia y unicidad.

TEOREMA 1. <u>Existe un único conjunto recurrente que está contenido en todo otro conjunto recurrente.</u>

Demostración: Sea a un conjunto recurrente (v. PB.6). Puede definirse (v. §2;7,prop.9):

$$R_a = \{ x : x \subset a \wedge x \text{ es recurrente} \} .$$

Entonces, para todo x,

$$x \in R_a \iff (x \subset a \wedge x \text{ es recurrente}).$$

Como la colección R_a no es vacía, puede definirse $\mathbf{N} = \bigcap R_a$. El conjunto $\mathbf{N}$ satisface las condiciones; en efecto:

(1) $\mathbf{N}$ es recurrente (v.§4;1,prop.2).

(2) Si b es un conjunto recurrente cualquiera, entonces $(a \cap b) \in R_a$. Luego $\mathbf{N} \subset (a \cap b)$, y entonces $\mathbf{N} \subset b$.

La unicidad es trivial.∎

DEFINICION. Se dice que un objeto n es un <u>número natural</u> si y sólo si n es un elemento del único conjunto recurrente que está contenido en todo otro conjunto recurrente.

Como ya se indicó, el conjunto de los números naturales se designa $\mathbb{N}$ (es el "menor" de todos los conjuntos recurrentes).

Los números naturales se designan comúnmente por medio de los bien conocidos signos arábigos:

$\emptyset$ se designa 0 y se llama <u>cero</u>,

$\emptyset^{+}$ se designa 1 y se llama <u>uno</u>,

$\emptyset^{++}$ se designa 2 y se llama <u>dos</u>,

y así sucesivamente.

El conjunto de los números naturales diferentes de 0 se designa $\mathbb{N}^*$ (ó N_+). Con más precisión:

$$\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\}.$$

2. <u>Los axiomas de PEANO</u>. La definición de $\mathbb{N}$ dada en el punto anterior permite demostrar los llamados Axiomas de PEANO.

<u>Nota</u>. En lo sucesivo se omitirá frecuentemente los cuantificadores «para todo,...» y «para todo elemento n de $\mathbb{N}$,... ».

En consecuencia estos deben sobreentenderse en donde correspondan.

<u>TEOREMA 2</u> ("Axiomas" de PEANO)

(P.1) $0 \in \mathbb{N}$

(P.2) <u>Si</u> $n \in \mathbb{N}$ <u>entonces</u> $n^{+} \in \mathbb{N}$.

(P.3) (<u>Principio de Inducción, 1ª forma</u>)

<u>Si</u> $S \subset \mathbb{N}$ <u>y además</u>

(i) $0 \in S$

(ii) <u>Si</u> $n \in S$ entonces $n^{+} \in S$, Entonces $S = \mathbb{N}$.

(P.4) $0 \neq n^+$ (para todo elemento n de $\mathbb{N}$).

(P.5) Si $m^+ = n^+$ entonces $m = n$.

Demostración de (P.1) y (P.2): Estas afirmaciones expresan sencillamente que $\mathbb{N}$ es recurrente, lo cual es inmediato según su definición.∎

Demostración de (P.3): Las condiciones (i) y (ii) indican que S es recurrente y entonces $\mathbb{N} \subset S$. Como además $S \subset \mathbb{N}$, por hipótesis, entonces $S = \mathbb{N}$.∎

Inducción.

PROPOSICION 1. (Principio de Inducción, 2a. forma) Sea $p\{n\}$ un enunciado que se refiere a n. Si

(i) $p\{0\}$ (es cierto) y

(ii) $(\forall n \in \mathbb{N})(p\{n\} \Rightarrow p\{n^+\})$, entonces $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(p\{n\})$.

Demostración: Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : p\{n\}\}$; entonces S satisface las condiciones de (P.3) siendo, en consecuencia, $S = \mathbb{N}$. Luego $p\{n\}$ (es cierta) para todo n de $\mathbb{N}$.∎

Las aplicaciones del Principio de Inducción se llaman demostraciones por inducción. Cuando se usa la 2a. forma del mencionado principio, la verificación de (i) es generalmente trivial. Para verficar (ii) se supone que $p\{n\}$ es cierta, y bajo esta hipótesis se demuestra $p\{n^+\}$; en el curso de este razonamiento se dice que $p\{n\}$ es la hipótesis de inducción (hip. ind.).

En seguida se darán dos ejemplos de demostraciones por inducción.

PROPOSICION 2. Para todo número natural n, si $k \in n$ entonces $k \subset n$ (cualquiera sea k).

Demostración: Sea $p\{n\}$ la condición

$$(\forall k)(k \in n \Rightarrow k \subset n).$$

(i) La proposición

$$k \in 0 \Rightarrow k \subset 0$$

es cierta (cualquiera sea k) pues $0 = \emptyset$ y entonces $k \in 0$ es falsa, cualquiera sea k (v.§2, Prop.1). Luego es cierto que

$$(\forall k)(k \in 0 \Rightarrow k \subset 0),$$

es decir, $p\{0\}$ es cierta.

(ii) Supongamos que $p\{n\}$ es cierta, es decir, supongamos que si $k \in n$ entonces $k \subset n$, y sea $k \in n^+$. Entonces

$$k \in n \lor k = n.$$

Pero si $k \in n$ entonces $k \subset n$ (por hip. ind.). Y si $k = n$ entonces $k \subset n$. En todo caso $k \subset n$, y entonces $k \subset n^+$ (puesto que $n \subset n^+$).

Se ha demostrado que, si $k \in n^+$ entonces $k \subset n^+$ (cualquiera sea k). Es decir, se ha demostrado que $p\{n^+\}$ es cierta (bajo la hipótesis de que $p\{n\}$ lo es).

Puede entonces afirmarse que $(\forall n \in N)(p\{n\})$, o lo que es lo mismo:

$$(\forall n \in N)(\forall k)(k \in n \Rightarrow k \subset n),$$

que es todo lo que se deseaba demostrar.∎

La proposición anterior puede ser reformulada como sigue:

PROPOSICION 2´. Para todo número natural n,

$$m \in k \in n \Rightarrow m \in n$$

(cualesquiera sean m y k).

PROPOSICION 3. Para todo número natural n,

$$n \notin n.$$

Demostración: Sea $p\{n\}$ la condición

$$n \notin n.$$

(i) $p\{0\}$ es la proposición $0 \notin 0$, la cual es cierta debido a que $0 = \emptyset$ (v.§2, prop.1).

(ii) Supongamos que $n \notin n$ (hip. ind.). Si sucediera que $n^+ \in n^+$, entonces $n^+ \in n$ ó $n^+ = n$. Recordando que $n \in n^+$ se concluiría en ambos casos que $n \in n$ (v. Prop.2´), lo cual contradice la hipótesis de inducción. En consecuencia, $n^+ \notin n^+$. Queda entonces demostrada la afirmación

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \notin n),$$

que es precisamente la Proposición 3.∎

COROLARIO(1) Para todo n de $\mathbb{N}$, $n^+ \neq n$.

(2) No existen números naturales m y n tales que $m \in n$ y $n \in m$.

La proposición anterior (y sus corolarios) muestran que los resultados expresados por la Proposición 3 del §4 (y sus corolarios) pueden obtenerse cuando x es un número natural sin usar el Principio de Regularidad.

Demostración de (P.4): Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n \in n^+$;

luego $n^+ \neq \emptyset$.∎

Demostración de (P.5): Sean m y n números naturales. Supongamos que $m^+ = n^+$. Como $m \in m^+$ entonces $m \in n^+$, es decir,

$$m \in n \vee m = n.$$

Análogamente,

$$n \in m \vee n = m.$$

Luego, si fuera $m \neq n$ se tendría

$$m \in n \wedge n \in m$$

lo cual no es posible (v.Propo.3,Cor.(2)). Entonces $m = n$.∎

3. La función sg ("el siguiente de"). Puede definirse una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ asignándole a cada n de $\mathbb{N}$ su siguiente n^+. Esta función se llama "el siguiente de" y se designa sg:

$$\begin{aligned} sg:\mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\rightsquigarrow n^+ \end{aligned}$$

Con más precisión: Existe un único conjunto cuyos elementos son precisamente las parejas (m,n) tales que $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ y $m^+ = n$. Este es el conjunto designado sg.

La función sg es biunívoca mas no sobreyectiva (v. P.5 y P.4). Con más precisión:

PROPOSICION 4. La función sg es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}^*$.

Demostración: Para probar que el recorrido de sg es $\mathbb{N}^*$ basta hacer inducción sobre n para demostrar que la condición

Si $n \neq 0$ entonces existe un único m tal que

$$m^+ = n ,$$

es cierta para todo n.∎

La función sg^{-1} se designa at:

$$at: N^* \to N.$$

Para cada n de N^*, el número $at(n)$ se llama el <u>anterior</u> a n y se designa n^-. En consecuencia, para todo m y todo n:

$$n = m^+ \iff m = n^-.$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
(Recibido marzo de 1968)