N O T A S   D E   C L A S E

ENSEÑANZA DEL PRINCIPIO DE
INDUCCION COMPLETA, A NIVEL DE CUARTO
AÑO DE BACHILLERATO

por

Hernando ALFONSO CASTILLO

0. Inclusión entre conjuntos.

Recordemos lo que significa la relación de inclusión entre conjuntos:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Lo anterior se lee: El conjunto A está contenido en el conjunto B, si y sólo si todos los elementos x que pertenecen a A pertenecen a B. De acuerdo con la definición dada, $A \subset B$ también incluye la posibilidad de que $A = B$. En efecto,

$$(A = B) \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A)).$$

1. Los postulados de PEANO.

A GIUSEPPE PEANO, matemático italiano, se debe un conjunto de axiomas a partir del cual puede desarrollarse deductivamente la aritmética de los números naturales. Antes de enunciar los postulados de PEANO, mencionaremos dos ideas con las cuales estamos familiarizados, a saber, "número natural" y "siguiente" ó "sucesor".

Simbolizaremos el conjunto de los números naturales con N y el operador "sucesor de ..." ó "siguiente de ..." así: $^+$, de modo que si n es un número natural, n^+ se lee: el siguiente de n, ó el sucesor de n.

Postulados de Peano.

(i) $0 \in N$

(ii) $a \in N \Rightarrow a^+ \in N$

(iii) $\forall a,\ 0 \neq a^+$

(iv) $a^+ = b^+ \Rightarrow a = b.$

Las cuatro proposiciones anteriores corresponden a hechos que nos son familiares:

(i) Cero es un número natural.

(ii) Si a es un número natural, entonces el siguiente de a también es un número natural.

(iii) Cualquiera sea a, cero es diferente del siguiente de a. Esto se puede enunciar también: cero no es el siguiente de ningún número natural.

(iv) Si el siguiente de a es igual al siguiente de b, entonces $a = b$.

El quinto postulado, que enunciaremos luego, es el llamado principio de inducción completa el cual, como veremos, es tan fácil de aceptar intuitivamente como los anteriores.

Pensemos, entonces, en un conjunto K que cumpla con las siguientes condiciones:

a) $K \subset N,\ K \neq \emptyset$

b) $0 \in K$

c) $\forall x,\ x \in K \Rightarrow x^+ \in K$

Es decir:

a) K es un subconjunto no vacío de N

b) Cero pertenece a K.

c) Cualquiera sea x, si x pertenece a K, entonces el siguiente de x también pertenece a K.

¿Qué podemos decir del conjunto K ?...

En el caso de que no aparezca fácilmente la respuesta a la pregunta anterior, observemos que si combinamos las proposiciones b) y c) podemos afirmar que uno (1) pertenece a K (poniendo cero al puesto de x en la proposición c)). Si en la proposición c) ponemos uno al puesto de x, entonces se puede afirmar que $2 \in K$. Si ponemos 2 al puesto de x, entonces podemos afirmar que $3 \in K$, etc.. Por consiguiente, $K = N$.

Enunciemos ahora el principio de inducción:

$$\left.\begin{array}{l} K \subset N, \quad K \neq \emptyset \\ 0 \in K \\ x,\ x \in K \Rightarrow x^{+} \in K \end{array}\right\} \Rightarrow K = N$$

Nota. En el caso de que no se cumpla que $0 \in K$, pero sí se cumpla que $1 \in K$, además de las otras dos condiciones, entonces se deduce que $K = N - \{0\}$, o sea que K está integrado por todos los números naturales con excepción del cero.

Análogamente si no se puede afirmar que $0 \in K$ ni que $1 \in K$ pero sí que $2 \in K$, además de las otras dos condiciones, entonces se deduce que $K = N - \{0,1\}$; etc..

3. Proposiciones Categóricas y Condicionales.

Antes de estudiar las aplicaciones que tiene el principio de inducción, veremos qué es una proposición categórica y qué es una proposición condicional. Consideremos para el efecto los ejemplos siguientes:

(1) $3 + 4 = 7$

(2) $x + 6 = 8$

En el ejemplo (1), podemos afirmar que la proposición "$3 + 4 = 7$" es verdadera. En el ejemplo (2), no podemos afirmar que la proposición "$x + 6 = 8$" sea verdadera o sea falsa, porque su valor de verdad o de falsedad depende del número por el cual se sustituya x : si se sustituye por 2, es verdadera; si se sustituye por cualquier otro número, es falsa.

Análogamente, si consideramos los ejemplos

(3) $5 + 6 = 10$

(4) $4x = 12$

podemos decir que (3) es una proposición falsa, en tanto que la verdad o la falsedad de (4) depende del número que ocupe el lugar de x.

Los ejemplos anteriores nos ilustran la necesidad de clasificar las proposiciones en dos tipos:

a) Categóricas, o sea aquellas de las cuales se puede afirmar la verdad o la falsedad.

b) Condicionales, o sea aquellas de las cuales no se puede decir que sean verdaderas o falsas.

Veamos ahora cómo puede transformarse una proposición condicional en una categórica. Una manera consiste en sustituir la variable por una constante:

$$3x = 12 \quad \begin{matrix} \nearrow & 3 \cdot 4 = 12 \quad \text{(verdadera)} \\ \searrow & 3 \cdot 5 = 12 \quad \text{(falsa)} \end{matrix}$$

Otra manera consiste en cuantificar la variable, es decir, en expresar para qué valor o valores de x se verifica la proposición dada.

Refiriéndonos al ejemplo, podemos decir: "Existe por lo menos un x tal que $3x = 12$"; en símbolos, $\exists x,\ 3x = 12$. Más enfáticamente podríamos decir: "Existe un solo x tal que $3x = 12$"; en símbolos, $\exists! x,\ 3x = 12$.

Las proposiciones que hemos obtenido cuantificando, son ambas verdaderas. Se puede cuantificar también así: "Para todo x, $3x = 12$"; en símbolos, $\forall x,\ 3x = 12$. En este caso hemos obtenido una proposición categórica, pero falsa.

Una proposición categórica verdadera, obtenida usando el cuantificador "para todo x" es la siguiente:

$$\forall x,\ x + 0 = x\ .$$

4. El operador "la suma de"

Consideremos

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5\ .$$

Esta expresión se puede abreviar con el símbolo

$$\sum_{j=1}^{5} j$$

que se lee: "suma de j, variando j entre uno y cinco".

La ventaja de este símbolo se comprende más aún en el ejemplo siguiente:

$$\sum_{j=1}^{50} j$$

En efecto, sin el uso de este símbolo (operador sobre j) resultaría muy largo escribir la suma de los números comprendidos entre 1 y 50. A veces se usan también los puntos suspensivos para abreviar:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 50;$$

pero el símbolo $\Sigma_{j=1}^{50} j$ es más compacto.

Veamos otros ejemplos:

$$\sum_{j=o}^{3} (a+b)^j = (a+b)^o + (a+b)^1 + (a+b)^2 + (a+b)^3$$

$$\sum_{j=o}^{5} 1/(j+1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$\sum_{j=1}^{4} j(j-1) = 0 + 2 + 6 + 12$$

$$\sum_{j=o}^{30} j(j+1) = 0 + 2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + 930$$

$$\sum_{j=2}^{n} (j+1)^2 = 9 + 16 + 25 + \ldots + (n+1)^2$$

Ahora sí vamos a estudiar algunos ejemplos en los cuales se aplica el principio de inducción:

(1) Consideremos la proposición condicional siguiente:

$$\sum_{j=o}^{n} 2j = n(n+1) \qquad \text{(proposición condicional en } n)$$

Si $n = 0$, la proposición queda: $2.0=0.(0+1)$, lo cual es cierto. Si $n = 1$, la proposición queda: $2.0 + 2.1 = 1(1+1)$, lo cual es cierto. Si $n = 2$, la proposición queda: $2.0 + 2.1 + 2.2 = 2(2+1)$, lo cual es cierto. Podríamos transformar la proposición condicional anterior en categórica cuantificando así:

$$\exists n, \sum_{j=o}^{n} 2j = n(n+1)$$

La proposición así obtenida es verdadera, puesto que ya hemos comprobado que el conjunto de los verificantes de la condición dada no es vacío. Sin embargo, si sustituimos n por 3, 4, 5 , 6, sucesivamente, podemos observar que la fórmula sigue siendo verdadera; esto nos lleva a suponer que la fórmula bien puede ser válida para todo número natural n; pero las verificaciones hechas ahora no nos autorizan para afirmarlo. Aún cuando verificásemos sucesivamente para $n = 7,8,9,\ldots,80$ que la fórmula se cumple, no podemos afirmar su validez para $n = 81$ hasta no haberlo verificado.

Veamos ahora cómo se puede demostrar que

$$(1) \qquad \forall n, \ \sum_{j=o}^{n} 2j = n(n+1)$$

Consideremos el conjunto

$$K = \left\{ n \ : \ \Sigma^{n}_{j=o} \ 2j = n(n+1) \right\}$$

Este conjunto no es vacío, pues ya hemos comprobado que $0 \in K$, $1 \in K$, ..., $6 \in K$. Podemos afirmar además que $K \subset N$. Si logramos demostrar que $\forall s$, $s \in K \Rightarrow s+1 \in K$, entonces podemos decir que $K = N$, o sea (1). Veamos cómo:

$$s \in K \Leftrightarrow 0+2+4+\ldots+2s = s(s+1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (0+2+4+\ldots+2s) + 2(s+1) = s(s+1) + 2(s+1)$$

(hemos sumado $2(s+1)$ a ambos lados de la desigualgad anterior)

$$\Rightarrow 0+2+4+\ldots+2s+(s+1)2 = (s+1)(s+2),$$

factorizando $(s+1)$. Pero esta última igualdad expresa que $s+1 \in K$. En resumen, hemos mostrado: $K \neq \emptyset$, $K \subset N$, $0 \in K$, $s \in K \Rightarrow s+1 \in K$, todo lo cual implica que $K=N$.

$2+7+12+\ldots+(5s-3)+(5s+2)=(s+1)(5s+4)/2$

(En esta última igualdad se ha sustituido n por $s+1$.)

Luego, $s+1 \in K$. En resumen:

$$\left.\begin{array}{l} K \subset N,\ K \neq \emptyset \\ 1 \in K \\ s \in K \Rightarrow s+1 \in K \end{array}\right\} \Longrightarrow K = N - \{0\}$$

Por consiguiente, $\forall n,\ n \neq 0,\ \sum_{j=1}^{n}(5j-3) = n(5n-1)/2$

---

(4) Sea la proposición condicional en n

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} = 2^{n} - 1$$

Tenemos:

$n = 1 \Rightarrow 2^{0} = 2^{1} - 1.$

$n = 2 \Rightarrow 2^{0} + 2^{1} = 2^{3} - 1$

$n = 3 \Rightarrow 2^{0} + 2^{1} + 2^{2} = 2^{4} - 1.$

Consideremos entonces el conjunto

$$K = \left\{ n : \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} = 2^{n} - 1 \right\}$$

Tenemos que $K \neq \emptyset$, $K \subset N$ y $1 \in K$. Debemos mostrar que $s \in K \Rightarrow s+1 \in K$. Sea, pues,

$s \in K \Leftrightarrow 1 + 2^{1} + 2^{2} + \ldots + 2^{s-1} = 2^{s} - 1$

$\Rightarrow 1 + 2^{1} + 2^{2} + \ldots + 2^{s-1} + 2^{s} = 2^{s} - 1 + 2^{s}$

$= 2^{s+1} - 1 \Rightarrow s+1 \in K.$

Por consiguiente:

$$\forall n,\ n \neq 0,\ \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} = 2^{n} - 1$$

La parte de la demostración que puede ofrecer alguna dificultad es la que justifica el paso de la afirmación $s \in K$ a la afirmación $s+1 \in K$. Pero no es difícil ver cuál es la operación que es necesario realizar, si se escribe aparte la proposición que significa que $s+1 \in K$, para tener a la vista el resultado al cual hay que llegar.

---

(2) Sea la proposición condicional en n

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} (2j - 1) = n^2$$

Tenemos:

$$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$$
$$n = 2 \Rightarrow 1 + 3 = 2^2$$
$$n = 3 \Rightarrow 1 + 3 + 5 = 3^2.$$

Si llamamos K el conjunto de los verificantes de la condición (2), podemos afirmar que tal conjunto no es vacío; por otra parte, $1 \in K$, y

$$s \in K \Leftrightarrow 1+3+\ldots+(2s-1) = s^2 \Rightarrow$$
$$1+3+\ldots+(2s-1) +(2s+1) = s^2 + (2s + 1)$$
$$\Rightarrow 1+3+\ldots+(2s-1) + (2s+1) = (s+1)^2 \Rightarrow s+1 \in K.$$

Hemos sumado a ambos lados de la segunda de las anteriores igualdades el número impar que sigue a $2s-1$, ó sea $2s+1$. En resumen,

$$\left.\begin{array}{l} K \neq \emptyset,\ K \subset N \\ 1 \in K \\ s \in K \Rightarrow s+1 \in K \end{array}\right\} \Rightarrow K = N - \{0\}$$

O sea

$$\forall n,\ n \neq 0,\ \sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$$

Obsérvese la utilidad de la demostración por inducción; una vez llevada a cabo, podemos afirmar (refiriéndonos al ejemplo anterior) que la suma de los 20 primeros números impares vale 400, sin necesidad de realizar la siguiente operación:

$$\sum_{j=1}^{20} (2j-1) = 1+3+5+\ldots+39 = 400$$

basta aplicar la fórmula que se ha demostrado válida para todos los números naturales distintos de cero.

---

(3) Sea la proposición condicional

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{n} (5j-3) = n(5n-1)/2$$

Tenemos:

$$n = 1 \Rightarrow 2 = 1(5 \cdot 1 - 1)/2$$

$$n = 2 \Rightarrow 2 + 7 = 2(5 \cdot 2 - 1)/2$$

$$n = 3 \Rightarrow 2 + 7 + 12 = 3(5 \cdot 3 - 1)/2$$

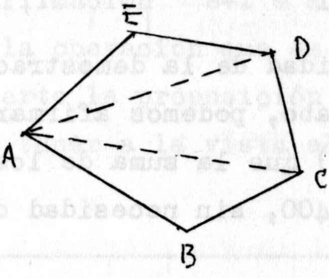
Consideremos entonces el conjunto

$$K = \left\{ n : \sum_{j=1}^{n} (5j-3) = n(5n-1)/2 \right\}$$

Tenemos entonces: $K \neq \emptyset$, $K \subset N$ y $1 \in K$. Debemos mostrar ahora que $s \in K \Rightarrow s+1 \in K$; en efecto: sustituyendo n por s tenemos

$$s \in K \Leftrightarrow 2+7+12+\ldots+(5s-3) = s(5s-1)/2 \Rightarrow$$

(5) Consideremos un polígono convexo simple, por ejemplo un pentágono. Se dice que dos vértices son opues-



tos si no pertenecen a un mismo lado (por ejemplo, en la figura, E y C. Se llama diagonal del polígono a todo segmento que une dos vértices opuestos. De cada vértice se pueden trazar tantas diagonales como vértices tiene el polígono menos tres, a saber, el vértice considerado y los dos vértices adyacentes. En el ejemplo; desde A se pueden trazar las diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$; desde E: $\overline{EB}$ y $\overline{EC}$; desde D: $\overline{DA}$ y $\overline{DB}$; desde C: $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$; desde B: $\overline{BE}$ y $\overline{BD}$.

Obsérvese que en este proceso cada diagonal ha sido repetida una vez, puesto que, por ejemplo, $\overline{EB}$ es los mismo que $\overline{BE}$. Se comprende fácilmente que el razonamiento empleado para el pentágono es válido para un polígono de n lados (o n vértices): Desde cada vértice se pueden trazar $n-3$ diagonales; como hay n vértices en total se trazan $n(n-3)$ diagonales. Pero en este proceso cada diagonal ha quedado repetida una vez; por tanto, la fórmula que expresa el número de diagonales de un polígono de n lados queda $n(n-3)/2$ (válida para $n \geq 3$).

Según el razonamiento que precede, aparece como intuitivamente aceptable que si con P_n se simboliza un polígono convexo de n lados y con $d(P_n)$ se simboliza el número de sus diagonales, se cumple

$$(5) \qquad \forall n,\ n \geq 3,\ d(P_n) = n(n-3)/2$$

Vamos a mostrar que la proposición anterior es verdadera; usamos inducción sobre el número de lados n del polígono. Dada la condición $d(P_n) = n(n-3)/2$ podemos verificar que:

Si $n = 3 \Rightarrow d(P_3) = 3(3-3)/2$. En efecto, un triángulo no tiene diagonales.

Si $n = 4 \Rightarrow d(P_4) = 4(4-3)/2$. En efecto, un cuadrilátero tiene dos diagonales.

Si $n = 5 \Rightarrow d(P_5) = 5(5-3)/2$. En efecto: un pentágono tiene cinco diagonales.

Si llamamos K el conjunto de los verificantes de la condición dada,

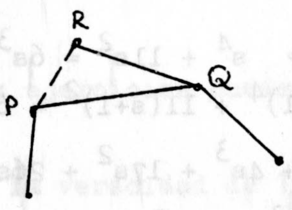
$$K = \{n : d(P_n) = n(n-3)/2\},$$

podemos afirmar que $K \subset N$, $K \neq \emptyset$ y $3 \in K$. Debemos demostrar ahora que $s \in K \Rightarrow s+1 \in K$. Escribamos

$$s \in K \Leftrightarrow d(P_s) = s(s-3)/2$$

$$s+1 \in K \Leftrightarrow d(P_{s+1}) = (s+1)(s-2)/2$$

Determinemos cuántas diagonales nuevas aparecen en un polígono de s lados cuando se aumenta un vértice. Sea R



el vértice que se aumenta; entonces PQ que era un lado es ahora una diagonal. Como el polígono tiene $s+1$ vértices, entonces el número de diagonales que pueden trazarse desde R es (s+1)-3. Así que el número de diagonales nuevas está dado por ((s+1)-3)+1, teniendo en cuenta la diagonal PQ. Por consiguiente,

$$d(P_{s+1}) = d(P_s) + (s-1) = (s(s-3)/2) + (s-1)$$
$$= (s+1)(s-2)/2.$$

Luego $s+1 \in K$, mostrando así (5).

---

(6) Sea la proposición condicional en n

$$(6) \qquad n^4 + 11n^2 = 6(n^3 + n)$$

Tenemos:

$$n = 0 \Rightarrow 0^4 + 11.0^2 = 6(0^3 + 0)$$
$$n = 1 \Rightarrow 1^4 + 11.1^2 = 6(1^3 + 1)$$
$$n = 2 \Rightarrow 2^4 + 11.2^2 = 6(2^3 + 2)$$
$$n = 3 \Rightarrow 3^4 + 11.3^2 = 6(3^3 + 3)$$

Consideremos entonces el conjunto K

$$K = \{ n: n^4 + 11n^2 = 6(n^3 + n) \}$$

Tenemos: $K \subset N$, $K \neq \emptyset$, $0 \in K$. Veamos si

$$s \in K \Rightarrow s+1 \in K.$$

Ahora bien:

$$s \in K \Leftrightarrow s^4 + 11s^2 = 6s^3 + 6s$$
$$s+1 \in K \Leftrightarrow (s+1)^4 + 11(s+1)^2 = 6((s+1)^3 + (s+1));$$
$$\Leftrightarrow s^4 + 4s^3 + 17s^2 + 26s + 12 =$$
$$= 6s^3 + 18s^2 + 24s + 12.$$

En la última igualdad se ha sustituido n por s+1.

$$s \in K \iff s^4 + 11s^2 = 6s^3 + 6s \Rightarrow$$

$$(s^4+11s^2) + (4s^3+6s^2+26s+12) =$$

$$(6s^3 + 6s) + (4s^3 + 6s^2 + 26s + 12) =$$

$$= 10s^3 + 6s^2 + 32s + 12 \neq 6s^3 + 18s^2 + 24s + 12.$$

Lo anterior significa que de la proposición $s \in K$ no se puede deducir la proposición $s+1 \in K$, o sea que la proposición condicional dada no se se cumple para cualquier número cardinal n. En efecto, la igualdad

$$n^4 + 11n^2 = 6(n^3 + n)$$

es equivalente a

$$n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n = 0,$$

la cual proviene de

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 0$$

como puede verificarse. Los únicos verificantes de la proposición condicional $n(n-1)(n-2)(n-3) = 0$ son 0,1,2,3.

Podríamos considerar como otro ejemplo, la proposición condicional $n(n-1)(n-2)\ldots(n - 100) = 0$, la cual se cumpel para $n = 0, 1, 2, \ldots, 100$, pero para $n = 101$ (y cualquier otro valor) es falsa.

4. Ejercicios.

Los siguientes ejercicios pueden proponerse entonces al curso:

1. Determinar la veracidad de las proposiciones usando la demostración por inducción:

1) $\forall n, \sum_{j=1}^{n} (4j - 2) = 2n^2$

2) $\forall n, \Sigma_{j=1}^{n} 2.3^{j-1} = 3^{n} - 1$

3) $\forall n, \Sigma_{j=o}^{n} j^{3} = n^{2}(n+1)^{2}/4$

4) $\forall n, \Sigma_{j=1}^{n} 1/j(j+1) = n/(n+1)$

5) $\forall n, \Sigma_{j=1}^{n} (2^{j-1} + 3^{j-1}) = (2^{n} - 1)+((3^{n} - 1)/2)$

6) $\forall n, \Sigma_{j=1}^{n} (j+3) = n^{3} + 3$

8) $\forall n, \Sigma_{j=1}^{n} 2j = n(n+1) + 2$

Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional
(Recibido en marzo de 1968)