e x á m e n e s   u n i v e r s i t a r i o s

31. Examen de álgebra lineal(15232)Ingenierías.

1. Sean U_1 y U_2 dos subespacioes de un espacio vectorial V. Mostrar entonces que:

i) $U_1 \cap U_2$ y $U_1 + U_2$ son subespacios de V.

ii) Si V tiene dimensión finita entonces

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

2. Sean $A = (a_{ij})_{nxm}$, $B = (b_{ij})_{mxp}$, $C = (c_{ij})_{pxq}$ matrices. Demustre que

i) $(AB)C = A(BC)$.

ii) Bajo qué condiciones podemos demostrar que

$$(A + B)C = AC + BC\ ,$$

y bajo tales condiciones demostrar la anterior igualdad.

iii) Diga si lo siguiente es correcto:

$$AC + BC = CA + CB\ .$$

3. Sea

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & b & c & \dots & h & k \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & h^2 & k^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n & b^n & c^n & \dots & h^n & k^n \end{pmatrix}$$

mostrar que

$$\begin{aligned} \det(a_{ij}) = |(a_{ij})| = (b-a)(c-a)\dots\dots(h-a)(k-a) \\ (c-b)\dots\dots(h-b)(k-b) \\ \dots\dots\ \dots\dots \\ (h-g)(k-g) \\ (k-h). \end{aligned}$$

4. Si L es el conjunto de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo F, ¿cuál es la dimensión de L considerado como un espacio vectorial sobre F ?

32. Examen parcial de álgebra lineal(15232) Ingenierías.

1. Verificar que el punto de intersección de la recta $\vec{x} = \vec{x}_o + t\vec{a}$ con el plano $\vec{b}\cdot\vec{x} - \delta = 0$ está dado por

$$\vec{x} = \vec{x}_o + \frac{\delta - \vec{b}\cdot\vec{x}_o}{\vec{b}\cdot\vec{a}}\,\vec{a}\,.$$

2. Determinar todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

tales que $A^3 + A = 0$.

3. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Sea L la recta de $\mathbb{R}^3$ de ecuación

$$(x/a) = (y/b) = z/c).$$

i) Encuentre un U tal que $V = U \oplus L$.

ii) ¿Cuál es la dimensión de un tal U ?

iii) ¿Es U único? Explique su respuesta.

iv) Si U no es único, caracterice a tales subespacios U.

v) Sea π el plano de vector normal $n = (n_1, n_2, n_3)$ que pasa por el origen y tal que

$$(a,b,c)\cdot(n_1, n_2, n_3) = 0.$$

¿Es $V = \pi \oplus L$? Explique su respuesta.

4. Sea V el espacio vectorial de todos los polinomios en la indeterminada X con coeficientes en un cuerpo K. Considere los polinomios siguientes:

$$p_1(X) = X^2 + X + 1,\ p_2(X) = X^2 - X - 2\ ,$$

$$p_3(X) = X^2 + X - 1,\ p_4(X) = X - 1.$$

Determine si estos polinomios son linealmente independientes o no. Si son linealmente dependientes expresar uno de ellos como una combinación lineal de los otros.

5. Para qué valores de x se tiene:

$$(x,4,1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

33. <u>Examen parcial de álgebra III</u>(15124) Matemáticas.

1. Defina los siguientes conceptos:

a) Grupo Abeliano

b) Grupo cíclico

c) subgrupo normal

d) Centro de un grupo

e) Homomorfismo de grupos

f) Automorfismo interior.

2. Demuestre dos de las siguientes afirmaciones:

a) Todo grupo cíclico es abeliano

b) Todo subgrupo de G contenido en el centro de G, es un subgrupo normal de G.

c) Todo subgrupo de un grupo abeliano es normal.

d) El núcleo de un homomorfismo $f: G \to G'$ es un subgrupo normal de G.

3. Sea $Gl_2(\mathbb{R})$ el grupo lineal de orden 2 sobre $\mathbb{R}$. Demuestre sucesivamente las siguientes afirmaciones:

a) Si $a \neq d$ ó si $b \neq c$, las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no conmutan.

b) Si $b \neq 0$, las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no conmutan.

c) El centro de $Gl_2(\mathbb{R})$ está formado por las matrices

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

4. Resuelva dos de los siguientes problemas.

a) Un grupo cíclico de orden $2p$, p primo y diferente de 2, tiene $p-1$ automorfismos.

b) Los únicos automorfismos de $\mathbb{Z}$ son $f(x) = x$ y $g(x) = -x$.

c) Sea G un grupo y A una parte de G. Sea H el subgrupo generado por A. Si A está contenido en $x^{-1}Hx$ para todo $x \in G$, H es normal.

d) Sea G un grupo y H y K subgrupos normales de G tales que $H \cap K = e$ y que $G = HK$. Entonces, todo elemento $x \in G$ se escribe de una y una sola manera en la forma $x = hk$, con $h \in H$ y $k \in K$.

5. Demuestre dos de las afirmaciones siguientes:

a) Sea G un grupo y H un subgrupo normal de G. Si G es abeliano, G/H es abeliano.

b) Sean G y G' grupos, y H un subgrupo normal de G. Sea $\varphi: G \to G/H$ la aplicación canónica ($\varphi(a) = aH$). Para que una aplicación $f: G/H \to G'$ sea un homomorfismo, es necesario y suficiente que $f \circ \varphi$ sea un homomorfismo.

c) Sea G un grupo cíclico finito y sea a un generador de G; sea H un subgrupo de G. Demuestre que G/H es cíclico y que aH es un generador de G/H.

d) Sea G un grupo finito. Demuestre que si G no tiene ningún subgrupo propio, G es cíclico de orden primo.

34. Examen de Cálculo Avanzado I (15260) Matemáticas y Física.

1. Dibuje el trazo de $\vec{r}(t) = (t^2, t^3-4t)$, $t \in \mathbb{R}$, hallando los puntos múltiples. a) En el punto doble de $\vec{r}$ halle las tangentes a $\Gamma = \vec{r}(\mathbb{R})$. b) Halle las tangentes horizontales de Γ.

2. Sea g una función continua en $[0,1]$ y tal que $g(1) = 0$. a) Muestre que la sucesión $(x^n g(x))$ converge simplemente hacia la función 0 en $[0,1]$.

b) Muestre que la sucesión anterior converge uniformemente hacia 0 en $[0,1]$.

c) Tomando $g(x) = 1 - x$, trace las gráficas de algunas de las funciones $x^n g(x)$.

3. Ponemos

$$\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

donde P y Q son las funciones definidas por

$$P(x,y) = \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2 y}$$

$$Q(x,y) = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2}$$

a) Mostrar que en $A = \{(x,y);\ x > 0,\ y > 0\}$ las dos funciones son continuamente diferenciables y que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

b) Encuentre una función f definida en A y tal que $df = \omega$.

c) Calcule el valor de $\int_\Gamma \omega$ donde Γ está definida por $x(t) = t + \cos t$, $y(t) = 1 + \operatorname{sen}^2 t$ con $t \in [0,\pi/2]$.

35. Examen de Cálculo Avanzado II (1527) Matemáticas y Física.

1. Muestre que

$$\int_{\vec{K}_r(0)} x\,dz = \pi i r^2 \qquad (z = x + iy)$$

¿Por qué no es válido el teorema de CAUCHY en este caso?

2. Sea $f(z) = u(x) + i.v(y)$, $z = x + iy$. Si u y v son funciones derivables de las variables x é y, resp., encontrar condiciones necesarias y suficientes para que f sea holomorfa en todo el plano.

3. Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo el plano complejo.

a) Si f no es constante, muestre que dado $M > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|z| > R \Rightarrow |f(z)| > M.$$

b) Usando el resultado en a), demuestre el Teorema Fundamental del Algebra.

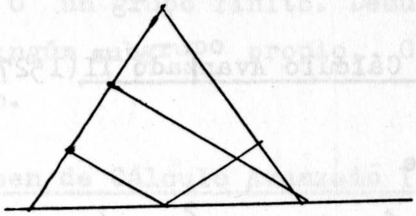
c) Deduzca entonces que un polinomio $P(z) = a_0 + \dots + a_m z^m$, $a_m \neq 0$, con coeficientes complejos tiene exactamente m raíces.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia.
Octubre de 1967.

36. Examen de Geometría (1503). Arquitectura.

1. Demostrar que la suma de las longitudes de las perpendiculares trazadas desde un punto cualquiera de la base de un triángulo isósceles a los otros lados, es igual a la longitud de la altura corres-

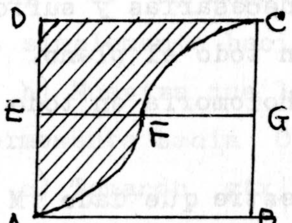
pondientes de cualquiera de estos lados.



2. Sea m_a la longitud de la mediana del lado $\overline{BC}$ del triángulo ABC y sean $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ y $\overline{AB} = c$; probar que

$$m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}) .$$

3. En la figura, ABCD es un cuadrado en el cual



E,F,G, son los puntos medios de $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, respectivamente. AF, FC los arcos circulares con centros en E, G, respectivamente. Si el lado del cuadrado tiene medida s, determinar el área de la región sombreada.

4. Construir un triángulo ABC (con regla y compás); si se dan:

a) a, b, h_b

b) m_a, h_a y $\measuredangle$ B,

donde a es la medida del lado $\overline{BC}$; b la medida del lado $\overline{AC}$, h_b la medida de la altura correspondiente al lado $\overline{AC}$, h_a la medida de la altura correspondiente al lado $\overline{BC}$.

Departamento de **Matemáticas** y Estadística.
Universidad Nacional de Colombia.
Enero de 1968.

37. <u>Examen previo de Cálculo I</u>(01511) Ingenierías

1. Halle los ángulos que forman las tangentes a las

parábolas $y = x^2$, $y^2 = x$ en sus puntos de intersección.

2. Calcular:

i) $\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{(1+ax)\cdot(1+bx)} - 1)/x$

ii) $\lim\limits_{x \to 1} (x^m - 1)/(x^n - 1)$

3. Considérese la recta $y = 2x + 4$ y la parábola $y = \sqrt{x}$. Hallar la distancia de la redta a la tangente a la parábola paralela a la recta.

4. Si $f(x) = (\sqrt{|x|})/x$ calcular $f'(1)$, $f'(-1)$.

5. Dibujar la gráfica de la función racional

$$f(x) = (x^2-16)/(x^3 - x^2 - 2x).$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia

38. <u>Examen parcial de Cálculo Avanzado II</u>(1527) Matemáticas y Física.

. Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Muestre que si existen $k > 0$ y m entero positivo tales que $|f(z)| < k|z|^m$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es un polinomio de grado m.

2. a) Sea a,b,c, números reales (positivos o negativos). Determine bajo qué condiciones sobre a,b y c la serie

$$(S)\quad 1 + \frac{a.b}{1.c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)} z^2 + \ldots + \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)b(b+1)\ldots(b+k-1)}{k\, c(c+1)\ldots(c+k-1)} z^k + \ldots.$$

converge. En el caso de convergencia,, encuentre los radios de convergencia.

b) Muestre que la función f hacia la cual converge la serie (S) (en los casos en que ello ocurre) satisface la ecuación diferencial

$$z(1-z)f''(z) + (c-(a+b+1)z)f'(z)-abf(z) = 0.$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Enero de 1968

39. Examen final de Cálculo Avanzado (II)(1527) Matemáticas y Física.

1.a) Suponga que f tiene un cero de orden n en a; muestre entonces que f' tiene un cero de orden $n-1$ en a.

b) Deducir de a) que $g(z) = zf'(z)/f(z)$ tiene un polo de orden 1 en a, si $a \neq 0$.

c) Muestre que $\operatorname{Res}_{z=a} g(z) = na$.

2. Sean $A = \{ z=x+iy;\ |y| \leq \pi \}$ y $f: A \to \mathbf{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} z/(e^z - 1) & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

a) Muestre que f es continua en A.

b) Defina $g: \mathbf{R} \to \mathbb{C}$ por

$$g(x) = \int_{\vec{T}_x} f(z)dz = \int_0^{\pi} f(z)dy$$

donde $\vec{T}_x = \{z = x+iy;\ 0 \leq y \leq \pi\}$. Muestre que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. (Muestre que

$$|e^{x+iy} - 1| \geq e^x - 1$$

si $x > 0$ y $0 \leq y \leq \pi$, deduciendo entonces que $|g(x)| \leq \pi(x+\pi)/(e^x - 1)$.)

c) Muestre que $g'(x)$ existe si $x \neq 0$ y que

$$g'(x) = \int_0^{\pi} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dy = \frac{2ixe^x}{e^{2x} - 1} - \frac{\pi}{e^x + 1}$$

si $x \neq 0$.

3. Considere la ecuación diferencial

$$z(z+2)w' + (z+1)w - 1 = 0.$$

Suponiendo que exista una solución holomorfa $w(z) = \Sigma_{k=o}^{\infty} a_k z^k$ alrededor de 0, determine los coeficientes a_k de este desarrollo y precise el radio de convergencia de w.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Diciembre de 1967