Boletín de Matemáticas
Volumen II(1968), págs. 104 - 122

FUNDAMENTOS DEL ANALISIS II

por
Alonso TAKAHASHI O.

§6 DEFINICIONES POR RECURRENCIA

1. Sucesiones. Una sucesión (infinita) de elementos de un conjunto X es una función de $\mathbb{N}$ en X; intuitivamente, una tal sucesión es una familia de elementos de X dados <<uno detrás de otro, partiendo de uno inicial.>>

Si φ es una sucesión de elementos de X en lugar de $\varphi(n)$ se escribe x_n; las ecuaciones

$$x = x_n \quad y \quad x = \varphi(n)$$

son entonces equivalentes.

Si no hay riesgo de confusión, la sucesión φ se designa

$$(x_n) \quad ó \quad (x_0, x_1, \ldots).$$

Dado un conjunto X y una función f de X en X, a partir de cada elemento $a \in X$ puede obtenerse en forma natural una sucesión de elementos de X. Intuitivamente, basta definir:

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2), \end{aligned}$$

<<y así sucesivamente>>. La sucesión φ así definida depende claramente de f y de a.

2. Teorema de Definición por Recurrencia. La existencia y unicidad de la sucesión que acaba de mencionarse está garantizada por el siguiente teorema:

Teorema 1. Dados un conjunto X, una función f de X en X y un elemento a de X, existe una única función φ^* de $\mathbb{N}$ en X tal que:

(1) $\varphi^*(0) = a$,

(2) $\varphi^*(n^+) = f(\varphi^*(n))$. para todo n de $\mathbb{N}$.

Comentarios. a) Obsérvese que, si se escribe x_n en lugar de $\varphi^*(n)$, las condiciones (1) y (2) son las mencionadas en .1, a saber:

$$x_0 = a$$

$$x_{n^+} = f(x_n) \qquad (n = 0,1,2,\ldots).$$

b) La condición (1) es equivalente a $(0,a) \in \varphi^*$ mientras que (2) puede enunciarse así: si $x = \varphi^*(n)$ entonces $f(x) = \varphi^*(n^+)$; es decir si $(n,x) \in \varphi^*$ entonces $(n^+, f(x)) \in \varphi^*$.

c) Como toda función de $\mathbb{N}$ en X es una parte de $\mathbb{N} \times X$, la función φ^* deberá buscarse, de acuerdo con b), entre aquellas relaciones φ que son subconjuntos de $\mathbb{N} \times X$ y satisfacen las condiciones:

$$(1') \quad (0,a) \in \varphi$$

$$(2') \quad (n,x) \in \varphi \Rightarrow (n^+, f(x)) \in \varphi,$$

para todo n de $\mathbb{N}$.

Existen relaciones de este tipo, por ejemplo, $\mathbb{N} \times X$ .es una de ellas; sinembargo estas relaciones son, en general, demasiado "anchas" para ser funciones : para un n puede haber varios puntos x de X tales que $(n,x) \in \varphi$. La candidata natural para ser φ^* es entonces la más delgada de las relaciones φ ya descrita y como es casi evidente que la intersección de todas estas relaciones es de nuevo una relacion del mismo tipo (y la más "delgada" de ellas, puesto que está contenida en cada una de las otras), es de esperarse que esta intersección sea la función φ^* que se busca.

Demostración del Teorema. A) Existencia. Sea F el conjunto de las partes φ de $\mathbb{N} \times X$ que satisfacen (1′) y (2′) (v. § 2, Prop. 9). La colección F no es vacía existiendo entonces su intersección (v. § 2, Prop. 6), a la cual llamaremos φ^* : es decir:

$$\varphi^* = \bigcap F .$$

Se deduce de esta definición que no puede existir un elemento φ de F tal que $\varphi \subset \varphi^*$ y $\varphi \neq \varphi^*$.

Mostraremos ahora que φ^* goza de las propiedades requeridas:

(a) $\varphi^* \in F$. Es decir, $\varphi^* \subset \mathbb{N} \times X$ y φ^* satisface a (1′) y (2′). Esto es inmediato por la definición de F y de φ^*.

(b) φ^* es una función y su dominio es $\mathbb{N}$.

Como $\varphi^* \subset \mathbb{N} \times X$ entonces $d_{\varphi^*} \subset \mathbb{N}$, luego, basta demostrar que φ^* es una función cuyo dominio contiene a $\mathbb{N}$, es decir, hay que demostrar que para todo n de $\mathbb{N}$ existe un único x tal que $(n,x) \in \varphi^*$. Sea entonces $p\{n\}$ la condición

<< existe un único x tal que $(n,x) \in \varphi^*$>>.

(i) $p\{0\}$ es cierta. En efecto, $(0,a) \in \varphi^*$, por (1′); además, si existiera un b tal que $(0,b) \in \varphi^*$ y $b \neq a$, entonces, si $\varphi = \varphi^* - \{(0,b)\}$, se tendría $\varphi^* \in F$ y además $\varphi \subset \varphi^*$ y $\varphi \neq \varphi^*$; lo cual es imposible.

(ii) Suponiendo que $p\{n\}$ es cierta, sea x_o el único elemento (de X) tal que $(n, x_o) \in \varphi^*$. Entonces, según (2'), $(n^+, f(x_o)) \in \varphi^*$.

Además, si existiera un y_o tal que $(n^+, y_o) \in \varphi^*$ y $y_o \neq f(x_o)$ entonces, si $\varphi = \varphi^* - \{(n^+, y_o)\}$, se tendría $\varphi \in F$ y además $\varphi \subset \varphi^*$ y $\varphi \neq \varphi^*$; lo cual es imposible.

B) Unicidad. Supóngase que ψ es una función que satisface las condiciones del teorema. Entonces:

(i) $\psi(0) = a = \varphi^*(0)$,

(ii) Suponiendo que $\psi(n) = \varphi^*(n)$, se tiene

$$\psi(n^+) = f(\psi(n)) = f(\varphi^*(n)) = \varphi^*(n^+).$$

Luego $\psi(n) = \varphi^*(n)$, para todo n de $\mathbb{N}$, y entonces $\psi = \varphi^*$ (v. §3, Prop. 4).∎

§7 OPERACIONES ARITMETICAS.

1; Un método para definir leyes internas. Sea E un conjunto, $\mathcal{F}(E)$ el conjunto de todas las funciones de E en E y Φ una función de E en $\mathcal{F}(E)$, (Esto equivale a suponer que para cada elemento x de E se da una función f_x de E en E). En esta situación puede definirse en forma bastante natural una ley interna $\oplus$ en E; en efecto, basta definir

$$x \oplus y = f_x(y)$$

para todo x y todo y de E.

Este será el procedimiento usado para definir la adición y la multiplicación de números naturales.

2. La adición. Se demuestra enseguida el teorema de existencia y unicidad de la adición.

Teorema 1. Existe una ley interna $+$ en $\mathbb{N}$, y una sola, tal que:

(A.1) $m + 0 = m$, para todo m de $\mathbb{N}$,

(A.2) $m + n^+ = (m + n)^+$.

Esta ley interna se llama adición; si m y n son números naturales, se dice que $m + n$ es la suma de m y n.

Nota. Debe tenerse presente que de ahora en adelante el signo $+$ se usará en dos sentidos diferentes:

(1) Como superíndice: n^+ es el siguiente de n.

(2) Como signo operatorio: $m + n$ es la suma de m y n; más tarde se demostrará que $n^+ = n + 1$.

Demostracion del Teorema. A) Existencia. Sea m un número natural. Aplicando el Teorema de Definición por Recurrencia con

$$X = \mathbb{N}$$
$$f = sg$$
$$a = m$$

puede afirmarse, para cada m de $\mathbb{N}$, la existencia de una función

$$s_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

tal que :

$$(1) \quad s_m(0) = m,$$
$$(2) \quad s_m(n^+) = sg(s_m(n)) = (s_m(n))^+.$$

El procedimiento descrito en $\cdot 1$ permite entonces definir una ley interna en $\mathbb{N}$ conviniendo que

$$m + n = s_m(n)$$

para todo m y todo n de $\mathbb{N}$.

Las condiciones (1) y (2) corresponden a (A.1) y (A.2) respectivamente.

B) Unicidad. Suponiendo que $*$ es una ley interna en $\mathbb{N}$ que satisface (A.1) y (A.2); se demuestra fácilmente por inducción que la condición

$$p\{n\} \quad : \quad (\forall m \in \mathbb{N})\ (m * n = m + n),$$

es cierta para todo n. Pero esto significa que $* = +$ ∎

3. Propiedades de la Adición.

Proposicion 1. $n + 1 = n^{+}$

Demostración. $n + 1 = n + 0^{+}$ (por la definicion de 1)

$= (n + 0)^{+}$ (por A.2)

$= n^{+}$ (por A.1) . ∎

Definición 1. (1) $k + m + n = (k + m) + n.$

(2) $h + k + m + n = (h + k + m) + n.$

Proposición 2. La adición es asociativa. Más formalmente:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ (\forall k \in \mathbb{N})\ \big(k + (m+n) = (k + m) + n\big).$$

Demostración. Sea $p\{n\}$ la condición

$$(\forall m \in \mathbb{N})\ (\forall k \in \mathbb{N})\ \big(k + (m+n) = (k + m) + n\big).$$

(i) $k + (m + 0) = k + m$ (Por A.1)

$(k + m) + 0 = k + m$ (Por A.1),

luego $k + (m+0) = (k + m) + 0$ (para todo k y todo m de $\mathbb{N}$).

En consecuencia $p\{0\}$ es cierta.

(2) Suponiendo que, para todo k y todo m de $\mathbb{N}$, $k + (m + n) = (k + m) + n$ (hip. ind.), se tiene:

$k + (m + n^{+}) = k + (m + n)^{+}$ (por A.2)

$= (k + (m + n))^{+}$ (por A.2)

$= ((k + m) + n)^{+}$ (hip.ind.)

$= (k + m) + n^+$ (por A.2),

luego, $k + (m + n^+) = (k + m) + n^+$ (para todo k y todo m de $\mathbb{N}$), que es precisamente $p\{n^+\}$.

Entonces $p\{n\}$ es cierta para todo n de $\mathbb{N}$; ∎

Observación . En la proposición anterior figuran tres variables, k, m y n , una sola de las cuales, a saber n, ha sido tomada como variable de la condición p. Se dice entonces que la demostración se ha llevado a cabo "por inducción sobre n".

Antes de demostrar la conmutatividad es conveniente obtener dos resultados parciales:

Lema 1. $0 + n = n$

(Obsérvese que, debido a A.1, esto es equivalente a $0 + n = n + 0$, que es un caso particular de conmutatividad.)

Demostración. (por inducción)

(i) $0 + 0 = 0$ (por A.1)

(ii) $0 + n^+ = (0 + n)^+$ (por A.2)

$= n^+$ (hip. ind.). ∎

Lema 2 . $(n + m)^+ = n^+ + m$.

Demostración .(por inducción sobre m):

(i) $(n + 0)^+ = n^+$ (por A.1),

$= n^+ + 0$ (por A.1).

(ii) $(n + m^+)^+ = ((n + m)^+)^+$ (por A.2),

$= (n^+ + m)^+$ (hip.ind.),

$= n^+ + m^+$ (por A.2). ∎

Proposición 3. La adición es conmutativa.

Más formalmente:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ (n + m = m + n).$$

Demostración. (por inducción sobre n):

(i) $0 + m = m$ (Lema 1),

$= m + 0$ (por A.1).

(ii) $m + n^{+} = (m + n)^{+}$ (por A.2),

$= (n + m)^{+}$ (hip. ind.),

$= n^{+} + m$ (Lema 2). ∎

Nota . De acuerdo con la definición 1 y las proposiciones 2 y 3 se tiene:

1) $k + m + n = (k + m) + n = (m + k) + n = m + k + n$ $= \ldots$

2) $h + k + m + n = (h + k + m) + n = ((h + k) + m) + n = (h + k) + (m + n) = h + (k + (m + n)) = h + (k + m) + n = h + (m + k) + n = (h + m) - (k + n) = \ldots$.

Proposición 4. (Propiedad Cancelativa de la Adición).

$$h + n = k + n \Rightarrow h = k .$$

Demostracion. (por inducción sobre n). ∎

4. La Multiplicación.El siguiente teorema de existencia y unicidad de la multiplicación es análogo al Teorema 1:

Teorema 2. Existe una ley interna en $\mathbb{N}$, y una sola tal que

(M. 1) $m.0 = 0$, para todo n de $\mathbb{N}$,

(M.2) $m.n^{+} = m.n + m$.

Esta ley interna se llama multiplicación: si m y n son número naturales, se dice que m.n es el producto de m y n. Cuando no hay riesgo de confusión en lugar de m.n se escribe mn.

Demostración del Teorema. A) Existencia. Sea m un número natural .Aplicando el Teorema de definición por recurrencia con

$$X = \mathbb{N}$$
$$f = s_m$$
$$a = 0$$

puede afirmarse que para cada m de $\mathbb{N}$ existe una función

$$p_m: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

tal que:

(1) $p_m(0) = 0$

(2) $p_m(n^+) = s_m(p_m(n))$,

$= m + p_m(n)$ (por la definición de $+$).

El procedimiento descrito en .1 permite entonces definir una ley interna en $\mathbb{N}$ conviniendo que

$$m.n = p_m(n)$$

para todo m y todo n de $\mathbb{N}$.

Las condiciones (1) y (2) corresponden a (M.1) y (M.2) respectivamente.

B) Unicidad. Suponiendo que $.$ y $\circ$ satisfacen las condiciones M.1 y M.2 se tiene:

(i) $m.0 = 0 = m\circ 0$, para todo m de $\mathbb{N}$.

(ii) Suponiendo $m.n = m\circ n$ para todo m de $\mathbb{N}$, se tiene: $m\cdot 1^+ = m\cdot n + m = m\circ n + m = m\circ n^+$, para todo m de $\mathbb{N}$.

Luego $m.n = m\circ n$ para todo m y todo n de $\mathbb{N}$, es decir, $. = \circ$. ∎

5. Propiedades de la Multiplicación.

Proposición 5. La multiplicación es distributiva (por la derecha) con respecto a la adición.

Es decir:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}) \Big((k+m)\, n = k\, n + m\, n \Big).$$

Demostración (por inducción sobre n):

(i) $(k + m).\, 0 = 0$ (por M.1).

$k.0 + m.0 = 0 + 0 = 0$ (por M.1 y A.1).

luego $(k + m).0 = k.0 + m.0$.

(ii) $(k + m)\, n^+ = (k + m)\, n + (k + m)$ (por M.2),

$= (k\, n + m\, n) + (k + m)$ (hip: ind.)

$= (k\, n + k) + (m\, n + m)$ (4,Nota),

$= k\, n^+ + m\, n^+$ (por M.2). ∎

La demostración de la conmutatividad se simplifica obteniendo primero dos resultados preliminares.Este es el objeto de los dos lemas siguientes los cuales se demuestran inmediatamente por inducción.

Lema 3. $0.n = 0$.

Lema 4. $1.n = n$.

Proposicion 6. La multiplicación es conmutativa.Es decir:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\,(m\, n = n\, m) .$$

Demostración. (por inducción sobre n):

(i) $m.0 = 0 = 0.m$ (por M.1 y Lema 3).

(ii) $m\, n^+ = m\, n + m$ (por M.2),

$= n\, m + 1.m$ (hip.ind. y Lema 4),

$= (n + 1)\, m$ (Prop. 4),

$= n^+\, m$ (Prop. 1). ∎

Colorario. La multiplicación es distributiva(por la izquierda) con respecto a la adición.

Proposición 7. La multiplicación es asociativa. Es decir:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})\big(k(m\cdot n) = (k\cdot m)n\big).$$

Demostración. (por inducción sobre n):

(i) $k\cdot(m.0) = k.0 = 0$ (por M.1)

$(k\cdot m).0 = 0$ (por M.1)

Luego $k\cdot(m.0) = (k\cdot m).0$.

(ii) $k\cdot(m\cdot n^{+}) = k\cdot(m\cdot n + m)$ (por M.2)

$= k\cdot(m\cdot n) + k\cdot m$ (Prop. 5, Cor.),

$= (k\cdot m)\cdot n + k\cdot m$ (hip. ind.),

$= (k\cdot m)\cdot n^{+}$ (por M.2).∎

Proposición 8. Si $m\cdot n = 0$ entonces $m = 0$ ó $n = 0$.

Demostración. (Por reducción al absurdo). Suponiendo que $m \neq 0$ y $n \neq 0$, es decir, que $m \in \mathbb{N}^{*}$ y $n \in \mathbb{N}^{*}$ entonces (Prop. 4, § 5) existen h, k tales que $h^{+} = m$ y $k^{+} = n$, es decir:

$$h + 1 = m \quad y \quad k + 1 = n$$

Luego:

$$mn = (h+1)(k+1) = hk + h + k + 1 = (hk + h + k)^{+}$$

y entonces, debido a (P.4), se tendría $mn \neq 0$.∎

Proposición 9. (Propiedad Cancelativa de la Multiplicación).

$$hn = kn, \wedge, n \neq 0 \implies h = k.$$

Demostración. (Por inducción sobre h). Sea $p\{h\}$ la condición

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\big((hn = kn \wedge n \neq 0) \implies h = k\big).$$

i) Veamos que $p\{0\}$ es cierta: Dados k y n arbitrarios, supongamos que $0.n = k\,n$ y que $n \neq 0$. Entonces $0 = k\,n$ y $n \neq 0$, luego, por la proposición anterior, $k = 0$.

ii) Supongamos ahora que $p\{h\}$ es cierta y demostremos $p\{h^+\}$: Dados k y n arbitrarios, supongamos que $h^+ n = k\,n$ y que $n \neq 0$. Entonces $k \neq 0$ pues en caso contrario se tendría $h^+ n = 0$, lo cual es imposible ya que $h^+ \neq 0$ y $n \neq 0$ (proposición anterior); luego (Prop.4, § 5) existe k_o tal que $k_o^+ = h$ y entonces la igualdad $h^+ n = kn$ equivale a $(h + 1)n = (k_o + 1)\,n$, es decir, $h\,n + n = k_o n + n$.

La propiedad cancelativa de la adición y la hip. ind. implica entonces que $h = k_o$.

Luego $h^+ = k_o^+$, es decir, $h^+ = k$. ∎

6. <u>La Exponenciación</u>. Así como la multiplicación se introdujo con ayuda de las funciones s_m, la exponenciación se define a partir de las funciones p_m:

Aplicando el teorema de definición por recurrencia con

$$X = \mathbb{N}$$
$$f = p_m$$
$$a = 1$$

puede afirmarse, para cada m de $\mathbb{N}$, la existencia de una función

$$e_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

tal que:

(1) $e_m(0) = 1$,

(2) $e_m(n^+) = m\, e_m(n)$

Definiendo

$$m^n = e_m(n),$$

se obtiene una ley interna en $\mathbb{N}$ cuyo valor en (m,n) se nota m^n y que goza de las propiedades siguientes:

$$(E.1) \quad m^0 = 1$$

$$(E.2) \quad m^{n+1} = m^n . m .$$

Estas propiedades caracterizan a la ley interna en cuestión. Resumiendo:

Teorema 3. Existe una única ley interna en $\mathbb{N}$ que satisface las condiciones (E.1) y (E.2).

Esta ley interna se llama exponenciación.

Proposición 9. (1) $1^n = 1.$

(2) $m^1 = m.$

(3) $k^{m+n} = k^m k^n .$

(4) $(k\, m)^n = k^n m^n .$

(5) $(k^m)^n = k^{m\, n} .$

§ 8 ORDEN NATURAL

1. Resultados preliminares. La demostración de los lemas siguientes es inmediata:

Lema 1. $m \in n \Rightarrow m^+ \in n^+ .$

Demostración. Por inducción sobre n . ∎

2. Las Relaciones $<$ y $\leq$. Recordando la estructura de los "primeros" números naturales:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = 0^+ = \{0\}$$

$$2 = 1^+ = \{0, 1\}$$

$$3 = 2^+ = \{0, 1, 2\}$$

$$4 = 3^+ = \{0, 1, 2, 3\}$$

se observa que los "antecesores" de cada número son precisamente sus elementos, es decir, los números que <u>pertenecen</u> a él. Esta observación sugiere introducir el orden usual en $\mathbb{N}$ con ayuda de la pertenencia.

Definición 1. $< = \{ (m,n) : m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge m \in n \}$

El enunciado $m < n$ (es decir, $(m,n) \in <$) se lee "m es menor que n".

Según la definición, si m y n son naturales:

$$m < n \iff m \in n .$$

Proposición 1. <u>La relación $<$ es transitiva.</u>

Demostración . Véase § 5, Prop. 2'. ∎

Definición 2. $\leq \; = \{ (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m < n, \vee , m = n \}$

El enunciado $m \leq n$ (es decir, $(m,n) \in \leq$) se lee "m es menor o igual que n".

Según la definición, si m y n son números naturales:

$$m \leq n \iff m < n \vee m = n$$

$$m < n \iff m \leq n \wedge m \neq n$$

En lugar de $m \leq n$ (resp. $m < n$) suele escribirse $n \geq m$ (resP. $n > m$) diciéndose entonces que n es "mayor o igual" (respectivamente "mayor") que m.

Proposición 2. <u>$\leq$ es un orden parcial en $\mathbb{N}$.</u>

La relación $\leq$ se llama el <u>orden natural.</u>

Lema 2. <u>El conjunto $\mathbb{N}$ tiene mínimo, a saber</u> 0, (con respecto al orden $\leq$).

Demostración. Como $0 \in \mathbb{N}$, basta probar que $(\forall n \in \mathbb{N})\ (0 \leq n)$, lo cual se hace inmediatamente por inducción . ∎

Teorema 1. $\leq$ es un buen orden o también: $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado (por el orden natural).

Demostración. Basta demostrar la proposición:

$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall S \subset \mathbb{N})\ (n \in S \Rightarrow S$ tiene mínimo), lo cual se hará por inducción :

i) Sea $S \subset \mathbb{N}$ tal que $0 \in S$. Entonces S tiene mínimo, a saber 0 (v. Lema 2).

ii) Supongamos ahora que si n pertenece a un subconjunto de $\mathbb{N}$ entonces dicho subconjunto tiene mínimo Sea entonces S un subconjunto cualquiera de $\mathbb{N}$, y supongamos que $n^+ \in S$. Si $0 \in S$ entonces 0 es el mínimo de S. En caso contrario $S \subset \mathbb{N}^*$ y n pertenece al conjunto $S = \{h \in N : h^+ \in S\}$: entonces S' tiene un elemento mínimo, por ejemplo h_o.

Veamos que el mínimo $k_o = h_o^+$ es el mínimo de S. En primer lugar, es claro que $k_o \in S$ (por definición de S'). Además, si $k \in S$ entonces $k \neq 0$ (pues $S \subset \mathbb{N}^*$), luego puede definirse $h = k^-$ y entonces $h^+ = k$ $(\in S)$ luego $h \in S'$, y como h_o es el mínimo de S', se tiene $h_o \leq h$ y entonces $h_o^+ \leq h^+$ (v. Lema 1); es decir, $k_o \leq h$. ∎

Colorario 1. $\leq$ es un orden total. O también: $\mathbb{N}$ es un conjunto totalmente ordenado (por el orden natural).

Colorario 2. Si m y n son números naturales se verifica una y una sola, de las alternativas siguientes:

$$m < n \quad , \quad m = n \quad , \quad n < m \, .$$

Colorario 3. Para todo m y todo n naturales:

$$m < n \quad \text{sii} \quad m \subset n \;\wedge\; m \neq n.$$

En lo que sigue, salvo que se diga lo contrario, se considerará a $\mathbb{N}$ como un conjunto ordenado por el orden natural.

3. Inducción Transfinita. Sea X un conjunto ordenado por un orden $\preccurlyeq$. En este caso, en lugar de « $x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$ » se escribe $x \prec y$.

Definición. $\sigma(x) = \{ t \in X \colon t \prec x \}$

Este conjunto es el segmento (abierto) determinado por x.

Proposición 3. Para todo número natural n,

$$\sigma(n) = n \, .$$

Teorema 2. (Principio de Inducción Transfinita). Sea X un conjunto bien ordenado y sea S un subconjunto de X tal que, para todo x de X

$$\sigma(x) \subset S \Longrightarrow x \in S,$$

entonces $S = X$

Demostración. Si se supone que $X - S \neq \emptyset$ entonces este conjunto debe tener mínimo, p.ej., x_o Ahora bien si $x \prec x_o$ entonces x no puede pertenecer a $X - S$, luego debe estar en S ; en otras palabras

$\sigma(x_o) \subset S$. Y entonces, por hipótesis, $x_o \in S$, lo cual es absurdo pues $x_o \in X - S$ ya que es el mínimo de este conjunto.

En consecuencia $X - S = \emptyset$ luego $S \subset X$ y entonces $S = X$. ∎

Colorario 1. (Principio de Inducción, 3ª-forma). Si $S \subset \mathbb{N}$ y para todo n,

$$\sigma(n) \subset S \Rightarrow n \in S$$

es decir, $n \subset S \Rightarrow n \in S$

entonces $S = \mathbb{N}$.

Colorario 2 . (Principio de Inducción, 4ª-forma). Sea $p\{n\}$ un enunciado que se refiere a n. Si

(i) $p\{0\}$ (es cierto) y

(ii) para todo n

$$p\{0\} \wedge p\{1\} \wedge \ldots \wedge p\{n\} \Rightarrow p\{n^+\} ,$$

entonces

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (p\{n\}) .$$

§ 9. PROPIEDADES ALGEBRAICO-ORDINALES

Monotonía de la Adición. Diferencia. La proposición siguiente relaciona el orden y la adicion:

Proposición 1. $m < n \Rightarrow m + k < n + k$

Demostración. (Por inducción sobre k):

(i) $m < n \Rightarrow m + 0 < n + 0$.

(ii) $m + k < n + k \Rightarrow (m + k)^+ < (n + k)^+$ (§ 8, Lema 1 y Df.1)

$$\Downarrow$$

$$m + k^+ < n + k^+ .$$ ∎

Colorario . (1) $m < n, \wedge, h < k \Rightarrow m + h < n + k$.

(2) $m \leq n, \wedge, h \leq k \Rightarrow m + h \leq n + k$.

(3) $m \leq n, \wedge, h < k \Rightarrow m + h < n + k$.

Proposicion 2. Sean m y n números naturales. Si $m < n$ entonces existe un único natural k tal que

$$m + k = n .$$

Demostración . La existencia se demuestra por inducción sobre n ; la unicidad se deduce de la Prop. 4, § 7. ∎

Definición 1. Si $m \leq n$, al único número natural h tal que $m + h = n$ se llama diferencia entre m y n y se designa $n - m$.

Si $n \neq 0$, es decir, si $n \in \mathbb{N}^*$, entonces $n - 1 = n^-$.

Proposición 3. (Principio de Inducción, 5ª-forma). Sea $p\{n\}$ un enunciado que se refiere a n . Para cada número natural k , si

(i) $p\{k\}$ (es cierto) y

(ii) para todo $n \geq k$:

$p\{n\} \Rightarrow p\{n^+\}$

entonces

$$(\forall n \geq k) (p\{n\}) .$$

Nota . $(\forall n \geq k)$ significa $(\forall n \in A)$ donde $A = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq k \}$.

Demostración Sea $q\{n\}$ el enunciado $p\{n + k\}$; entonces:

(i) $q\{0\}$ es $p\{k\}$, luego es cierto.

(ii) Supóngase que $q\{n\}$, o sea $p\{n + k\}$, es cierto.

Como $n \geq 0$ entonces $n + k \geq k$ (v.Prop. 1,Cor) y entonces $p\{(n + k)^+\}$, es cierto. Luego $q\{n^+\}$ es cierto.

En consecuencia, $q\{n\}$ es cierto para todo n.

Ahora bien, si $n \geq k$ entonces $n = m + k$ para algún m (v. Prop. 2). Como $q\{m\}$ es cierto, entonces $p\{m + k\}$, es decir, $p\{n\}$, es cierto.

Luego $p\{n\}$ es cierto para todo n mayor o igual que k. ∎

.2. Monotonía de la Multiplicación. Se enuncia una relación entre el orden y la multiplicación:

Proposición 4. $m < n \,,\wedge\,, k > 0 \Rightarrow mk < nk$.

Demostración. Se trata de probar que

$$(\forall k > 1)(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(m < n \Rightarrow m \cdot k < nk),$$

lo cual se logra inmediatamente por el Principio de Inducción, 5^a-forma. ∎

Colorario. $m \leq n \Rightarrow m \cdot k \leq nk$.

(m, n, k son números naturales). ∎

Departamento de Matemática y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
(Recibido en mayo de 1968)