40. Examen parcial de Algebra Lineal (15232). Ingenierías.

1. Sea V el conjunto de todas las funciones f definidas en R (conjunto de todos los números reales) c con valores en R ($f:R \to R$).

a) Muestre que V es un R-espacio vectorial para las operaciones $f + g$ y λf definidas por

i) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ para todo $x \in R$;

ii) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ para todo $x \in R$,

donde $f, g \in V$ y $\lambda \in R$.

b) Una función $f: R \to R$ ($\in V$) se dice par si y sólo si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in R$; é impar si $f(-x)= -f(x)$ para todo $x \in R$. Muestre que el conjunto $P(V)$ de todas las funciones pares es un subespacio vectorial de V. Muestre que el conjunto de todas las funciones impares, $I(V)$, es un subespacio vectorial de V.

c) Sea $f: R \to R$ ($\in V$). Muestre que la función f_P definida por

$$f_P(x) = \frac{1}{2}\,(f(x) + f(-x))$$

para todo $x \in R$ es par. Muestre que la función f_I definida por

$$f_I(x) = \frac{1}{2}\,(f(x) - f(-x))$$

para todo $x \in V$. es impar. Deducir además que $f = f_P + f_I$.

d) Muestre que una función es la vez par e impar si y sólo si ella es la función cero. Deducir entonces de c) que $V = P(V) \oplus I(V)$.

2. Halle todos los $(x,y) \in R^2$ tales que

(D) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

y dibuje en el plano cartesiano la región que representa las soluciones de (D).

3. Sean A y B matrices cuadradas de orden n. Muestre que:

i) $tr(AB) = tr(BA)$;

ii) si B es invertible, entonces $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E.

41. Examen Parcial de Cálculo Avanzado II ((1527). Física

1. Si f es holomorfa en $|z| < 1$ y $|f(z)| \leq 1/(1 - |z|)$, halle la mejor aproximación de $|f^{(n)}(0)|$ que da la desigualdad de Cauchy.

2. Calcule

i) $$\int_{\vec{K}_1(0)} e^z z^{-n} dz \quad (n \text{ entero})$$

ii) $$\int_{\vec{K}_2(0)} z dz/(9 - z^2)(z+i)$$

3. Una función que satisface ($u: A \to R$, $A \subseteq C$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se dice armónica.

i) Muestre que la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa en A son funciones armónicas.

ii) Pruebe que si $u(z)$ es armónica entonces $u(\bar{z})$ es armónica, y recíprocamente.

Departamento de Mat. y Estd. Universidad Nacional de Colombia.

42. Cálculo II (15226). Ingenierías. Economía.

1. Calcule las siguientes integrales

$$I = \int \frac{du}{u^3+u^2+u} \quad , \qquad J = \int \cos(\log x)dx.$$

2. Halle las ecuaciones de las directrices de la hipérbola $2 = xy$.

3. Suponeindo que el índice de utilidad se expresa por $u = e^{xy}$, tómese $p_x = 1$ y $p_y = 5$, $I = 10$. Halle entonces la demanda para los bienes X é Y.

4. Halle el plano tangente y la recta normal a la superficie $z = \log(1/xy)$ en el punto (e,e).

5. Estudie los puntos extremos y los puntos de silla de la función

$$z = (x^2 + y^2)e^{x^2-y^2}.$$

A. RAMIREZ M.
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia, junio de 1968.

43. Fundamentos de Matemática.

1. Calcular

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(1+n)\right]}{\log n^n\left[\log (n+1)^{n+1}\right]}$$

2. Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2^2\frac{2}{2+1}+\cdots+n^2\frac{n}{n+1}}{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}\right)$$

3.a) Enunciar completamente los axiomas de orden para los números reales.

b) Demostrar: $a < b \iff 0 < b - a$.

c) Demostrar: Si $0 < c$ y $a < b \Rightarrow ac < bc$.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia, jnuo de 1968

44. Examen de Cálculo II(15222) Ingenierías.

1.a) Hallar el lugar geométrico de los puntos $P=(x,y)$

tales que la distancia de P al punto vértice de la parábola $x^2 = 8y$ es el doble de la distancia de P al foco de la misma. Identificar el lugar.

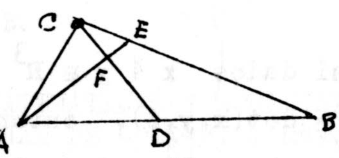
b) Para la hipérbola $3x^2 - y^2 + 12x - 3y = 0$ hallar las coordenadas del centro, de los vértices y los focos; además hallar la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas.

2. El foco de una parábola es el origen de ordenadas y su directriz es la recta $4 = r(\cos(\theta + \pi/3))$. Hallar la ecuación polar de la parábola.

3. Calcule las integrales siguientes

a) $\int (x-x^{2/3})^{-1} dx$, b) $\int x^2 \cos(ax)dx$.

4. En la figura D es el punto medio de AB y además $CE = \frac{1}{3} CB$. Demostrar que F es el punto medio de



CD.

5. Sean $\vec{A}$ y $\vec{C}$ vectores en el espacio con $\vec{A} \neq \vec{0}$ y $\vec{A}.\vec{C} = 0$. Sea d un escalar dado; halle entonces un vector B que satisfaga simultáneamente $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ y $\vec{A}.\vec{B} = d$ ($\vec{B}$ debe expresarse en términos de $\vec{A}$, $\vec{C}$ y d).

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia, junio de 1968.

45. Examen final Algebra V ( ) Matemáticas.

1. Considere a $\mathbf{Q}$ como un $\mathbf{Z}$-módulo . Sea $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ el producto tensorial de $\mathbf{Q}$ por sí mismo. Demuestre que $x \otimes y - y \otimes x$, para $x, y \in \mathbf{Q}$.

2. Considere a $\mathbf{Q}$ como un $\mathbf{Z}$-módulo . Demuestre que $\Lambda^2 \mathbf{Q} = 0$.

3. Sea E un $\mathbb{Z}$-módulo TAL que $\mathbb{Z} \subseteq E \subseteq \mathbb{Q}$. Demuestre que ningún elemento de $\Lambda^2 E$ es libre.

4. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación bilineal $(x,y) \rightsquigarrow (x|y)$ de $E \times E$ en $\mathbb{R}$ se dice un producto escalar si $(x|x) > 0$ para todo $x \in E$, $x \neq 0$.

a) Demuestre que si $e(x,y) = (x|y)$ es un producto escalar en E, dado $x^* \in E^*$ existe uno y sólo un $x \in E$ tal que

$$\langle x^*, y\rangle = (x|y)$$

para todo $y \in E$. (Indicación: Considere la aplicación $\sigma: x \rightsquigarrow e_x$ de E en E^*, e_x definida por $e_x(y) = e(x,y) = (x|y)$; demuestre que σ es un isomorfismo.)

5. Sea E el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ y sea $(x|y) = {}^t x . y$. Demuestre que $(x|y)$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

6. Demuestre que si dados x é $y \in \mathbb{R}^3$ definimos $x \barwedge y$ por $(x \barwedge y)(z) = \det(x,y,z)$, entonces $x \barwedge y$ es una forma lineal sobre $\mathbb{R}^3$. Sea $\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^3)^*$ tal que $\varphi(x,y) = x \barwedge y$. Demuestre que φ es bilineal alternada. Demuestre entonces que existe una aplicación lineal $\overline{\varphi}: \Lambda^2 \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)$ tal que $\overline{\varphi}(x \wedge y) = x \barwedge y$.

J.CHARRIS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y ESTADISTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, diciembre de 1967.

46. <u>Examen de Cálculo Avanzado</u> (   )<u>Matemáticas y Física</u>.

1. Demostrar que existe el límite de la sucesión:

$\sqrt{2}, < \sqrt{(2+\sqrt{2})}, \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}, \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}, \ldots$

Calcular este límite.

2. a) Definir en $\mathbb{R}^2$ los siguientes conceptos: con-

junto abierto, conjunto cerrado, conjunto conexo, dominio, frontera.

b) Sea $f: D \to R$, $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, $p_0 = (x_0, y_0)$ un punto de D. Sea k un elemento de $\mathbb{R}$. ¿Qué significa que $\lim_{p \to p_0} f(p) = k$? ¿Qué significa que f sea continua en p_0?

3. Calcular el siguiente límite explicando cada una de sus afirmaciones:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{p-q} + 2\sqrt{\frac{1}{p^2-q^2}} + \cdots + n\sqrt[n]{\frac{1}{p^n-q^n}}}{1+2+\cdots+n}$$

donde se supone que $p > q > 0$.

4. Si A es un conjunto acotado y $n > 0$, definimos $B = \{nx;\ x \in A\}$ $(A \subset R)$. Demostrar que B es acotado. Calcular sup B.

R. SUAREZ-H. PEREZ
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y ESTADISTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, mayo de 1968