Boletín de Matemáticas

VOLUMEN II Diciembre de 1968 FASCICULO 6

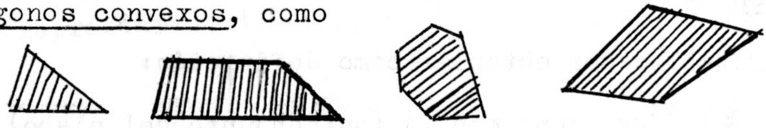
SITUACIONES GEOMETRICAS GENERALIZABLES

por

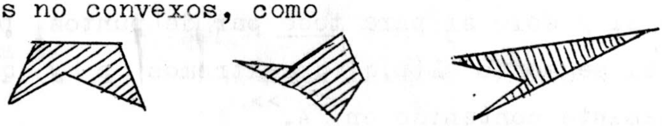
Alonso TAKAHASHI

Los temas que trataremos en este artículo han sido escogidos, y serán desarrollados, con miras a ilustrar el proceso característico de la Matemática, a saber, la generalización. Este proceso tiende a considerar colecciones de objetos cada vez más amplias y requiere la introducción de conceptos mediante definiciones precisas. Estas definiciones tienen comúnmente como base ciertas nociones intuitivas y entonces la labor por desarrollar consiste en describir dicha noción intuitiva en términos aceptables desde el punto de vista matemático; en otras palabras, se trata de expresarlas dentro de un sistema matemático.

Para entrar en materia, consideremos la noción de convexidad. En geometría elemental se distinguen ya los polígonos convexos, como



de los no convexos, como



Más generalmente, llamamos conjuntos convexos en el plano (o espacio bidimensional) a los conjuntos del "tipo" siguiente

(I) 

Mientras que conjuntos como

(II) 

son considerados no convexos.

Las gráficas anteriores ilustran intuitivamente la noción de conjunto convexo. Nos planteamos entonces el primer problema relativo a definiciones: ¿Cómo se define la noción de conjunto convexo? ¿Cuándo decimos que un conjunto del plano es convexo ? ¿Cuál es la propiedad que caracteriza a los conjuntos convexos ? En otros términos, debemos buscar una propiedad C tal que pueda afirmarse «Un conjunto A es convexo si y sólo si A satisface la condición C». Una vez hallada esta condición C , este enunciado pasará a ser la definición de conjunto convexo.

En el presente caso la solución es sencilla; la condición C es la siguiente:

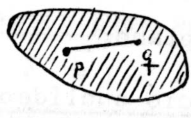
> « Si P y Q son puntos de A entonces el segmento de extremos p y q está completamente contenido en A »

Establecemos entonces como definición:

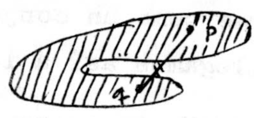
(α) «Un conjunto A (subconjunto del plano) es convexo si y sólo si para todo par de puntos p y q de A el segmento L(p,q) de extremos p y q está completamente contenido en A.»

Esta condición la expresamos escribiendo:

Si $p \in A$ y $q \in A$ entonces $L(p,q) \subset A$.

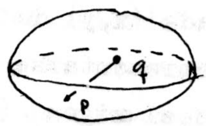


c o n v e x o

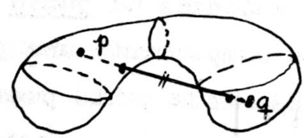


n o c o n v e x o

Una vez definido con precisión el concepto de conjunto convexo para conjuntos que sean subconjuntos del plano, trataremos de generalizarlo considerando subconjuntos del espacio tridimensional. Este paso no presenta aquí ninguna dificultad, pues la misma definición anterior tiene sentido y además está de acuerdo con lo que se espera sea un conjunto convexo en el espacio tridimensional:



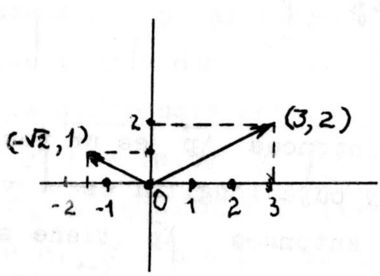
c o n v e x o



n o c o n v e x o

El paso siguiente es **naturalmente** la generalización a más de tres dimensiones, y aquí tropezamos con ciertas dificultades. Por ejemplo: ¿Qué es el espacio de 5 dimensiones? ¿Qué es un segmento en este espacio ? Para contestar adecuadamente estas preguntas, es decir, para encontrar las definiciones convenientes, volvemos a la fuente de estos conceptos, a saber, el plano geométrico. Observamos en primer lugar que mediante el método de las coordenadas, debido a Descartes, cada punto del plano puede representarse por medio de una pareja ordenada de

Figura 1.



números reales (fig.1) De esta manera el plano puede considerarse como un conjunto cuyos elementos son dichas parejas. Llegamos así a la definición del plano:

DEFINICION. El plano cartesiano o espacio euclídeo bidimensional es el conjunto (designado generalmente $\mathbf{R}^2$) cuyos elementos son todas las parejas ordenadas (x,y) de números reales x, y.

Simbólicamente:

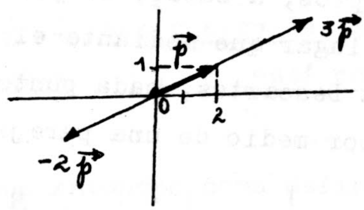
$$\mathbf{R}^2 = \{ (x,y) : x,\ y \text{ son números reales} \} .$$

Es claro que $(x,y) = (x',y')$ si y sólo si $x = x'$ y $y = y'$. Entonces un punto del espacio euclídeo bidimensional es simplemente una pareja ordenada (x,y) de números reales. Este punto puede también representarse mediante una flecha o vector $\vec{p}$ desde el origen $(0,0)$ hasta el punto (x,y):

$$\vec{p} = (x,y) .$$

Así los elementos del plano pueden considerarse como vectores. Como puede verificarse sin dificultad, el producto de un número λ por el vector $\vec{p} = (x,y)$ es el vector

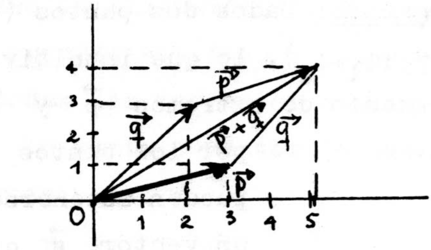
$$\lambda\vec{p} = (\lambda x, \lambda y).$$



Si λ es positivo entonces $\lambda\vec{p}$ es un vector con el mismo sentido de $\vec{p}$ y cuya longitud es λ veces la de $\vec{p}$; si λ es negativo entonces $\lambda\vec{p}$ tiene sentido opuesto al de $\vec{p}$; si $\lambda = 0$ entonces $\lambda\vec{p}$ es el vector cero ú origen: $\vec{0} = (0,0)$.

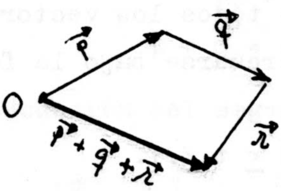
También, si $\vec{p} = (x,y)$ y $\vec{q} = (a,b)$ entonces el <u>vector suma</u> es la diagonal del paralelogramo formado por $\vec{p}$ y $\vec{q}$ y tiene por componentes la suma de las componentes correspondientes de $\vec{p}$ y $\vec{q}$:

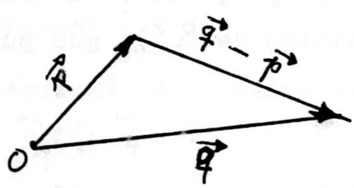
$$\vec{p} + \vec{q} = (x+a, y+b)$$



Conviniendo en que dos flechas representan el mismo vector si tienen la misma longitud, dirección y sentido, puede decirse que se suman vectores colocando unos a continuación de otros; la suma es entonces el vector que va del origen del primero al extremo del último.

Dados dos vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ (representados por flechas que tienen un origen común O) entonces el vector $\vec{r}$



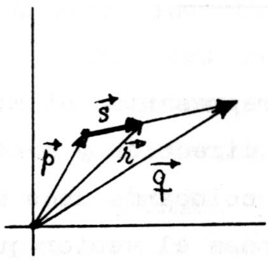


que va del extremo de $\vec{p}$ al extremo de $\vec{q}$ tiene la propiedad de que sumado con $\vec{p}$ da $\vec{q}$: $\vec{p} + \vec{r} = \vec{q}$, es decir, $\vec{r}$ es la <u>diferencia entre</u> $\vec{q}$ y $\vec{p}$: $\vec{r} = \vec{q} - \vec{p}$. Si $\vec{p} = (x,y)$ y $\vec{q} = (a,b)$ y $\vec{r} = (m,n)$, entonces la ecuación $\vec{p} + \vec{r} = \vec{q}$ equivale a $(x+m, y+n) = (a,b)$, es decir, $x + m = a$, $y + n = b$, de donde $m = x - a$, $n = y - b$, es decir,

$$\vec{r} = \vec{q} - \vec{p} = (x-a, y-b)$$

En otras palabras, las componentes de la diferencia son las diferencias de las componentes correspondientes de $\vec{q}$ y $\vec{p}$.

Veamos ahora cómo podemos <u>definir</u> adecuadamente el concepto de <u>segmento</u>: Dados dos puntos (o vectores) $\vec{p} = (p_1, p_2)$ y $\vec{q} = (q_1, q_2)$, lo que intuitivamente consideramos como el segmento de extremos $\vec{p}$ y $\vec{q}$ está formado por los puntos (o vectores) que pueden obtenerse sumando a $\vec{p}$ un vector $\vec{s}$ que tiene la misma dirección y sentido que la diferencia $\vec{q} - \vec{p}$ pero cuya longitud es menor o igual que la de este vector; en otras palabras:



$$\vec{s} = t(\vec{q} - \vec{p}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Así, pues, podemos <u>definir</u> el <u>segmento</u> $L(\vec{p}, \vec{q})$ de extremos $\vec{p}$ y $\vec{q}$ como el conjunto de todos los vectores $\vec{r}$ (elementos de $\mathbf{R}^2$) que pueden expresarse bajo la forma

$$\vec{r} = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Decimos que esta expresión es la <u>ecuación</u> del segmento $L(\vec{p}, \vec{q})$.

De esta manera hemos dado significado preciso a las nociones <u>plano</u> (ó <u>espacio euclídeo bidimensional</u> $\mathbf{R}^2$) <u>punto</u> o <u>vector</u> (elemento de $\mathbf{R}^2$), <u>suma</u> de vectores, <u>producto</u> de un número (o escalar) por un vector y <u>segmento</u> determinado por dos puntos.

Una vez afirmadas estas nociones en su punto de partida, volveremos a avanzar ahora hacia las dimensiones superiores y ver si podemos vencer el obstáculo encontrado antes para superar la dimensión 3.

Notemos antes que las nociones que estamos considerando no ofrecen ninguna dificultad cuando se trata de adaptarlas al caso de dimensión 3. En efecto: El espacio ordinario o <u>espacio euclídeo tridimensional</u> $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todas las ternas ordenadas (x,y,z) de números reales; un punto o vector (elemento de $\mathbb{R}^3$) es una de tales ternas:

$$\vec{p} = (x,y,z) .$$

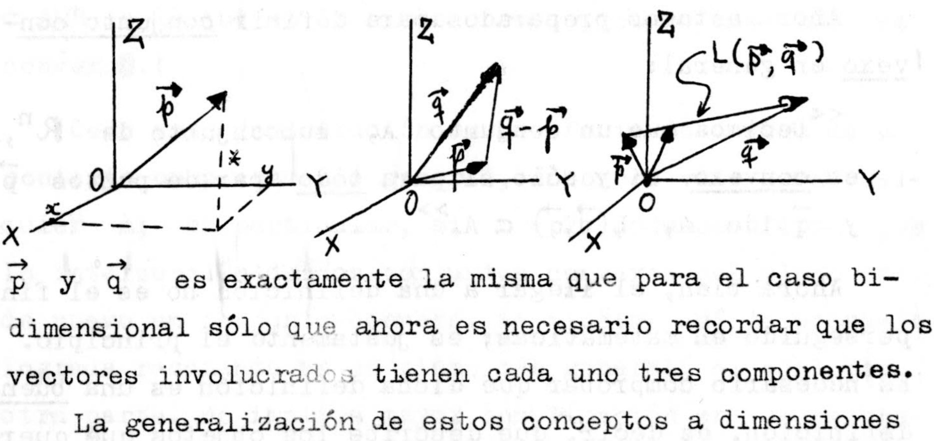
Si además

$$\vec{q} = (a,b,c)$$

entonces $\vec{p} = \vec{q}$ si y sólo si $x = a$, $y = b$ y $z = c$. La suma y el producto por escalar se definen en forma enteramente análoga al caso bidimensional:

$$\vec{p} + \vec{q} = (x+a, y+b, z+c)$$
$$\lambda\vec{p} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$
$$(\vec{p} - \vec{q} = (x-a,\ y-b, z-c)).$$

La ecuación del segmento determinado por dos vectores



$\vec{p}$ y $\vec{q}$ es exactamente la misma que para el caso bidimensional sólo que ahora es necesario recordar que los vectores involucrados tienen cada uno tres componentes.

La generalización de estos conceptos a dimensiones superiores a 3 no ofrece tampoco ninguna dificultad de orden matemático. La única dificultad es de tipo psicológico, pues ya no podemos representar o imaginar un espacio con un número de dimensiones superior a 3. Sin embargo, veamos que desde el punto de vista lógico no hay ninguna objeción: Consideremos un número natural n fijo (si se quiere y para fijar ideas, puede considerarse por ejemplo $n = 5$). Definimos $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de todas las n-plas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales. Una tal n-pla es entonces un punto o vector $\vec{p}$ (elemento de $\mathbb{R}^n$):

$$\vec{p} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Si además

$$\vec{q} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

es otro elemento de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\vec{p} + \vec{q} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

$$\lambda\vec{p} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

$$(\ \vec{p} - \vec{q} = (x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n)\ ).$$

La ecuación del segmento $L(\vec{p},\vec{q})$ de extremos $\vec{p}$ y $\vec{q}$ es de nuevo

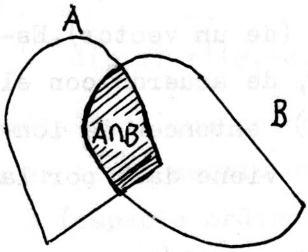
$$\vec{r} = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Ahora estamos preparados para definir conjunto convexo en general:

<<Decimos que un conjunto A, subconjunto de $\mathbb{R}^n$, es convexo si y sólo si para todo par de puntos $\vec{p}$ y $\vec{q}$ de A, $L(\vec{p},\vec{q}) \subset A$.>>

Ahora bien, el llegar a una definición no es el fin perseguido en matemáticas; es justamente el principio. Es necesario comprobar que dicha definición es una buena definición, es decir, que describe los objetos que queremos estudiar y que, por lo tanto, de ella pueden deducirse en forma estrictamente lógica las propiedades que es de esperar posean estos objetos. Demos un ejemplo sencillo de este tipo de derivación de propiedades a partir de la definición, lo cual de paso ilustra la bondad de nuestra definición de conjunto convexo.

Es natural esperar que, si A y B son conjuntos convexos, entonces su intersección $A \cap B$, o sea el conjunto de los puntos comunes a los dos, sea de nuevo un conjunto convexo. Veamos que esto puede demostrarse usando nuestra definición; en efecto: supongamos que $\vec{p} \in A \cap B$ y $\vec{q} \in A \cap B$. Entonces $\vec{p} \in A$ y $\vec{p} \in B$, y también $\vec{q} \in A$ y $\vec{q} \in B$. En particular, $\vec{p} \in A$ y $\vec{q} \in A$, y como A es convexo, entonces $L(\vec{p},\vec{q}) \subset A$. Análogamente, $\vec{p} \in B$ y $\vec{q} \in B$, y como B es convexo, entonces $L(\vec{p},\vec{q}) \subset B$. En consecuencia, $L(\vec{p},\vec{q})$ está contenido en A y también en B, luego está contenido en su intersección; es decir, $L(\vec{p},\vec{q}) \subset A \cap B$. Hemos probado entonces que, si $\vec{p} \in A \cap B$ y $\vec{q} \in A \cap B$, entonces $L(\vec{p},\vec{q}) \subset A \cap B$, o lo que es lo mismo, hemos probado que $A \cap B$ es convexo∎.

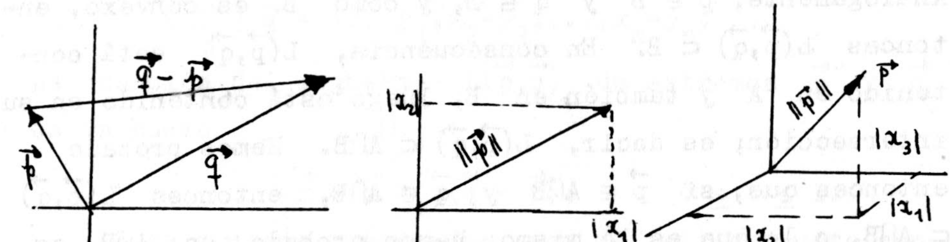


Como esta demsotración se ha efectuado dentro de un contexto completamente general, entonces vale para cualquier n; en particular, si $n = 2$ podemos afirmar que la intersección de dos conjuntos convexos del plano es de nuevo un conjunto convexo. Se ilustra así la economía lograda razonando en un plano más general, el cual, por otra parte, no implica mayor complicación en los razonamientos.

Como segundo ejemplo de noción geométrica susceptible de generalización, consideremos la noción de <u>distancia</u> (entre dos puntos). Como en el caso anterior, partiremos de una situación más familiar e intuitiva: el plano geométrico. En este caso, la distancia entre $\vec{p}$ y $\vec{q}$ es precisamente la <u>longitud</u> del vector diferencia $\vec{q} - \vec{p}$; luego, si queremos definir la noción de distancia basta precisar la noción de <u>longitud</u> (de un vector). Esto no ofrece ninguna dificultad pues, de acuerdo con el teorema de PITÁGORAS, si $\vec{p} = (x_1, x_2)$ entonces la longitud de $\vec{p}$ (que indicaremos $\|\vec{p}\|$) viene dada por la fórmula

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} \quad (= (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}).$$

Análogamente, si $\vec{p} = (x_1, x_2, x_3)$ es un elemento de $\mathbb{R}^3$,



entonces

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$
$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}.$$

En consecuencia, **para** $\vec{p} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (elemento de $\mathbb{R}^n$) <u>definimos</u>

$$\|\vec{p}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

Así, por ejemplo, $\vec{p} = (1, -1, 1/2, 2)$ es un elemento de $\mathbb{R}^4$

y $\|\vec{p}\| = \sqrt{(6,25)}$.

Definimos la distancia entre $\vec{p}$ y $\vec{q}$ (de acuerdo con la observación hecha anteriormente) por medio de la fórmula

$$d(\vec{p},\vec{q}) = \|\vec{q} - \vec{p}\| .$$

En particular,

$$d(\vec{p},\vec{0}) = \|\vec{p}\| .$$

Si $\vec{p} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ y $\vec{q} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$, entonces

$$d(p,q) = \left[(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 +\ldots+ (y_n-x_n)^2\right]^{1/2}$$

fórmula ésta que coincide con las fórmulas bien conocidas en la geometría usual, para el caso $n = 2$ (plano) y $n = 3$ (espacio ordinario).

Para reforzar la conveniencia de la anterior <u>definición</u> de <u>distancia entre dos elementos de</u> $\mathbb{R}^n$, puede verificarse que usando dicha definición pueden demostrarse las siguientes propiedades, que <u>naturalmente</u> deben exigirse a cualquier cosa que aspire a representar una <u>distancia</u>:

(D1) $d(\vec{p},\vec{q}) \geq 0$ <u>y</u> $d(\vec{p},\vec{q}) = 0$ <u>si y sólo si</u> $\vec{p} = \vec{q}$

(D2) $d(\vec{p},\vec{q}) = d(\vec{q},\vec{p})$

(D3) $d(\vec{p},\vec{q}) + d(\vec{q},\vec{r}) \geq d(\vec{p},\vec{r})$

La última condición, (D3), recibe, por razones obvias, el nombre de <u>desigualdad del triángulo</u>.

<u>Demostración de</u> (D1),(D2) <u>y</u> (D3): Sean $\vec{p} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\vec{q} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ y $\vec{r} = (z_1,z_2,\ldots,z_n)$. Por definición, $d(\vec{p},\vec{q}) \geq 0$. Supongamos ahora que $d(\vec{p},\vec{q}) = 0$: entonces

$$0 = \sqrt{[(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 +\ldots+ (y_n-x_n)^2]} ;$$

luego

$$0 = (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + \ldots + (y_n-x_n)^2$$

de donde

$$(y_1-x_1)^2 = 0 \ , \ (y_2-x_2)^2 = 0, \ \ldots, \ (y_n - x_n)^2 = 0$$

y

$$x_1 = y_1, \ x_2 = y_2 \ , \ \ldots, \ x_n = y_n \ .$$

Es decir, $\vec{p} = \vec{q}$. Por otra parte, si $\vec{p} = \vec{q}$ es claro que $d(\vec{p},\vec{q}) = 0$, en virtud de la definición de $d(\vec{p},\vec{q})$.

Mostremos (D2): en efecto:

$$d(\vec{p},\vec{q}) = \sqrt{\left[(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + \ldots + (y_n-x_n)^2\right]}$$
$$= \sqrt{\left[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2\right]}$$
$$= d(\vec{q},\vec{p}).$$

La desigualdad (D3) la podemos derivar de las desigualdad

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \qquad (1)$$

si ponemos $\vec{a} = (y_1-x_1, y_2-x_2, \ldots, y_n-x_n)$ y $\vec{b} = (z_1-y_1, z_2-y_2, \ldots, z_n-y_n)$. Pasamos pues a demostrar la desigualdad (1), la cual necesitaremos más adelante. Comenzamos por demostrar la conocida desigualdade de CAUCHY-SCHWARZ:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leq \left[\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}\right]\left[\sqrt{(y_1^2 + \ldots + y_n^2)}\right]$$

en donde $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ son números reales cualesquiera. Observemos primero que si a y b dos números reales ≥ 0 cualesquiera , entonces

$$0 \leq (a - b)^2$$

de donde

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$2\sqrt{a}.\sqrt{b} \leq a + b$$

y finalmente

$$\sqrt{a}.\sqrt{b} \leq (a+b)/2 \; . \qquad (3)$$

Si $x = 0$ ó $y = 0$, la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ es inmediata. Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, podemos poner

$$a_i = \frac{x_i^2}{x_i^2 + \ldots + x_n^2}$$

y

$$b_i = \frac{y_i^2}{y_i^2 + \ldots + y_n^2}$$

y usando la desigualdad (3) tenemos:

$$\left[\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}}\right] \times \left[\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + \ldots y_n^2}}\right] \leq \frac{\dfrac{x_i^2}{x_1^2 + \ldots + x_n^2} + \dfrac{y_i^2}{y_1^2 + \ldots + y_n^2}}{2}$$

para cada i ($i = 1,\ldots,n$). Sumando las n desigualdades anteriores tenemos

$$\frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\ \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}} \leq \frac{1 + 1}{2} = 1$$

de donde (2).

Consideremos ahora la siguiente cadena de relaciones en la cual usamos la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ:

$$(x_1+y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2 = (x_1+y_1)(x_1+y_1) + \ldots + (x_n+y_n)(x_n+y_n) =$$

$$= (x_1+y_1)x_1 + \ldots + (x_n + y_n)x_n +$$

$$+(x_1+y_1)y_1 + \dots + (x_n+y_n)y_n$$

$$\leq \sqrt{(x_1+y_1)^2+\dots+(x_n+y_n)^2}\cdot\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$+ \sqrt{(x_1+y_1)^2+\dots+(x_n+y_n)^2}\,\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}$$

$$= \sqrt{(x_1+y_1)^2+\dots+(x_n+y_n)^2}\,(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}).$$

Resumiendo

$$(x_1+y_1)^2+\dots+(x_n+y_n)^2 \leq \sqrt{(x_1+y_1)^2 + \dots + (x_n+y_n)^2}\,\cdot$$

$$(\sqrt{x_1^2 +\dots+ x_n^2} + \sqrt{y_1^2 +\dots+ y_n^2})$$

Si ahora escribimos $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$, $\vec{y} = (y_1,\dots,y_n)$, podemos escribir la anterior desigualdad bajo la forma

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x} + \vec{y}\|(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|).$$

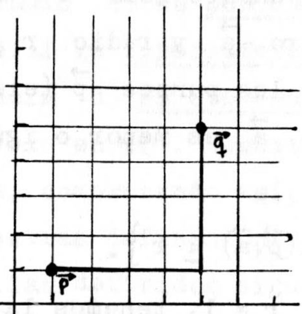
Si $\|\vec{x} + \vec{y}\| \neq 0$, entonces

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|. \qquad (1)$$

Si $\|\vec{x} + \vec{y}\| = 0$ la desigualdad (1) es trivial.∎

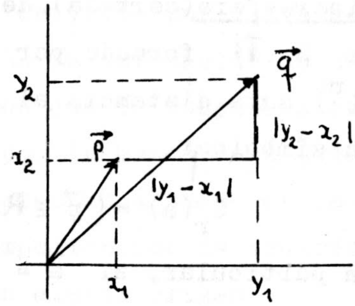
Mencionemos que aunque la definición anterior del concepto de distancia parece las más natural y es la más adecuada a nuestra concepción tradicional del espacio, no es sin embargo la única posible y tampoco es la más natural en todas las situaciones. En efecto, si suponemos que $\vec{p} = (x_1,x_2)$ y $\vec{q} = (y_1,y_2)$ designan esquinas de una ciudad, entonces la distancia entre ellas, es decir, la(menor)distancia entre $\vec{p}$ y $\vec{q}$ para un habitante de la ciudad (humano y sin helicóptero) es

$$d'(\vec{p},\vec{q}) = |y_1-x_1| + |y_2-x_2|$$



$d'(\vec{p},\vec{q}) = 8$

$(d(\vec{p},\vec{q}) = 4.\sqrt{2})$



$d'(\vec{p},\vec{q}) = |y_1-x_1| + |y_2-x_2|$

Generalizando esta noción de distancia tendríamos que definir, para $\vec{p} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\vec{q} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ (elementos de $\mathbb{R}^n$):

$$d'(\vec{p},\vec{q}) = |y_1-x_1| + |y_2-x_2| + \ldots + |y_n-x_n| .$$

(Obsérvese que si definimos $\|\vec{p}\|' = |x_1| + |x_2| +\ldots+ |x_n|$ entonces también

$$d'(\vec{p},\vec{q}) = \|\vec{q} - \vec{p}\|' .)$$

Puede demostrarse que con esta definición también se cumplen las propiedades (D1),(D2) y (D3). Ahora bien, como de estas propiedades pueden derivarse todos los hechos esenciales que pueden esperarse de una adecuada noción de distancia entre dos puntos, resulta que puede adoptarse cualquiera de las dos definiciones, estando determinada la elección por razones de conveniencia en estudios particulares.

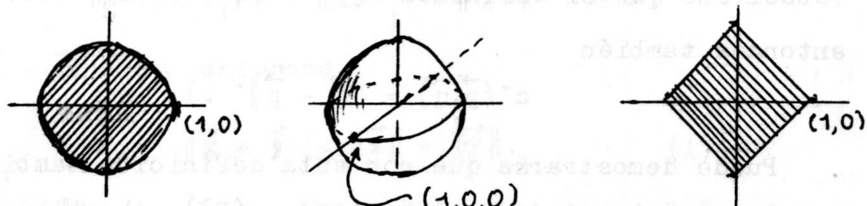
Hemos mostrado entonces que la noción de distancia puede también generalizarse a $\mathbb{R}^n$ (y por lo menos en dos formas diferentes). Con ayuda de la noción de distancia podemos definir otros conceptos geométricos, por ejemplo el de esfera (que en este contexto llamaremos hiperesfera, para acentuar su caracter general): Dado un punto $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, llamamos hiperesfera (cerrada) de centro $\vec{a}$ y radio r al conjunto $S_r(\vec{a})$ formado por todos los puntos $\vec{p}$ (elementos de $\mathbb{R}^n$) cuya distancia al punto $\vec{a}$ es menor o igual que r. En símbolos:

$$S_r(\vec{a}) = \left\{ \vec{p} \in \mathbb{R}^n \;:\; d(\vec{p},\vec{a}) \leq r \right\}.$$

En particular, si $\vec{a} = \vec{0}$ y $r = 1$, tenemos la hiperesfera de centro en el origen y radio 1, la cual designamos simplemente S:

$$S = \left\{ \vec{p} \in \mathbb{R}^n \;:\; \|\vec{p}\| \leq 1 \right\}.$$

Cuando $n = 2$, S es el círculo o disco de centro en el origen y radio 1; cuando $n = 3$, S es la esfera ordinaria de centro en el origen y radio 1.



Si en lugar de la distancia d consideramos la distancia d' en $\mathbb{R}^2$ entonces la hiperesfera

$$S = \left\{ \vec{p} \in \mathbb{R}^2 \;:\; d'(\vec{p},\vec{0}) \leq 1 \right\}$$

es un cuadrado (?).

Hemos mostrado entonces que las nociones intuitivas (y familiares) de conjunto convexo y esfera (definida por medio de un concepto generalizado de distancia) pueden generalizarse a $\mathbb{R}^n$. Veamos ahora cómo interactúan esas

En el plano ordinario la hiperesfera S (que en este caso es sencillamente el círculo o disco de centro en el origen y radio 1) es convexa. Nos preguntamos entonces si en general la hiperesfera S (definida por medio de una distancia d) es convexa, según la definición de conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$. Demostraremos que la respuesta es afirmativa, comprobando así, que por lo menos en algunos casos, nuestras definiciones son adecuadas pues los entes por ellas definidos siguen comportándose de acuerdo con los modelos intuitivos que les dieron origen.

Ya sabemos que para todo $\vec{p}$ y $\vec{q}$ de $\mathbb{R}^n$

$$\|\vec{p}+\vec{q}\| \leq \|\vec{p}\| + \|\vec{q}\| ,$$

Demostraremos ahora que la hiperesfera S en $\mathbb{R}^n$ es convexa: Sean $\vec{p}$, $\vec{q}$ dos elementos cualesquiera de S, es decir, tales que

$$\|\vec{p}\| \leq 1 , \quad \|\vec{q}\| \leq 1 \quad .$$

Tenemos que demostrar que el segmento $L(\vec{p},\vec{q})$ está enteramente contenido en S, es decir, que todo elemento de $L(\vec{p},\vec{q})$ es también elemento de S. Para esto tomaremos un elemento cualquiera de $L(\vec{p},\vec{q})$ y demostraremos que también pertenece a S.

Sea entonces $\vec{r}$ un elemento de $L(\vec{p},\vec{q})$, es decir,

$$\vec{r} = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}), \quad 0 \leq t \leq 1;$$

entonces

$$\vec{r} = (1-t)\vec{p} + t\vec{q} ,$$

luego

$$\|\vec{r}\| \leq \|(1-t)\vec{p} + t\vec{q}\| \leq \|(1-t)\vec{p}\| + \|t\vec{q}\|$$

$$= (1-t)\|\vec{p}\| + t\|\vec{q}\| \leq (1-t).1 + t.1 = 1,$$

es decir, $\|\vec{r}\| \leq 1$, o lo que es lo mismo, $\vec{r} \in S$, como queríamos demostrar. ∎

Por último consideremos la noción de ortogonalidad (o perpendicularidad). Retornando al plano geométrico, recordemos que el producto interno (o producto escalar) de dos vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ se define por la ecuación

$$\vec{p} \bullet \vec{q} = \|\vec{p}\|\|\vec{q}\| \cos \theta$$

donde θ = ángulo entre $\vec{p}$ y $\vec{q}$. Entonces

$$\vec{p} \perp \vec{q} \text{ si y sólo si } \vec{p} \bullet \vec{q} = 0.$$

Ahora bien, fácilmente se demuestra que, si $\vec{p} = (x_1, x_2)$ y $\vec{q} = (y_1, y_2)$, entonces

$$\vec{p} \bullet \vec{q} = x_1 y_1 + x_2 y_2 \,.$$

Esta relación puede usarse para dar una definición de producto interno en $\mathbb{R}^n$: Si $\vec{p} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\vec{q} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$, entonces se define:

$$p \bullet q = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \,.$$

De esta definición se concluyen fácilmente las siguientes propiedades:

$$\vec{p} \bullet \vec{q} = \vec{q} \bullet \vec{p}$$

$$\vec{p} \bullet (\vec{q} + \vec{r}) = \vec{p} \bullet \vec{q} + \vec{p} \bullet \vec{r} \,; \qquad (\vec{p} + \vec{q}) \bullet \vec{r} = \vec{p} \bullet \vec{r} + \vec{q} \bullet \vec{r}$$

$$\lambda(\vec{p} \bullet \vec{q}) = (\lambda \vec{p}) \bullet \vec{q} = \vec{p} \bullet (\lambda \vec{q}) \quad (\lambda \text{ escalar})$$

Además

$$\|\vec{p}\| = (\vec{p} \bullet \vec{p})^{1/2}$$

(siendo $\|\vec{p}\|$ la longitud antes definida).

Podemos ahora enunciar la definición de ortogonalidad: Decimos que dos vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ (elementos de $\mathbb{R}^n$) son ortogonales si y sólo si

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 0 .$$

Como en los casos anteriores, daremos un ejemplo para ilustrar el buen comportamiento de esta noción al permitir demostrar hechos que son generalizaciones directas de situaciones geométricas ordinarias:

Intuitivamente es claro que si un vector es perpendicular a otros dos entonces también es perpendicular a su suma; es decir, si $\vec{r} \perp \vec{p}$ y $\vec{r} \perp \vec{q}$ entonces $\vec{r} \perp (\vec{p}+\vec{q})$.

Veamos ahora que este hecho puede demostrarse en $\mathbb{R}^n$ usando la noción generalizada de ortogonalidad (introducida con ayuda del producto interno): Supongamos que $\vec{r} \perp \vec{p}$ y que $\vec{r} \perp \vec{q}$, es decir, que $\vec{r} \cdot \vec{p} = 0$ y $\vec{r} \cdot \vec{q} = 0$. Entonces:

$$\vec{r} \cdot (\vec{p}+\vec{q}) = \vec{r} \cdot \vec{p} + \vec{r} \cdot \vec{q} = 0 + 0 = 0,$$

es decir, $\vec{r} \cdot (\vec{p} + \vec{q}) = 0$, lo cual significa que $\vec{r} \perp (\vec{p}+\vec{q})$ como queríamos mostrar.∎

Los métodos vectoriales basados en definiciones adecuadas de operaciones entre vectores, ortogonalidad, etc., pueden también usarse para hacer más directas muchas demostraciones clásicas de la geometría. Como ejemplo de esto demostraremos la siguiente afirmación: Las diagonales de un cuadrilátero equilátero son perpendiculares.

Demostración: Sea ABCD un cuadrilátero equilátero. Definamos los vectores siguientes:

$$\vec{p} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{q} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{r} = \overrightarrow{CD}, \quad \vec{s} = \overrightarrow{AD}.$$

Entonces $\vec{s} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$.

Por hipótesis:

$$\|\vec{p}\| = \|\vec{q}\| = \|\vec{r}\| = \|\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}\|$$

o lo que es lo mismo:

$$\|\vec{p}\|^2 = \|\vec{q}\|^2 = \|\vec{r}\|^2 = \|\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}\|^2 ,$$

es decir:

$$\vec{p}\bullet\vec{p} = \vec{q}\bullet\vec{q} = \vec{r}\bullet\vec{r} = (\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})\bullet(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})$$

pero

$$(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})\bullet(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}) = \vec{p}\bullet\vec{p} + \vec{q}\bullet\vec{q} + \vec{r}\bullet\vec{r} + 2(\vec{p}\bullet\vec{q} + \vec{q}\bullet\vec{r} + \vec{p}\bullet\vec{r})$$

Luego:

$$\vec{q}\bullet\vec{q} + \vec{p}\bullet\vec{q} + \vec{p}\bullet\vec{r} + \vec{q}\bullet\vec{r} = 0 ,$$

es decir,

$$(\vec{q} + \vec{p})\bullet\vec{q} + (\vec{q} + \vec{p})\bullet\vec{r} = 0$$

o también

$$(\vec{q} + \vec{p})\bullet(\vec{q} + \vec{r}) = 0;$$

o lo que es los mismo

$$(\vec{p} + \vec{q})\bullet(\vec{q} + \vec{r}) = 0,$$

es decir

$$(\vec{p} + \vec{q}) \perp (\vec{q} + \vec{r}),$$

o también

$$\overline{AC} \perp \overline{BD} . \blacksquare$$

Debido a lo escaso del espacio hemos tenido que limitarnos aquí a los casos más sencillos de situaciones geométricas que pueden genralizarse, dejando de lado otros quizás más interesantes y no mencionando siquiera las generalizaciones a conjuntos con estructuras más general que la de $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, confiamos en haber podido ilustrar el hecho que sin contar con un bagaje excesivamente especializado, es posible introducir nociones interesantes en sí mismas y de gran importancia dentro de la matemática en todos sus niveles. Mencionaremos por ejemplo la importancia del concepto de conjunto convexo en la programación lineal (rama de la matemática aplicada) y la importancia de la estructuta métrica y de espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ en toda la matemática.

El buen uso de estas nociones en niveles medios exige naturalmente que el profesor conozca mucho más de lo que efectivamente debe ensenar. Sólo así puede orientar la ensenanza hacia los temas verdaderamente importantes, aprovechando las situaciones más convenientes para introduçir e ilustrar nociones que más adelante serán de capital importancia.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia

(Recibido en octubre de 1968)