CONJUNTOS Y FUNCIONES

por

Henri YERLY

Este trabajo muy sencillo, tendrá tres partes: 1) Conjuntos, 2) Funciones, 3) Estructuras.

1) CONJUNTOS

Al abrir un texto de Cálculo o de Análisis (Apostol ó Rudin), uno de Algebra(Hertein), uno de Topología (Simonns), se encuentra generalmente un capítulo inicial en el cual se trata de funciones y conjuntos. La Matemática entera se basa sobre esas nociones. Godement, uno de los matemáticos franceses del grupo N. Bourbaki, al principio de su álgebra, al hablar de las nociones de conjunto y función, dice que sin ellas no se puede hacer nada en Matemáticas, y con ellas, al contrario, se puede hacer todo.

Tomo la palabra conjunto con su sentido común de colección de objetos concretos ó abstractos, llamados elementos o puntos del conjunto. Como ejemplos se pueden dar:

Una clase: conjunto de alumnos que estudian juntos una materia, bajo la dirección de un profesor.

Un ramo: conjunto de flores unidas por una cinta.

El conjunto de los puntos de una recta.

El conjunto $\mathbb{N}$ de los enteros positivos.

Los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ de los números enteros, racionales, reales, complejos, respectivamente.

Para que un conjunto E esté determinado, hay que saber exactamente cuál es su composición. Dado un objeto a, debe haber una respuesta única, sí ó no, a la pregunta: ¿ Es a un elemento de E ? No es un conjunto bien definido el de las montañas más altas de Colombia, o de sus ríos más hermosos.

La notación: $a \in E$ indica que a es elemento de E; $b \notin E$ dice que b no lo es. Así: $2 \in \mathbb{N}$, $\pi \notin Z$.

$E = F$, igualdad entre conjuntos, significa que E y F constan exactamente de los mismos elementos.

Es una particularidad de la Matemática moderna fijar su atención en conjuntos más que en individuos, estudiar globalmente los entes que tienen propiedades comunes. No es motivo de orgullo de los matemáticos no sólo haber tartado tanto en adoptar y analizar la idea de conjunto, vieja como el mundo, sino en haberse opuesto a su admisión, muchos de ellos, cuando Cantor la solicitó hace apenas un siglo.

Dos notaciones se usan para conjuntos:

a) Se enumeran los elementos del conjunto:

$$E = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

b) Se da la propiedad común a todos ellos:

$$E = \{x \in Z ; |x| < 4\}.$$

En la notación a), el anterior conjunto se escribiría: $E = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

Partes de un conjunto. Si A está formado por elementos de E, se dice de A que es parte ó subconjunto de E, cosa que se nota: $A \subset E$. Tal relación se llama relación de inclusión y se lee: A está contenido o incluído en E. Ejemplo: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Entre las partes de E figurán E mismo, el conjunto vacío $\emptyset$ y los conjuntos $\{a\}$ que contienen un solo elemento. Ejemplo: $E = \{a, b, c\}$ tiene la siguiente lista de subconjuntos: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, E. Observen que en este ejemplo E tiene 3 elementos, y que hay $8 = 2^3$ partes diferentes de E. Esto no es azar: siempre que E tenga n elementos, habrá 2^n subconjuntos distintos de E (contando $\emptyset$ y E, naturalemnte).

$P(E)$ designa el conjunto de partes de E; es por lo tanto un conjunto cuyos elementos son conjuntos. Nada impide continuar en esta dirección y considerar $P(P(E))$, ...

<u>Complementación</u>. Si $A \subset E$, el conjunto de los elementos de E que <u>no</u> son elementos de A se llama el complementario de A respecto de E y se escribe $\complement_E A$ (ó simplemente, $\complement A$ si no hay confusión posible). Fácilmente se ve que:

$$\complement(\complement A) = A, \quad \complement\emptyset = E, \quad \complement E = \emptyset, \text{ y que } A \subset B \Rightarrow \complement B \subset \complement A.$$

<u>Reunión e intersección</u>. Si $A \subset E$, $B \subset E$, la reunión de A y B, notada $A \cup B$, es el conjunto de los elementos de E que están en A, en B, ó en ambos:

$$A \cup B = \{x \in E \,;\, x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

Se ve que la reunión es una operación que se efectúa entre subconjuntos de E, es decir, dentro de $P(E)$. Lleva cierta analogía con la adición, pero también diferencias notables, como el hecho de que $A \cup A = A$ es siempre correcto, mientras que $a+a = a$ es falso, salvo para $a = 0$.

De una manera más general, podemos formar la reunión de una colección arbitraria de partes de E. Por definición, comprende todos aquellos elementos de E que figuran en <u>una</u> de las partes de E consideradas, <u>por lo menos</u>.

Una noción análoga a la anterior es la de <u>intersección</u> de conjuntos, pero en la intersección sólo admitimos los elementos que pertenecen a todos los subconjuntos de E de la colección. Así:

$$A \cap B = \{x \in E \,;\, x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

En ciertos aspectos la intersección se parece a una multiplicación, y se nota como tal en algunos libros «viejos» sobre teoría de conjuntos.

<u>Producto cartesiano</u>. Dados dos conjuntos E, F, se llama <u>producto cartesiano</u> $E \times F$ el conjunto de <u>parejas ordenadas</u> (x,y) formadas por un elemento $x \in E$ y un elemento $y \in F$. La pareja es ordenada en el sentido que el

orden importa; si $x \neq y$, la pareja ordenada (x,y) es distinta de la pareja (y,x). La igualdad $(x,y) = (a,b)$ equivale a: $x = a$, $y = b$. Nada impide que $F = E$; tendremos entonces parejas (x,y) de elementos de un mismo conjunto E. Se puede generalizar al caso $3, 4, \ldots, n$ ó una colección cualquiera de conjuntos distintos o no. Casos importantes son los de $\mathbb{R}^3$ que consta de todas las ternas (x,y,z) de números reales, ó de $\mathbb{R}^n$ con todas las n-uplas $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de números reales.

2) FUNCIONES

Definición de función. Paso ahora a la segunda noción fundamental, la de una aplicación ó función de un conjunto E en un conjunto F, que seguramente el lector ya conoce. Como definición provisional de función, podemos decir: Sean dos conjuntos E, F; toda ley f que hace corresponder (ó asocia) a cada elemento x de E exactamente un elemento $f(x)$ de F se llama una función. Se dice también que f está definida sobre E y que toma sus valores en F. E se llama el dominio de f (también conjunto de partida, conjunto inicial) y F se llama codominio (conjunto de llegada, conjunto final). Se usa la notación $f:E \to F$, ó $E \xrightarrow{f} F$ para designar la función f.

En los tiempos de Euler, hace dos siglos, no se consideraban más que conjuntos de números y además se exigía que la correspondencia entre E y F fuera dada por una expresión matemática (finita o en forma de serie) que ligara $x \in E$ con $f(x) \in F$. Hoy en día, E y F pueden ser conjuntos de elementos de cualquier naturaleza y la correspondencia de un tipo absolutamente arbitrario. Debe haber, eso sí, la seguridad de la existencia y la unicidad del elemento asociado.

Dos observaciones se pueden hacer aquí. La primera es que rechazamos las tales funciones multivalentes de antaño, en que a una $x \in E$ podían corresponder varios elementos de F. Esto define una relación, no una función. La segunda es que hay que distinguir bien la función f de la imagen $f(x)$, el elemento de F que la función asocia al elemento $x \in E$. No es estrictamente correcto hablar de la función $\sqrt{x}$; se debe decir la función definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Sin embargo, abusos de lenguaje se toleran a menudo.

Como estamos en presencia de <u>tres</u> cosntituyentes, la igualdad de dos funciones $f_1: E_1 \to F_1$, $f_2: E_2 \to F_2$, requiere naturalmente las tres condiciones: $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ y $f(x) = g(x)$ para todo x del dominio.

En la definición de función, la parte más delicada es la expresión << ley que asocia>>, por lo cual se trata de cambiarla por algo mejor. Si con $x \in E$ é $y = f(x) \in F$, formamos una pareja (x,y), obtenemos un elemento del producto cartesiano $E \times F$ de los dos conjuntos E, F; se puede hacer lo mismo con cada $x \in E$. El hecho que a cada $x \in E$ corresponde por f exactamente un punto $y \in F$ se traduce por el hecho equivalente que habrá una sola pareja (x,y), en el conjunto de las (x,y) así definidas, con primera componente x. La función aparece entonces como un subconjunto de parejas (x,y), conjunto en el cual no pueden figurar (x,y_1), (x,y_2) dos parejas con el mismo primer elemento y el segundo elemento distinto. Se llega así a la definición equivalente: Una función $f: E \to F$ es un subconjunto del producto cartesiano $E \times F$ tal que contiene una pareja (x,y) de primer elemento x, para todo $x \in E$, y solamente una. Se cambió <<ley que asocia>> por subconjunto, noción mucho más sencilla.

Una función puede tener o no tear ciertas cualidades interesantes. Es claro que, en la definición de función, nada impide que a elementos distintos de su dominio E corresponda un mismo punto de E. El caso extremo es el de una función constante: a todo $x \in E$ se asocia un mismo punto de F. Si dos puntos distintos de E tienen imágenes diferentes en F, se dice que la función es <u>inyectiva</u>, ó que es una <u>inyección</u>. La función definida sobre $\mathbb{R}$ por $f(x) = 2x + 1$, es inyectiva, mientras que la función definida por $g(x) = x^2$, sobre $\mathbb{R}$ también, no es inyectiva, puesto que $g(-2) = g(+2) = 4$.

Se llama rango de una función el conjunto de imágenes (ó valores) por f de los elementos de E. Es claro que el codominio F puede contener otros elementos que los del rango. Se dice una función superyectiva (una superyección) cuando todo elemento de F es imagen de algún $x \in E$. En este caso el rango es igual al codominio y se dice que f aplica E sobre F. De las funciones citadas arriba, la primera, dada por $f(x) = 2x + 1$, es superyectiva, mientras que la segunda, dada por $g(x) = x^2$, no lo es, puesto que no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -1 \in \mathbb{R}$, por ejemplo.

Se llama biyección (ó aplicación biyectiva) una función que es a la vez inyectiva y superyectiva. Es el únido tipo de función invertible, es decir, que permite definir una función inversa f^{-1} que aplica F sobre E, y cuya definición es inmediata.

Como otro ejemplo de función, indicaré solamente el siguiente: Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los naturales, E un conjunto cualquiera. A cada natural $n \in \mathbb{N}$ se hace corresponder un elemento $x_n \in E$. Si la función es f, tenemos por lo tanto $x_n = f(n)$. Una tal función se llama una sucesión (de elementos de E).

3) ESTRUCTURAS

Tal como se ha presentado hasta ahora, un conjunto E aparece como una cosa amorfa, sin que haya entre los elementos vínculo de ninguna especie, como un país con habitantes, pero sin constitución ni leyes. Por lo general, un conjunto tiene una organización de alguna especie; se dice que está dotado de una estructura.

Orden. Una de las posibles estructuras es el orden. Hay orden en un conjunto E si de dos elementos x, y se puede decir, en algunos casos por lo menos, que x precede, ó que es menor o igual a y. Como lo saben ustedes, hay orden en el conjunto $\mathbb{R}$ de los reales, y también en el conjunto de puntos de una recta orientada (eje) E. Ese orden es total: dos elementos son siempre comparables. Para que una relación entre elementos de un conjunto merezca el nombre de <u>orden</u>, se exigen ciertas propiedades que son:

a) ser reflexiva: $a \leq a$, para todo $a \in E$.

b) ser antisimétrica: $a \leq b$, y, $b \leq a \Rightarrow a = b$.

c) ser transitiva: $a \leq b$, y, $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Estas condiciones son las que se cumplen en los casos concretos en los cuales se puede decir que hay orden, jerarquía, precedencia, etc..

Sean E y F dos conjuntos ordenados y $f: E \to F$. Entre la multitud de funciones f posibles, las hay que, en cierto modo, respetan el orden de los conjuntos. De manera precisa, si tomamos x, y en E, es una situación favorable si las imágenes $f(x)$, $f(y)$ en F se presentan en el mismo orden, en F, que los objetos de E. En otras palabras, deseamos que

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y), \quad \text{para todo } x, y;$$

cuando esta condición se cumple, f se llama <u>creciente</u>.

<u>Estructura algebraica</u>. Hay álgebra donde se pueden hacer operaciones. Veamos más de cerca qué es una operación binaria, como una adición o uma multiplicación. Cuando se escribe $3 + 5 = 8$, se parte de una pareja $(3,5)$ de números y se le hace corresponder un <u>número</u>, 8 . La pareja es un elemento del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^2$, y el resultado, o sea la suma, es elemento de $\mathbb{R}$. De donde la definición:

Una <u>ley de composición interna sobre</u> E es una aplicación $f: E \times E \to E$. A toda pareja (x,y), f asocia un elemento de E, llamado el <u>compuesto de</u> x <u>e</u> y. El compuesto se llama <u>suma</u> se la operación es una adición, <u>producto</u> si se trata de una multiplicación, etc..

La adición goza de ciertas propiedades: es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro, y cada elemento tiene su opuesto. O sea que, para todo x, y, z, de E:

(A_1) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(A_2) $x + y = y + x$.

(A_3) Existe un elemento, designado por 0, tal que $x + 0 = x$.

(A_4) A cada $x \in E$ corresponde un elemento x' tal que $x + x' = 0$.

Todo conjunto E dotado de una ley de composición interna que satisface esos axiomas se llama un grupo abeliano.

Pueden existir también leyes de composición externas en que interviene, al lado de E, un conjunto auxiliar A. A cada pareja (a,x) de $A \times E$ se asocia un elemento ax de E. Un ejemplo lo proporciona la multiplicación de un vector $\vec{V}$ por un número real λ , operación que da un vector $\lambda\vec{V}$; otro ejemplo es el producto de un polinomio por un número. La definición general es como sigue:

Dados el conjunto E y un conjunto auxiliar A, una ley de composición externa es una aplicación del producto cartesiano $A \times E$ en E. Muchas veces se da entonces el nombre de vector a un elemento de E y el de escalares a los de A. El primer ejemplo que hemos dado da la razón de esas denominaciones.

Una estructura algebraica sobre E está dada por una o varias leyes de composición interna o externa, y por axiomas que se suponen válidos. Como se ve, los axiomas han dejado de ser <<proposiciones tan evidentes que no necesitan demostración>>, sino un simple punto de partida: son las reglas del juego.

Los tipos principales de estructuras algebraicas son las siguientes:

1º La de grupo, la más sencilla, con una sola ley de composición interna.

2º La de anillo, con dos leyes internas, y su caso particular de cuerpo ó campo.

3º La de espacio vectorial, con una ley de composición interna y una externa.

Cualquier texto de álgebra abstracta da la lista exacta de los axiomas relativos es estas estructuras algebraicas particulares. Los números racionales, los reales, los complejos, con las operaciones de adición y multiplicación usuales son ejemplos de cuerpos. Estos cuerpos son los más importantes y los más estudiados en los cursos de Cálculo ó Análisis.

Los axiomas, y la estructura que ellos definen, no son el fruto de la imaginación o de los caprichos de un matemático. En general, se presentan primero varios casos concretos, que se estudian por separado. Pero si las leyes fundamentales son las mismas, aunque los objetos difieran, se descubre pronto que las demostraciones se repiten y que las conclusiones son las mismas. Entonces se ve que procura economía de tiempo y de pensamiento el estudio de la estructura abstracta que abarca los casos concretos ya conocidos, como casos particulares y probablemente casos futuros que se presenten.

Sean E y F dos conjuntos provistos de estructuras algebraicas, cada uno por su cuenta. Las estructuras pueden ser análogas, en el sentido de contener el mismo número de leyes de composición, tanto internas como externas, éstas últimas con los mismos conjuntos auxiliares. Sea $f: E \to F$. f se llama un <u>homomorfismo</u> si f respeta las leyes algebraicas; eso significa que la imagen del compuesto debe ser el mismo elemento de F que el compuesto de las imágenes.

Veamos por separado el caso de una ley interna y de una ley externa. Supongamos que las estructuras de E y F contengan ambas una ley interna, notada $\bullet$ en ambos casos. Sean x, y elementos de E, $x \bullet y$ su compuesto por la ley externa $\bullet$ en E. La función transforma $x, y, x \bullet y$ en $f(x), f(y), f(x \bullet y)$, respectivamente, que son elementos de F. La conexión deseada entre la función f y las leyes $\bullet$ se expresa por la igualdad:

(1) $\qquad f(x \bullet y) = f(x) \bullet f(y)$, para todo $x, y \in E$.

(A la izquierda $\bullet$ designa la ley interna en E; a la derecha en F).

En cuanto a una ley externa: si $x \in E$, y λ es un escalar, quisiéramos que se cumpliese:

(2) $\qquad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Como ya se ha dicho, f es un homomorfismo si (1) se cumple para cada ley interna, y (2) para cada ley externa. Si además f es biunívoca, f se llama un <u>isomorfismo</u> y decimos entonces que las dos estructuras son <u>iso-</u>

morfos. Dos conjuntos provistos de estructuras isomorfas son muy parecidos: los elementos se corresponden uno a uno, las leyes se corresponden, los resultados de las operaciones también, todo es igual salvo la naturaleza de los individuos, que no interesa. Algebraicamente hablando, son iguales, y los conjuntos se identifican.

Estructura de espacio métrico. No tiene hasta ahora ningún sentido hablar de límites, de continuidad, o decir que un punto está cerca o lejos de otro. Falta una estructura de otro tipo que se llama Topología. Me limitaré a dar la idea de un espacio métrico, que se define por una distancia. En la geometría del plano o del espacio, hay una distancia entre dos puntos P_1, P_2, que es un número real, no negativo, que se puede notar $d(P_1,P_2)$. Ella tiene las propiedades:

(M1) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$.

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (desigualdad del triángulo).

Sea ahora E un conjunto; tomamos x, y dos de sus elementos. Generalizando lo anterior, se define como distancia una aplicación $d: E \times E \to \mathbb{R}_+$ que cumple (M1)-(M3). Es decir, las propiedades del plano o del espacio común se vuelven axiomas, y se dice que E se ha convertido en un espacio métrico.

En un espacio métrico se puede hablar de esferas. Una esfera (abierta) $S_\rho(a)$ comprende todos los puntos de E que distan de a menos de ρ:

$$S_\rho(a) = \{ x \in E \ ; \ d(a,x) < \rho \} .$$

Podemos ahora hablar de continuidad de una función. Grosso modo, una función continua $f: E \to F$ da, de dos puntos cercanos en E, dos puntos cercanos en F. Esto se precisa así: Sea $S_\varepsilon(y_o)$ una esfera de F. Si existe en E una esfera $S_\delta(x_o)$ tal que la imagen por f de todos sus puntos esté en $S_\varepsilon(y_o)$ entonces, por definición, f es continua. En cierto sentido, si f es continua, ella transporta de E a F puntos cercanos a sitios cercanos. Es su manera de respetar, de ser compatible, con la estructura métrica de E y F.

Dos conjuntos son completamente análogos desde el punto de vista topológico, si existe f, función del uno en el otro, a la vez biyectiva y continua, con inverso continuo. Se dicen entonces <u>homeomorfos</u>.

Estas eran las nociones fundamentales sobre conjuntos y funciones que quería repasar. Después de las definiciones básicas, vimos tres tipos de estructuras posibles y las funciones que son compatibles con ellas. En el caso de conjuntos ordenados, son las funciones crecientes; cuando hay estructuras algebraicas, son los homomorfismos y los isomorfismos. Si se trata de estructuras métricas (ó más generalmente, topológica), son las funciones continuas y los homeomorfismos. Estas nociones de conjuntos y funciones, relativamente nuevas en su forma general, han aportado a la matemática precisión en las ideas, claridad y nitidez en su presentación. Termino expresando la opinión que estas ideas están al alcance de mentes jóvenes, que podrían entrar en cursos secundarios facilitando la enseñanza, que son más útiles y tienen carácter formativo más marcado que otros temas del programa.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

(Recibido en octubre de 1968)