

UNA FUNCION CUASI-LOGARITMICA

EN LA TEORIA DE LA INFORMACION

Jaime HERNANDEZ G.

O. RESUMEN

Si de un conjunto de  $N$  objetos se desea seleccionar uno en particular , este proceso se puede asociar con la obtención de una cantidad de información , la cual se puede calcular por medio de la conocida fórmula de Shannon . La fórmula de Shannon hace referencia al cambio ocurrido entre un estado inicial de incertidumbre y un estado final de conocimiento . En la práctica , sin embargo , algunos métodos son más efectivos que otros para proporcionar una determinada información . Se investiga en este artículo un método particular de selección : el binario , en el cual se evalúa el número de alternativas que en promedio se deben sortear para alcanzar un objeto del conjunto por dicho procedimiento . La función  $H(N)$  que da el promedio de alternativas en términos del número  $N$  de

—entre s se considera el número de información que se obtiene al comparar los objetos se compara con la información logarítmica asociada con la misma selección , y se encuentra que ambas funciones

abog más tarde la función es una potencia natural de 2.

Se hallan algunas propiedades de  $H(N)$  , las cuales coinciden con propiedades fundamentales de la función logaritmo .

En el párrafo precedente se vio que si se considera la selección

de  $N$  elementos en el espacio de probabilidad

que coincide con la selección de un punto en el espacio

de  $N$  elementos en el espacio de probabilidad

## 1. FORMULA DE SHANNON

necesario es tal . atendiendo a la operación de selección

utilizada para realizarla . Cuando se tiene un conjunto de  $N$

elementos de los cuales se selecciona uno , esta opera-

ción equivale a remover una incertidumbre , es decir , a

adquirir información . Si los  $N$  elementos pueden ser

escogidos con igual probabilidad , la información adqui-

rida depende exclusivamente de  $N$  y es una función cre-

ciente de este número .

En la literatura abundan presentaciones y desarrollos más o menos detallados del cálculo de tal informa-

ción (1) , (2) . Aquí nos limitaremos a dar un argumen-

to heurístico para llegar a este bien conocido resultado

en forma rápida .

Supongamos que cada uno de los elementos del con-

junto ha sido numerado utilizando la notación binaria .

Escoger un miembro del conjunto equivale entonces a señalar el numeral que codifica al elemento en cuestión . Cada una de las cifras binarias de tal numeral sólo puede valer cero o uno , y la información adquirida se puede hacer igual a la suma de las informaciones adquiridas al seleccionar las cifras por separado .

Se llama un bit (binary digit) la información asociada con la selección de uno entre dos objetos igualmente probables en cuanto a su escogencia . Si se tienen  $2^M$  objetos , deberán seleccionarse independientemente  $M$  cifras del numeral binario que le corresponde al elegido , es decir , la información asociada con este proceso es  $M$  bits . Sea  $I(2^M)$  la información asociada con la selección de uno entre estos  $2^M$  objetos . Entonces podemos escribir :

$$I(2^M) = M . \quad (1)$$

Esta fórmula también se puede escribir en la forma

$$I(2^M) = \log_2 2^M , \quad (2)$$

y entonces es usual generalizarla (y se puede demostrar que es correcto hacerlo) para obtener

$$I(N) = \log_2 N , \quad (3)$$

para cualquier  $N$  , no necesariamente una potencia natural de dos . Esta información estará medida en bits .

## 2. SELECCION BINARIA

La fórmula de Shannon expuesta en el parágrafo precedente permite el cálculo de la información asociada con la selección de un evento entre  $N$  que son igualmente probables , independientemente del proceso empleado para realizar la escogencia . En el presente aparte describiremos un método particularmente simple para hallar o escoger uno entre los  $N$  objetos dados .

El método es el siguiente : dividir el conjunto dado en dos partes que tengan igual número de objetos o difieran a lo sumo en una unidad , y decidir en cuál de los dos subconjuntos se encuentra el elemento buscado (1) ; fraccionar el conjunto favorecido en la misma forma , y así sucesivamente , hasta que quede un solo objeto que es el buscado .

---

(1) En este contexto no nos interesa el criterio para decidir en cuál conjunto se encuentra el elemento buscado .

Se puede lograr una descripción gráfica de este proceso si se piensa que es equivalente a separar el conjunto inicial en parejas (posiblemente quede un elemento aislado) y escoger un elemento de cada pareja para formar el subconjunto favorecido al cual se le hará el mismo fraccionamiento, y así hasta el final. Cuando queda un elemento aislado, éste siempre se incluirá en el subconjunto favorecido hasta que el número de elementos de dicho subconjunto sea par.

Por ejemplo, si tenemos 9 elementos (nivel cero),

Nivel 0      •    •    •    •    •    •    •    •    •

Figura 1

describimos la estrategia de seleccionación por dividimos el conjunto por parejas (más un elemento) y de cada pareja seleccionamos uno de los objetos (nivel 1):

Nivel 0



Nivel 1

Figura 2

Ahora el conjunto favorecido consta de cinco elementos (no nos interesa saber cuáles), los cuales separamos por parejas y de cada una de éllas escogemos uno (nivel 2) :

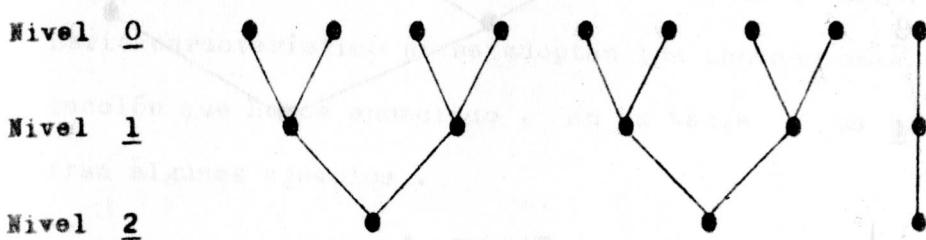


Figura 3

Obsérvese el proceso de sucesión de los niveles nros 0, 1 y 2 que es el mismo que se ha visto en la figura 2 .

El nivel 2 tiene tres elementos de los cuales formamos parejas y escogemos nuevamente para obtener el nivel 3 , y finalmente el nivel 4 con un solo elemento . Todo el proceso queda ilustrado en la figura 4 .

Obsérvese que para mantener la simplicidad del funcionamiento , siempre procedemos en el mismo orden para la formación de parejas ( de izquierda a derecha o viceversa ) .

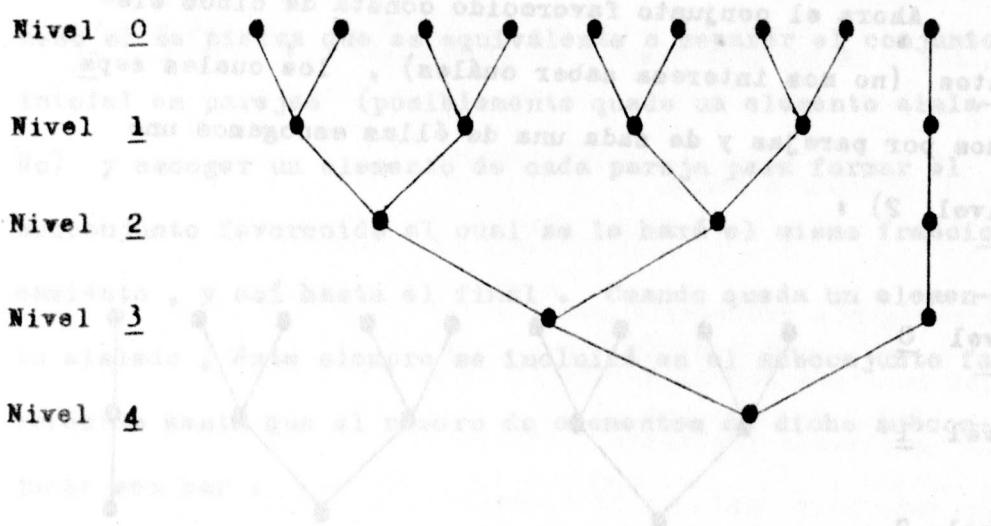


Figura 4

### 3. ARBOL BINARIO

Hemos obtenido que el proceso de selección binario se puede identificar con un árbol de cada uno de cuyos vértices (excepto del más bajo) se desprenden tres ramas : dos hacia el nivel anterior y una hacia el nivel posterior . Este tipo de árbol recibe el nombre de árbol binario . Observamos que cada vértice representa una decisión tomada entre dos alternativas y que , por lo tanto , cuando queda un elemento aislado , éste no representa una alternativa sino en la medida en que encontraremos otro con el cual aparearlo . En el ejemplo , se-

gún esta convención la rama del lado derecho no tiene vértices donde hemos señalado puntos en los niveles 0 a 3, y en consecuencia constituye una sola rama y no varias, por lo cual los mencionados puntos pueden suprimirse.

Cada conjunto de N elementos tendrá un árbol binario característico si se adoptan las convenciones de selección que hemos enunciado. En la tabla 1 se ilustran algunos ejemplos.

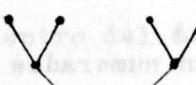
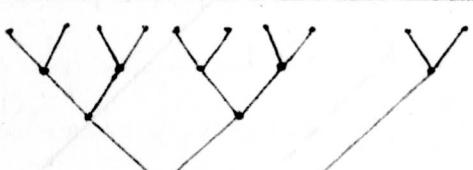
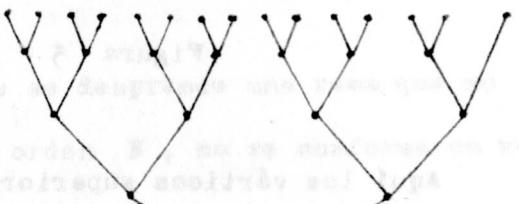
N	ARBOL BINARIO
1	.
2	
3	
4	
10	
15	

TABLA No. 1

#### 4. ARBOL BINARIO INFINITO

Podemos considerar un árbol de orden  $N$  como una porción de un árbol binario infinito , por ejemplo, el de la figura 5 .

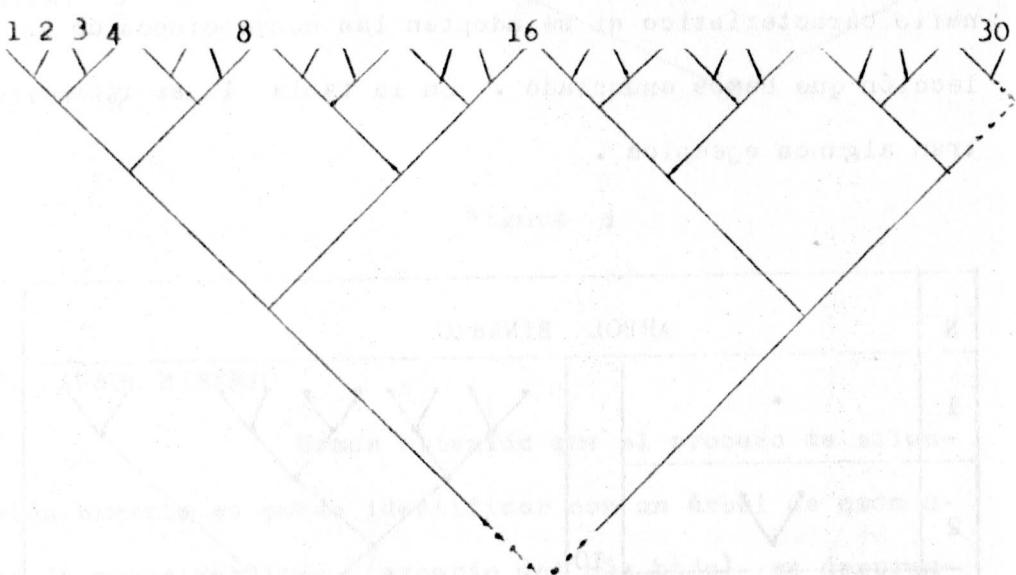
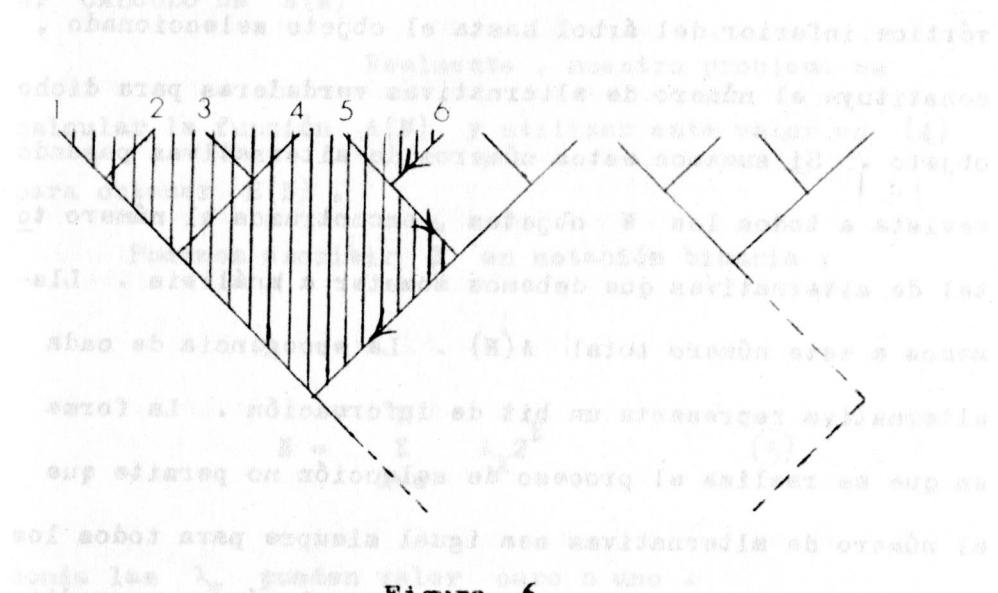


Figura 5

Aquí los vértices superiores están numerados sucesivamente a partir de 1 desde la izquierda . Para encontrar el árbol que le pertenece a un número dado , se comienza por el vértice superior que le corresponde a dicho

número y se va descendiendo hasta encontrar la rama extrema de la izquierda . Todas las ramas y todos los vértices que están comprendidos entre esta rama izquierda y la recorrida por el procedimiento anterior conforman el árbol de orden  $N$  .

Ejemplo :  $N = 6$



**Figura 6**

Obsérvese que donde se desprende una rama que no queda dentro del árbol de orden  $N$  , no se conforma un vértice para dicho árbol .

## 5. MEDICION DE LA INFORMACION POR ALTERNATIVAS

La información total en un proceso de selección de

uno entre  $N$  eventos (o elementos, u objetos) igualmente probables se puede calcular en bits contando el número de alternativas binarias que se presentan en el proceso de selección. Se obtiene información en la medida en que se eliminan todas las alternativas falsas y se opta por las verdaderas. El número de ramas que encontramos desde el vértice inferior del árbol hasta el objeto seleccionado, constituye el número de alternativas verdaderas para dicho objeto. Si sumamos estos números de alternativas pasando revista a todos los  $N$  objetos, encontramos el número total de alternativas que debemos someter a análisis. Llamemos a este número total  $A(N)$ . La escogencia de cada alternativa representa un bit de información. La forma en que se realiza el proceso de selección no permite que el número de alternativas sea igual siempre para todos los objetos, de modo que debemos calcular el número promedio de alternativas favorables que le corresponden a cada elemento como

$$H(N) = \frac{A(N)}{N} \quad (4)$$

Esta será la información promedio asociada con la selección de uno entre  $N$  elementos.

Vamos a mostrar que  $H(N)$  goza de propiedades muy

semejantes a las de la función  $I(N)$  definida en (3), y coincide con ella cuando es posible escribir  $N = 2^M$ , con  $M$  un número natural.

## 6. CALCULO DE $H(N)$

Realmente, nuestro problema es

calcular la función  $A(N)$  y utilizar este valor en (4)

para obtener  $H(N)$ .

Podemos escribir  $N$  en notación binaria:

$$N = \sum_{K=0}^{M-1} \lambda_K 2^K \quad (5)$$

dónde las  $\lambda_K$  pueden valer cero o uno.

Si separamos la mayor potencia de  $2$ :

$$N = 2^M + \sum_{K=0}^{M-1} \lambda_K 2^K \quad (6)$$

pues  $\lambda_M = 1$  necesariamente, obtenemos

$$A(N) = A(2^M + Q) \quad (7)$$

dónde  $Q < 2^M$ .

Considerando el árbol binario , el árbol de  $2^M + Q$  se compone de dos ramas principales que parten de un vértice : la rama de la izquierda conduce al vértice inferior del árbol de  $2^M$  , mientras que la rama derecha conduce al vértice inferior del árbol correspondiente a  $Q$ .

El árbol del conjunto contiene entonces dos ramas más que los sub-árboles por separado . Estas ramas adicionales son las que se unen en el vértice inferior . De esta manera , cada elemento del conjunto total tiene que ser localizado después de haber agregado una alternativa más . Por lo tanto , hemos agregado en total ,  $M$  alternativas en comparación con la situación en la cual  $2^M$  y  $Q$  están separados . Encontramos como consecuencia de este razonamiento :

$$A(2^M + Q) = A(2^M) + A(Q) + M \quad (8)$$

Donde  $A(2^M)$  y  $A(Q)$  son los números de alternativas correspondientes a  $2^M$  y  $Q$  respectivamente , tomado cada conjunto por separado . Asumimos  $A(0) = 0$  .

La fórmula (8) no es válida si  $Q = 0$  , como se puede ver reemplazando directamente . Esto quiere decir que debemos calcular  $A(2^M)$  por separado para poder obtener de (8) una fórmula de recurrencia que nos con-

duzca al resultado final .

En el árbol de cualquier potencia natural de 2 , el número de ramas para llegar desde el vértice inferior a uno de los elementos es el mismo para todos ellos , y es precisamente igual a dicha potencia de 2 ; de modo que el número total de alternativas para  $2^M$  elementos es

$$A(2^M) = M \cdot 2^M \quad (9)$$

La fórmula (9) nos permite calcular  $H$  directamente cuando  $M = 2^M$  :

$$H(2^M) = \frac{A(2^M)}{2^M} = M \quad (10)$$

con lo cual , según (1) , resulta que  $H(2^M) = I(2^M)$  .

Es decir , la función  $H$  coincide con la función logarítmica de información cuando  $M$  es una potencia natural de 2 .

Ahora , según (6)

$$Q = \sum_{K=0}^{M-1} \lambda_K 2^K \quad (11)$$

donde  $\lambda_{M-1}$  puede tomar valor cero o uno .

Si  $\lambda_{M-1} = 0$ , entonces

$$A(Q) = A\left( \sum_{K=0}^{M-2} \lambda_K 2^K \right) \quad (12)$$

Si  $\lambda_{M-1} = 1$ , entonces

$$A(Q) = A(2^{M-1} + \sum_{K=0}^{M-2} \lambda_K 2^K),$$

y si utilizamos la fórmula (8) reemplazando adecuadamente

te:

$$A(Q) = A(2^{M-1}) + A\left( \sum_{K=0}^{M-2} \lambda_K 2^K \right) + Q \quad (13)$$

Las fórmulas (12) y (13) se pueden reducir a una sola si utilizamos  $\lambda_{M-1}$ :

$$A(Q) = \lambda_{M-1} \left[ A(2^{M-1}) + Q \right] + A\left( \sum_{K=0}^{M-2} \lambda_K 2^K \right) \quad (14a)$$

pues si  $\lambda_{M-1} = 0$ , (14a) se reduce a (12) y si

$\lambda_{M-1} = 1$ , se convierte en (13).

Si sustituimos Q por su valor, encontramos

$$A\left(\sum_{K=0}^{M-1} \lambda_K 2^K\right) = A\left(\sum_{K=0}^{M-2} \lambda_K 2^K\right) + \lambda_{M-1} \lceil A(2^{M-1}) + \sum_{K=0}^{M-1} \lambda_K 2^K \rceil \quad (14b)$$

que es la fórmula de recurrencia buscada .

Utilizando (14b) sucesivamente , obtenemos la secuencia de ecuaciones

$$A\left(\sum_{K=0}^M \lambda_K 2^K\right) = A\left(\sum_{K=0}^{M-1} \lambda_K 2^K\right) + \lambda_M \lceil A(2^M) + \sum_{K=0}^M \lambda_K 2^K \rceil$$

$$A\left(\sum_{K=0}^{M-1} \lambda_K 2^K\right) = A\left(\sum_{K=0}^{M-2} \lambda_K 2^K\right) + \lambda_{M-1} \lceil A(2^{M-1}) + \sum_{K=0}^{M-1} \lambda_K 2^K \rceil$$

$$A\left(\sum_{K=0}^{M-2} \lambda_K 2^K\right) = \dots$$

$$A\left(\sum_{K=0}^1 \lambda_K 2^K\right) = A(\lambda_0) + \lambda_1 \lceil A(2) + \sum_{K=0}^1 \lambda_K 2^K \rceil$$

Escribimos lo anterior con la precaución de que la última ecuación aparece sólo en caso de que ninguna de las sumas anteriores  $\sum_{K=0}^P \lambda_K 2^K$  sea exactamente una potencia de

2 . Es decir , si

$$\sum_{K=0}^P \lambda_K 2^K = 2^P \quad (15)$$

o sea , si  $\lambda_P = 1$  y  $\lambda_K = 0$  con  $K < P$  , entonces la  
última ecuación de la secuencia es

$$A\left(\sum_{K=0}^P \lambda_K 2^K\right) = A(2^P) = P 2^P$$

de acuerdo con (9) .

Si sumamos las ecuaciones de la secuencia miembro a miembro , todos los términos de la izquierda , excepto el primero , se cancelan y obtenemos (recordando que  $A(\lambda_0) = 0$  dado que  $\lambda_0$  vale cero o uno) :

$$A\left(\sum_{K=0}^M \lambda_K 2^K\right) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \left[ A(2^j) + \sum_{K=0}^{j-1} \lambda_K 2^K \right] . \quad (16)$$

En caso de que  $\lambda_K = 0$  para  $K < P$  , el resultado de la suma es

$$A\left(\sum_{K=0}^M \lambda_K 2^K\right) = \sum_{j=P+1}^M \lambda_j \left[ A(2^j) + \sum_{K=0}^{j-1} \lambda_K 2^K \right] + A(2^P) \quad (17)$$

y esta fórmula evidentemente se reduce a (16) cuando  $P = 0$  .

Reorganizando un poco , podemos escribir

$$A\left(\sum_{K=0}^M \lambda_K 2^K\right) = \sum_{j=P}^M j \lambda_j 2^j + \sum_{j=P+1}^M \lambda_j \sum_{K=0}^{j-1} \lambda_K 2^K \quad (18)$$

donde  $P$  cumple la condición (15).

Esta es, finalmente, la fórmula general para  $A(N)$  cuando escribimos  $N$  en la forma (5). Si  $N=2^M$ , o sea, si  $P=M$ , el segundo término de (18) pierde sentido y el primero vale  $M 2^M$ , lo cual está de acuerdo con (9).

Ejemplo : calculemos  $A(13)$ .

## 7. RESULTADOS NUMERICOS

a) Ejemplo : calculemos  $A(N)$

donde  $N = 13$ . En el sistema binario

$$N = 1101.$$

$$\text{Aqui } P = 0.$$

Podríamos hacer  $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$

y reemplazar en (18), pero existe una interpretación más cómoda para cálculos manuales : los términos de la primera sumatoria de (18) pertenecen a la sucesión

$$\left\{ j2^j \right\} = \left\{ 0, 2, 18, 24, 64, 160, 384, 896, \dots \right\} \quad (19)$$

y cada uno contribuye o no según que la correspondiente cifra binaria de  $N$  valga uno o cero (contadas de derecha a izquierda y a partir de cero).

En este ejemplo contribuyen 8 y 24 cuya suma es 32 .

Los términos de la segunda sumatoria de (18) representan los números binarios que van apareciendo cuando se toman sucesivamente las dos últimas cifras de  $N$  , las tres últimas cifras de  $N$  , etc. Solo se toman en cuenta los números binarios que comienzan por 1 , exceptuando el que esté seguido únicamente por ceros . En este caso van apareciendo :

2 últimas cifras 01 no se toma en cuenta

3 últimas cifras 101 = 5

4 últimas cifras 1101 = 13

Suma = 18 .

Entonces ,  $A(13) = 32 + 18 = 50$  .

b) Ejemplo : calcular  $A(N)$  con  $N = 88$  . En binario :

$$N = 1011000$$

Aquí  $P = 3$  .

Recurriendo al método desarrollado en el ejemplo anterior , al primer término de (18) contribuyen los siguientes números de la sucesión (19) :

$$24 + 64 + 384 = 472 .$$

Al segundo término contribuyen

$$11000 = 24$$

$$\text{y } 1011000 = 88$$

$$\text{suma } -112 .$$

$$\text{Entonces } A(88) = 472 + 112 = 584 .$$

A continuación se tabulan para  $1 \leq N \leq 100$  los valores de  $A(N)$ ,  $H(N)$ ,  $\log_2 N$  y de la función

$$D(N) = H(N) - \log_2 N .$$

Estos valores fueron calculados con un minicomputador HP9830B .

Las gráficas de  $H(N)$  y  $D(N)$  se presentan en las figuras 7 y 8 .

TABLA 2

N	A(N)	H(N)	$\log_2 N$	DIF=D(N)
2	2	1.000000	1.000000	0.000000
3	5	1.666667	1.584963	0.081704
4	8	2.000000	2.000000	0.000000
5	13	2.600000	2.321923	0.278072
6	16	2.666667	2.584963	0.081704

$n$	$A(n)$	$H(n)$	$\log_2 n$	$DIF-D(n)$
7	20	2.857143	2.807355	0.049788
8	24	3.000000	3.000000	0.000000
9	33	3.666667	3.169925	0.496742
10	36	3.600000	3.321923	0.278072
11	40	3.636364	3.459432	0.176932
12	44	3.666667	3.584963	0.081704
13	50	3.846154	3.700440	0.145714
14	54	3.857143	3.807355	0.049788
15	59	3.933333	3.906891	0.026443
16	64	4.000000	4.000000	0.000000
17	31	4.764706	4.087463	0.677243
18	84	4.666667	4.169925	0.496742
19	88	4.631579	4.247928	0.383651
20	92	4.600000	4.321928	0.278072
21	98	4.666667	4.392317	0.274349
22	102	4.636364	4.459432	0.176932
23	107	4.652174	4.523562	0.128612
24	112	4.666667	4.584963	0.081704
25	122	4.880000	4.648856	0.236144
26	126	4.846154	4.700440	0.145714
27	131	4.851852	4.754888	0.096964



N	A(N)	H(N)	$\log_2 N$	DIF-D(N)
28	136	4.857143	4.807355	0.049788
29	143	4.931034	4.857981	0.073053
30	148	4.933333	4.906891	0.026442
31	154	4.967742	4.954196	0.013546
32	160	5.000000	5.000000	0.000000
33	193	5.848485	5.044394	0.804091
34	196	5.764706	5.087463	0.677243
35	200	5.714286	5.129283	0.585003
36	204	5.666667	5.169925	0.496742
37	210	5.675676	5.209453	0.466222
38	214	5.631579	5.247928	0.383651
39	219	5.615385	5.285402	0.329982
40	224	5.600000	5.321928	0.278072
41	234	5.707317	5.357552	0.349765
42	238	5.666667	5.392317	0.274349
43	243	5.651163	5.426265	0.224898
44	248	5.636364	5.459432	0.176932
45	255	5.666667	5.491853	0.174814
46	260	5.652174	5.523562	0.128612
47	266	5.659574	5.554589	0.104986
48	272	5.666667	5.584963	0.081704

$x$	$A(x)$	$H(x)$	$\log_2 H$	$DIF = D(x)$
49	290	5.918367	5.614710	0.303658
50	294	5.880000	5.643856	0.236144
51	299	5.862745	5.672425	0.190320
52	304	5.846154	5.700440	0.145714
53	311	5.867925	5.727920	0.140004
54	316	5.851852	5.754888	0.096964
55	322	5.854545	5.781360	0.073186
56	328	5.857143	5.807355	0.049788
57	339	5.947368	5.832890	0.114478
58	344	5.931034	5.857931	0.073053
59	350	5.932203	5.882643	0.049560
60	356	5.933333	5.906891	0.026443
61	364	5.967213	5.930737	0.036476
62	370	5.967742	5.954196	0.013546
63	377	5.984127	5.977280	0.006847
64	384	6.000000	6.000000	0.000000
65	449	6.907692	6.022368	0.885324
66	452	6.848485	6.044394	0.804091
67	456	6.805970	6.066089	0.739881
68	460	6.764706	6.087463	0.677243
69	466	6.753623	6.108524	0.645099

(N) 4-114	A(N)	H(N)	LOG <sub>2</sub> N	DIF=D(N)
70	470	6.714286	6.129283	0.585003
71	475	6.690141	6.149747	0.540394
72	480	6.666667	6.169925	0.496742
73	490	6.712329	6.189825	0.522504
74	494	6.675676	6.209453	0.466222
75	499	6.653333	6.228819	0.424515
76	504	6.681579	6.247928	0.333651
77	511	6.636364	6.266787	0.369577
78	516	6.615385	6.285402	0.329982
79	522	6.607595	6.303781	0.303814
80	528	6.600000	6.321928	0.278072
81	546	6.740741	6.330850	0.400391
82	550	6.707317	6.357552	0.349765
83	555	6.686747	6.375039	0.311708
84	560	6.666667	6.392317	0.274349
85	567	6.670588	6.409391	0.261197
86	572	6.651163	6.426265	0.224898
87	578	6.643678	6.442943	0.200735
88	584	6.636364	6.459432	0.176932
89	595	6.685393	6.475733	0.209660
90	600	6.666667	6.491853	0.174814

N	A(N)	H(N)	$\log_2 N$	DIF=D(N)
91	606	6.659341	6.507795	0.151546
92	612	6.652174	6.523562	0.128612
93	620	6.666667	6.539159	0.127508
94	626	6.659574	6.554589	0.104986
95	633	6.663158	6.569856	0.093302
96	640	6.666667	6.584963	0.081704
97	674	6.948454	6.599913	0.348541
98	678	6.918367	6.614710	0.303658
99	683	6.898990	6.629357	0.269633
100	688	6.880000	6.643856	0.236144
101	693	6.861520	6.658356	0.202670
102	708	6.843140	6.672886	0.169200
103	723	6.824760	6.687416	0.135730
104	738	6.806380	6.701946	0.102260
105	753	6.787990	6.716476	0.068790
106	768	6.769610	6.731006	0.035320
107	783	6.751230	6.745536	0.001850
108	798	6.732850	6.759066	-0.032320
109	813	6.714470	6.773596	-0.064850
110	828	6.696090	6.787126	-0.102380
111	843	6.677710	6.801656	-0.139810
112	858	6.659330	6.816186	-0.177340
113	873	6.640950	6.830716	-0.214870
114	888	6.622570	6.845246	-0.252400
115	903	6.604190	6.859776	-0.289830
116	918	6.585810	6.874306	-0.327360
117	933	6.567430	6.888836	-0.364890
118	948	6.549050	6.903366	-0.402420
119	963	6.530670	6.917896	-0.439950
120	978	6.512290	6.932426	-0.477480
121	993	6.493910	6.946956	-0.515010
122	1008	6.475530	6.961486	-0.552540
123	1023	6.457150	6.976016	-0.589970
124	1038	6.438770	6.989546	-0.627500
125	1053	6.420400	7.004076	-0.664930
126	1068	6.402020	7.018606	-0.702460
127	1083	6.383640	7.033136	-0.739890
128	1098	6.365260	7.047666	-0.777420
129	1113	6.346880	7.062196	-0.814850
130	1128	6.328500	7.076726	-0.852480
131	1143	6.310120	7.091256	-0.889910
132	1158	6.291740	7.105786	-0.927440
133	1173	6.273360	7.120316	-0.964870
134	1188	6.254980	7.134846	-0.902400
135	1203	6.236600	7.149376	-0.839830
136	1218	6.218220	7.163906	-0.777460
137	1233	6.200840	7.178436	-0.714890
138	1248	6.182460	7.192966	-0.652420
139	1263	6.164080	7.207496	-0.589850
140	1278	6.145700	7.222026	-0.527480
141	1293	6.127320	7.236556	-0.464910
142	1308	6.108940	7.251086	-0.402440
143	1323	6.090560	7.265616	-0.339870
144	1338	6.072180	7.279146	-0.277400
145	1353	6.053800	7.293676	-0.214830
146	1368	6.035420	7.308206	-0.152460
147	1383	6.017040	7.322736	-0.089890
148	1398	5.998660	7.337266	0.007420
149	1413	5.980280	7.351796	-0.152450
150	1428	5.961900	7.366326	-0.290080
151	1443	5.943520	7.380856	-0.427710
152	1458	5.925140	7.395386	-0.565340
153	1473	5.906760	7.409916	-0.702970
154	1488	5.888380	7.424446	-0.840600
155	1503	5.870000	7.438976	-0.978230
156	1518	5.851620	7.453506	-1.115860
157	1533	5.833240	7.467036	-1.253490
158	1548	5.814860	7.481566	-1.391120
159	1563	5.796480	7.496096	-1.528750
160	1578	5.778100	7.510626	-1.666380
161	1593	5.759720	7.525156	-1.803010
162	1608	5.741340	7.539686	-1.940640
163	1623	5.722960	7.554216	-2.078270
164	1638	5.704580	7.568746	-2.215900
165	1653	5.686200	7.583276	-2.353530
166	1668	5.667820	7.597806	-2.491160
167	1683	5.649440	7.612336	-2.628790
168	1698	5.631060	7.626866	-2.766420
169	1713	5.612680	7.641396	-2.904050
170	1728	5.594300	7.655926	-3.041680
171	1743	5.575920	7.670456	-3.179310
172	1758	5.557540	7.684986	-3.316940
173	1773	5.539160	7.700516	-3.454570
174	1788	5.520780	7.714946	-3.592200
175	1803	5.502400	7.729476	-3.729830
176	1818	5.484020	7.743906	-3.867460
177	1833	5.465640	7.758436	-4.005090
178	1848	5.447260	7.772966	-4.142720
179	1863	5.428880	7.787496	-4.280350
180	1878	5.410500	7.802026	-4.418080
181	1893	5.392120	7.816556	-4.555710
182	1908	5.373740	7.831086	-4.693340
183	1923	5.355360	7.845616	-4.831070
184	1938	5.337000	7.860146	-4.968700
185	1953	5.318620	7.874676	-5.106430
186	1968	5.300240	7.889206	-5.244160
187	1983	5.281860	7.903736	-5.381890
188	1998	5.263480	7.918266	-5.519620
189	2013	5.245100	7.932796	-5.657350
190	2028	5.226720	7.947326	-5.795080
191	2043	5.208340	7.961856	-5.932810
192	2058	5.190000	7.976386	-6.070540
193	2073	5.171620	7.990916	-6.208270
194	2088	5.153240	8.005446	-6.346000
195	2103	5.134860	8.019976	-6.483730
196	2118	5.116480	8.034506	-6.621460
197	2133	5.098100	8.048936	-6.759190
198	2148	5.079720	8.063466	-6.896920
199	2163	5.061340	8.077996	-7.034650
200	2178	5.043000	8.092526	-7.172380
201	2193	5.024620	8.107056	-7.310110
202	2208	5.006240	8.121586	-7.447840
203	2223	4.987860	8.136116	-7.585570
204	2238	4.969480	8.150646	-7.723300
205	2253	4.951100	8.165176	-7.861030
206	2268	4.932720	8.179706	-8.008760
207	2283	4.914340	8.194236	-8.146490
208	2298	4.895960	8.208766	-8.284220
209	2313	4.877580	8.223296	-8.421950
210	2328	4.859200	8.237826	-8.559680
211	2343	4.840820	8.252356	-8.697410
212	2358	4.822440	8.266886	-8.835140
213	2373	4.804060	8.281416	-8.972870
214	2388	4.785680	8.295946	-9.110600
215	2403	4.767300	8.310476	-9.248330
216	2418	4.748920	8.325006	-9.386060
217	2433	4.730540	8.339536	-9.523790
218	2448	4.712160	8.354066	-9.661520
219	2463	4.693780	8.368596	-9.799250
220	2478	4.675400	8.383126	-9.936980
221	2493	4.657020	8.397656	-10.074710
222	2508	4.638640	8.412186	-10.212440
223	2523	4.620260	8.426716	-10.342440
224	2538	4.601880	8.441246	-10.472440
225	2553	4.583500	8.455776	-10.602440
226	2568	4.565120	8.470306	-10.732440
227	2583	4.546740	8.484836	-10.862440
228	2598	4.528360	8.500366	-10.992440
229	2613	4.510000	8.514896	-11.122440
230	2628	4.491620	8.529426	-11.252440
231	2643	4.473240	8.543956	-11.382440
232	2658	4.454860	8.558486	-11.512440
233	2673	4.436480	8.573016	-11.642440
234	2688	4.418100	8.587546	-11.772440
235	2703	4.399720	8.602076	-11.902440
236	2718	4.381340	8.616606	-12.032440
237	2733	4.363000	8.631136	-12.162440
238	2748	4.344620	8.645666	-12.292440
239	2763	4.326240	8.660196	-12.422440
240	2778	4.307860	8.674726	-12.552440
241	2793	4.289480	8.689256	-12.682440
242	2808	4.271100	8.703786	-12.812440
243	2823	4.252720	8.718316	-12.942440
244	2838	4.234340	8.732846	-13.072440
245	2853	4.215960	8.747376	-13.202440
246	2868	4.197580	8.761906	-13.332440
247	2883	4.179200	8.776436	-13.462440
248	2898	4.160820	8.790966	-13.592440
249	2913	4.142440	8.805496	-13.722440
250	2928	4.124060	8.820026	-13.852440
251	2943	4.105680	8.834556	-13.982440
252	2958	4.087300	8.849086	-14.112440
253	2973	4.068920	8.863616	-14.242440
254	2988	4.050540	8.878146	-14.372440
255	3003	4.032160	8.892676	-14.502440
256	3018	4.013780	8.907206	-14.632440
257	3033	3.995400	8.921736	-14.762440
258	3048	3.977020	8.936266	-14.892440
259	3063	3.958640	8.950796	-15.022440
260	3078	3.940260	8.965326	-15.152440
261	3093	3.921880	8.979856	-15.282440
262	3108	3.903500	8.994386	-15.412440
263	3123	3.885120	9.008916	-15.542440
264	3138	3.866740	9.023446	-15.672440
265	3153	3.848360	9.037976	-15.802440
266	3168	3.830000	9.052506	-15.932440
267	3183	3.811620	9.067036	-16.062440
268	3198	3.793240	9.081566	-16.192440
269	3213	3.774860	9.096096	-16.322440
270	3228	3.756480	9.110626	-16.452440
271	3243	3.738100	9.125156	-16.582440
272	3258	3.719720	9.139686	-16.712440
273	3273	3.691340	9.154216	-16.842440
274	3288	3.673000	9.168746	-16.972440
275	3303	3.654620	9.183276	-17.102440
276	3318	3.636240	9.197806	-17.232440
277	3333	3.617860	9.212336	-17.362440
278	3348	3.599480	9.226866	-17.492440
279	3363	3.581100	9.241396	-17.622440
280	3378	3.562720	9.255926	-17.752440
281	3393	3.544340	9.270456	-17.882440
282	3408	3.526000	9.284986	-18.012440
283	3423	3.507620	9.300516	-18.142440
284	3438	3.489240	9.315046	-18.272440
285	3453	3.470860	9.329576	-18.402440
286	3468	3.452480	9.344106	-18.532440
287	3483	3.434100	9.358636	-18.662440
288	3498	3.415720	9.373166	-18.792440
289	3513	3.397340	9.387696	-18.922440
290	3528	3.379000	9.402226	-19.052440
291	3543	3.360620	9.416756	-19.

### 8. PROPIEDADES DE $H(N)$

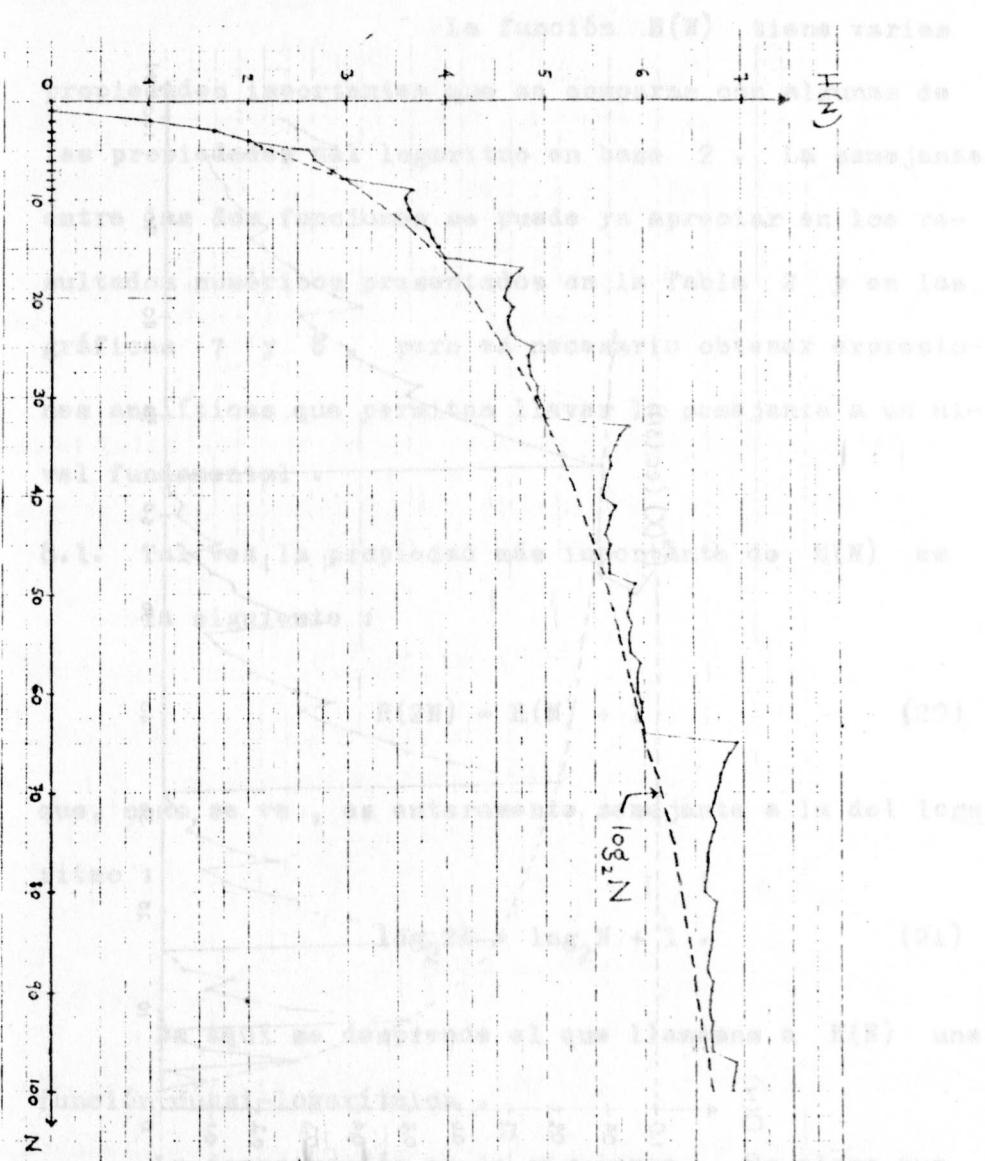


Figura 7

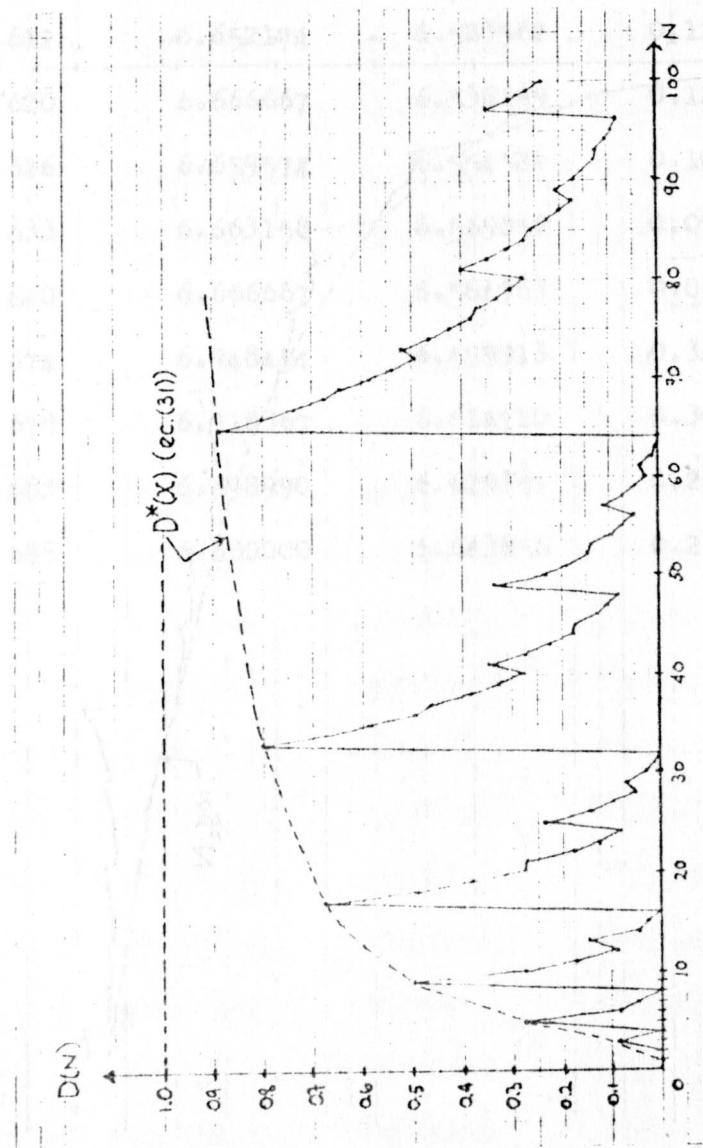


Figura 8

## 8. PROPIEDADES DE $H(N)$

La función  $H(N)$  tiene varias propiedades importantes que se comparan con algunas de las propiedades del logaritmo en base 2. La semejanza entre las dos funciones se puede ya apreciar en los resultados numéricos presentados en la Tabla 2 y en las gráficas 7 y 8, pero es necesario obtener expresiones analíticas que permitan llevar la semejanza a un nivel fundamental.

8.1. Tal vez la propiedad más importante de  $H(N)$  es la siguiente :

$$H(2N) = H(N) + 1 \quad (20)$$

que, como se ve, es enteramente semejante a la del logaritmo :

$$\log_2 2N = \log_2 N + 1. \quad (21)$$

De aquí se desprende el que llamemos a  $H(N)$  una función quasi-logarítmica.

La demostración es la siguiente. Es claro que si escribimos  $N$  en forma binaria

$$N = \sum_{K=0}^{M} \lambda_K 2^K ,$$

entonces ,

$$2N = 2 \sum_{K=0}^M \lambda_K 2^K - \sum_{K=0}^M \lambda_K 2^{K+1},$$

en contraria con el resultado anterior que dice que

desplazamos al 1 . Y para no confundir los resultados que

se obtienen si , si cambiamos  $K + 1$  por  $n$  ,

pero esto se traducira en que el resultado sera mas grande

$$2N = \sum_{n=1}^{M+1} \lambda_{n-1} 2^n = \sum_{n=0}^M \delta_n 2^n, \text{ con } \delta_0 = 0, \quad (22)$$

de modo que si realizamos sumando binario tenemos que

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_n = \lambda_{n-1} \quad (n = 1, \dots, M+1). \quad (23)$$

(as)

Si utilizamos (18) para la expresión (22) , obtenemos

$$A\left(\sum_{n=0}^{M+1} \delta_n 2^n\right) = \sum_{n=q}^{M+1} \delta_n n 2^n + \sum_{j=q+1}^{M+1} \delta_j \sum_{n=0}^j \delta_n 2^n, \quad (24)$$

donde es claro que  $q = p+1$  pues  $2N$  tiene los mismos dígitos que  $N$  , sólo que desplazados a la izquierda un lugar . Si hacemos en (24) nuevamente  $n = K+1$  ,

$$A(2N) = \sum_{K=q-1}^M \delta_{K+1} (K+1) 2^{K+1} + \sum_{j=q+1}^{M+1} \delta_j \sum_{K=0}^{j-1} \delta_{K+1} 2^{K+1}$$

y si transformamos  $j = e+1$  y hacemos aparecer  $p$  en lugar de  $q$ ,

$$A(2N) = \sum_{K=p}^M \delta_{K+1} (K+1) 2^{K+1} + \sum_{e=p+1}^M \delta_{e+1} \sum_{K=0}^e \delta_{K+1} 2^{K+1},$$

de modo que si utilizamos (23), obtenemos

$$A(2N) = \sum_{K=p}^M \lambda_K (K+1) 2^{K+1} + \sum_{e=p+1}^M \lambda_e \sum_{K=0}^e \lambda_K 2^{K+1},$$

en donde podemos factorizar un 2 y separar la primera sumatoria, lo cual nos da

$$A(2N) = 2 \left[ \sum_{K=p}^M \lambda_K 2^K + \sum_{K=p}^M \lambda_K 2^K + \sum_{e=p+1}^M \lambda_e \sum_{K=0}^e \lambda_K 2^K \right]$$

y, finalmente,

$$A(2N) = 2 \left[ N + A(N) \right], \quad (25)$$

pues

$$\sum_{K=p}^M \lambda_K 2^K = \sum_{K=0}^M \lambda_K 2^K = N,$$

y los dos últimos sumandos dentro del paréntesis coinciden con la expresión (18) .

Si dividimos (25) por  $2N$  a ambos lados , encontramos

$$H(2N) = \frac{A(2N)}{2N} = 1 + \frac{A(N)}{N}$$

Es decir ,

$$H(2N) = H(N) + 1 , \quad (20)$$

tal como queríamos demostrar .

### 8.2. Como corolario de la propiedad expresada en (20) ,

es inmediato que se puede demostrar por inducción la siguiente :

$$H(2^M N) = H(N) + M \text{ ; } \quad (26)$$

de modo que para  $N = 1$  y recordando que  $H(1) = 0$  , se obtiene

$$H(2^M) = M ,$$

que es la expresión (10) hallada al principio .

### 8.3. Otra propiedad que es fácilmente obtenible y notable por su forma se obtiene a partir de (8) :

$$A(N) = A(2^M + Q) = A(2^M) + A(Q) + N ,$$

y si dividimos por  $N = 2^M + Q$ ,

$$H(2^M+Q) = \frac{A(2^M)+A(Q)}{2^M+Q} + 1$$

Pero  $A(2^M) = 2^M H(2^M)$  y  $A(Q) = QH(Q)$ , de donde

$$H(2^M+Q) = \frac{2^M H(2^M) + QH(Q)}{2^M + 1} + 1, \quad (27)$$

cuyo primer término tiene la forma de un promedio ponderado. Es importante recordar que en esta fórmula se debe tener  $Q < 2^M$ , de acuerdo con el razonamiento que conduce a la ecuación (6).

8.4. Observando la gráfica de  $D(N)$  se encuentra a simple vista que la función tiene una serie de máximos relativos en los puntos expresables en la forma  $N = 2^M + 1$ . Más exactamente, entre  $N_0 = 2^M$  y  $N_1 = 2^{M+1}$ , la función es máxima en  $N = 2^M + 1$ ; o sea, que si  $1 < R < 2^M$ , entonces

$$D(2^M + 1) > D(2^M + R). \quad (28)$$

La demostración de (28) procede así:

$$D(2^M+1) = H(2^M+1) - \log_2(2^M+1) , \text{ por definición .}$$

$$= \frac{2^M H(2^M) + H(1)}{2^M+1} + 1 - \log_2(2^M+1) , \text{ por aplicación de (18) .}$$

ción de (27) .

Entonces

$$\begin{aligned} D(2^M+1) &= 1 + \frac{M2^M}{2^M+1} - \left[ \log_2\left(\frac{2^M+1}{2^M}\right) + \log_2 2^M \right] \\ &= 1 + \frac{M2^M}{2^M+1} - \log_2\left(1 + \frac{1}{2^M}\right) - M . \end{aligned}$$

Finalmente ,

$$D(2^M+1) = 1 - \frac{M}{2^M+1} - \log_2\left(1 + \frac{1}{2^M}\right) . \quad (29)$$

Este resultado es de suma importancia , como veremos más adelante en el parágrafo 8.6.

De la misma manera se puede obtener

$$D(2^M+R) = 1 - \frac{R M}{2^M+R} - \log_2\left(1 + \frac{R}{2^M}\right) \quad (30)$$

con  $R < 2^M$  , según la aclaración que se hace a continuación de la ecuación (27) .

De aquí es fácil ver por comparación de (29) y (30) que la ecuación (28) se cumple si  $R > 1$  .

8.5. En la gráfica de  $D(N)$  se puede ver también que los máximos que aparecen en  $N = 2^M + 1$  son cada vez más pronunciados, de modo que es de esperarse que  $D(2^M + 1)$  sea una función creciente con respecto a la variable  $M$ .

Sea  $x = 2^M + 1 \Leftrightarrow M = \log_2(x - 1)$ , o sea que se puede escribir

$$D(x) = 1 - \frac{\log_2(x-1)}{x} - \log_2\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

después, como esto es lo contrario de lo que se ha mencionado anteriormente, esperamos obtener una interpretación diferente de lo que se ha hecho. Si se sigue el razonamiento anterior, se obtiene que  $D(x) = 1 + \frac{(x-1)}{x} \log_2(x-1) - \log_2 x$ .

Esta función sólo está definida en los puntos  $x = 2^M + 1$ , pero si tomamos a  $X$  como una variable continua, tendremos una función definida para todo  $X > 1$ :

$$\tilde{D}(X) = 1 + \frac{X-1}{X} \log_2(X-1) - \log_2 X, \quad (31)$$

cuya derivada es

$$\frac{d}{dX} \tilde{D}(X) = \frac{\log_2(X-1)}{X^2} \geq 0 \quad (X \geq 2),$$

o sea que  $\tilde{D}(X)$  es creciente, y por lo tanto también  $D(2^M + 1)$  lo es con respecto a la variable  $M$ .

8.6. Teniendo en cuenta el último resultado sobre la monotonía de  $D(2^M + 1)$  y la ecuación (29), podemos fácilmente encontrar

$$\lim_{M \rightarrow \infty} D(2^M + 1) = 1. \quad (32)$$

Esta expresión indica que la máxima diferencia entre  $H(N)$  y  $\log_2 N$  tiende a 1. De este modo, aunque la diferencia oscila y tiene máximos cada vez mayores, la función  $H(N)$  permanece siempre en la vecindad de  $\log_2 N$ . Esta es otra razón para llamar a  $H(N)$  una función quasi-logarítmica.

8.7. Utilizando las ecuaciones (20) y (21), se obtiene en forma inmediata

$$D(2N) = D(N), \quad (33)$$

expresión que pone de manifiesto una peculiar forma de "periodicidad" de la función  $D(N)$ , a pesar de su aparente oscilar caprichoso. Esta ecuación puede visualizarse fácilmente en la tabla 2.6 en la figura 8, escogiendo cualquier número (en este caso menor o igual

que 50) , y multiplicándolo por 2 .

8.8. No hemos logrado aún demostrar una propiedad que parece evidente de los cálculos realizados y de la figura 8 , pero la proponemos como una conjetaura :

$$D(N) \geq 0 . \quad (34)$$

## 9. CONCLUSIONES

Al utilizar el método binario de selección a un solo supuesto de otro orden , esperamos obtener una información expresada por la función  $H(N)$  . Sin embargo , puesto que  $H(N)$  no es creciente con respecto a  $N$  , no satisface una de las mínimas condiciones exigibles a la información que debe asociarse con la escogencia de uno entre  $N$  eventos .

Si la conjetaura (34) es válida , esto significa que la información esperada es mayor que la información que podríamos llamar intrínseca (es decir , la proporcionada por la fórmula de Shannon) . De aquí deduciríamos que el proceso de selección escogido no es eficaz en un cien por ciento , excepto cuando  $N = 2^M$  , en cuyo caso  $D(N) = 0$  , como ya se demostró .

Por supuesto , hace falta definir una medida de "eficiencia" , motivo de una futura investigación .

Bástenos señalar , por ejemplo , que en este caso la "ineficacia" se hace protuberante cuando  $N = 2^M + 1$  . Este resultado es de esperarse intuitivamente , pues al agregarle un evento a un conjunto que ya contiene  $2^M$  , estamos empleando en forma mínima las posibilidades de obtener la información que brinda la aparición de un nuevo nivel de alternativas . Para ilustrar esto , pensemos en la poca economía que representaría agregar a una calculadora electrónica un lugar decimal adicional que sólo va a ser ocupado por los dígitos cero ó uno .

De las últimas observaciones puede inferirse que el método desarrollado aquí y sus resultados quizá tengan utilidad en el análisis de decisiones , en la formulación de códigos , y en otras aplicaciones donde se requiera utilizar algún criterio de economía o de enumeración exacta de alternativas . (3) , (4) .

Finalmente , vale la pena pensar en distintas extensiones que los conceptos aquí formulados podrían recibir. La más evidente sería el cálculo de funciones  $H(N)$  que correspondieran a procesos de selección ternarios , cuaternarios , o en general , de orden  $n$  , con posible abstracción a un orden no necesariamente entero .

... obtengamos así un "índice"

Por otra parte , tomando como punto de partida la ecuación (20) que establece la propiedad cuasi-logarítmica , es interesante pensar en la generalización del concepto de función cuasi-logarítmica , lo cual podría tal vez (y ojalá) coincidir con la extensión a los otros procesos de selección señalados arriba .

Por último , es natural pensar en una generalización de otro orden , que parta de la asignación de probabilidad no uniforme a los diferentes eventos objeto de la selección .

#### 10. AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer al profesor Jorge

Rodríguez del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle , sus múltiples sugerencias con respecto a una buena parte del manuscrito de este trabajo .

#### BIBLIOGRAFIA

1. Shannon, C.E. and Weaver, W. The Mathematical Theory of Communication. University of Illinois Press, Urbana, 1949 .
2. Khinchin, A.I. Mathematical Foundations of Information Theory.

- tion Theory. Dover Publications, Inc., New York, 1957.
3. Pierce, J.R. Symbols, Signals and Noise. Harper y Row, Publishers, New York, 1965.
4. Bell, D.A. Information Theory and its Engineering Applications. Sir Isaac Pitman y Sons, Ltd., London 1968.

Departamento de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

Pereira - Colombia .