Boletín de Matemáticas
Vol. XIV , Nos. 1,2,3, (1980) pags, 107 - 126

APROXIMACION DE FUNCIONES POR POLINOMIOS DE CHEBISHEV

Diogenes ROJAS

1. INTRODUCCION

Los polinomios de Legendre se pueden obtener ortogonalizando las funciones

$$(1) \quad 1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

con respecto al producto escalar $\int_{-1}^{1} f(x)\, q(x)\, dx$ correspondiente a la medida habitual de Lebesgue en el segmento $[-1,1]$. Si se define en este segmento otra medida que satisface la condición de que las funciones (1) sean linealmente independientes en el espacio correspondiente y se aplica el proceso de ortogonalización, se obtiene un sistema de polinomios que depende en general de la selección de la medida.

Supongamos que la medida se define para los sub-conjuntos medibles del segmento $[-1,1]$ mediante

$$(2) \quad u(E) = \int_E g(x)\, dx$$

donde $g(x)$ es una función sumable no negativa fija ; en este caso la condición de ortonormalidad

$$(3) \quad (P_m, P_n) = \begin{cases} 1 \text{ para } m = n \\ 0 \text{ para } m \neq n \end{cases}$$

es de la forma

$$(4) \quad \int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, g(x)\, dx = \begin{cases} 1 \text{ para } m = n \\ 0 \text{ para } m \neq n \end{cases}$$

La función $g(x)$ que define la medida (2) es llamada núcleo o función de peso ; por ésto los polinomios que verifican la condición (4) se dicen ortogonales con respecto al núcleo $g(x)$.

La selección del núcleo lleva a diferentes sistemas de polinomios ortogonales . Si en particular se toma $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ los polinomios obtenidos coinciden , salvo un coeficiente constante , con los polinomios de Chebishev que se definen mediante la fórmula

$$(5) \quad T_n(x) = \cos n \arccos x \ (n = 1, 2, \ldots)$$

Estos polinomios son importantes en diferentes problemas de interpolación , ya que el error , cuando se usan aproximaciones basadas en series de Maclaurin , es pequeño pero no uniforme en el centro del intervalo y crece muy rápidamente en los extremos del intervalo ; en cambio el error en la aproximación con polinomios de Chebishev tiene un comportamiento más uniforme .

2. POLINOMIOS DE MEJOR APROXIMACION

Cuando se aproxima una función $f(x)$ por un polinomio de grado n

$$(6) \quad P_n(x) = a_o + a_1 x + \dots a_n x^n$$

se puede medir la desviación entre la función y el polinomio por la llamada norma de máximo :

$$(7) \quad \| f(x) - P_n(x) \|_\infty$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} | f(x) - P_n(x) | = E(f, P_n)$$

Un polinomio que minimice esta norma convencionalmente se dice que es un polinomio de mejor aproximación . La ecuación (7) define una función de $n + 1$ coeficientes a_i :

$$(8) \quad d(a_o, a_1, \dots a_n) = \max_{a \leq x \leq b} | f(x) - P_n(x) |$$

Un polinomio de mejor aproximación se caracteri za por un punto $\tilde{a}$ en el espacio de dimensión $n+1$ donde $d(\tilde{a})$ es mínimo.

Dada $f(x) \in C[a, b]$, se sabe que existe al menos un polinomio $P_n(x) \in \mathbb{P}_n(x)$ (espacio de polinomios de grado menor o igual a n), tal que

$$\operatorname*{Min}_{P_n \in \mathbb{P}_n} = \max_{a \leq x \leq b} | f(x) - P_n(X) |$$

Caractericemos este polinomio de mejor aproximación en el sentido de Chebishev.

3. TEOREMA DE CHEBISHEV (alternación del signo, equioscilación)

Si el polinomio $P_n(x)$ de grado $\leq n$ es el de mejor aproximación de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces existen a lo menos $n+2$ puntos $x \in [a, b]$ donde

$$e(x) = f(x) - P_n(x)$$

toma los valores extremos $\pm E_n$ y si en un punto vale $+ E_n$ en el punto siguiente vale $- E_n$.

Se debe demostrar que $e(x)$ toma alternativamente los valores $+ E_n$ y $- E_n$ en al menos $n + 2$ puntos x_i, $a \leq x_1 \leq x_2 \dots \leq x_{n+2} \leq b$

Demostremos primero que $e(x)$ toma al menos una vez el valor $+E_n$ y el valor $-E_n$.

La función $e(x)$ toma uno de estos valores sin que E_n sea necesariamente el máximo del error. Supongamos que tome el valor $+E_n$ y demostremos que toma $-E_n$: en efecto si no alcanza el valor $-E_n$ se tiene $-E_n < e(x) \leq E_n$ y existe entonces una constante $h > 0$ tal que $-E_n + 2h \leq e(x) \leq E_n$ y por lo tanto

$$-E_n + h \leq f(x) - [P_n(x) + h] \leq E_n - h \quad \text{y} \quad P_n(x)$$

no es polinomio de mejor aproximación en el sentido de Chebishev en $[a, b]$, éste sería $P_n(x) + h$ que da un error máximo $E_n - h \leq E_n$.

Demostremos ahora que en $[a, b]$ el número de puntos de contacto $-E_n$ y $+E_n$ es mayor o igual a $n + 2$. Como $e(x) \in C[a, b]$ podemos dividir el intervalo $[a, b]$ en intervalos consecutivos tan pequeños como sea necesario para que, si $e(x)$ alcanza uno de sus valores extremos en uno de estos intervalos, no se anule en él.

Sea $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m$ la sucesión de intervalos donde $e(x)$ toma uno de sus valores extremos.

Reagrupamos los δ_i en varios conjuntos ψ_j.

Cada uno de éstos debe contener al menos un δ_i , de tal manera que todos los δ_i sucesivos donde $e(x)$ es del mismo signo , pertenezcan al mismo ψ_j y que los δ_i sucesivos donde $e(x)$ es de signo diferente , pertenezcan a otro ψ_j . Se obtiene así una sucesión ψ_1 , ψ_2 ... de conjuntos disyuntos . Tal agrupamiento es posible ya que entre dos intervalos δ_i consecutivos debe existir un intervalo donde $e(x)$ pasa de $+E_n$ a $-E_n$, es decir se anule , lo que no sucede en ningún δ_i, luego éstos son disyuntos . En cada conjunto ψ_j, $e(x)$ es de signo constante . Los signos que caracterizan dos conjuntos ψ_j forman una alternancia . Supongamos que existen m alternancias de signo , o lo que es lo mismo , que existen a lo menos $m + 1$ puntos donde $e(x)$ toma los valores $+E_n$, $-E_n$, alternativamente .

Demostremos que $m+1 \geq n+2$, ó, $m \geq n + 1$.

Consideremos los puntos donde $e(x)$ se anula . De acuerdo a la hipótesis hay m , y pertenecen a los intervalos que separan los ψ_j . Los denotaremos $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m$.

Construyamos el polinomio de grado m .

$$\phi(x) = (\varepsilon_1 - x)\,(\varepsilon_2 - x) \ldots (\varepsilon_m - x)$$

Supongamos que $m < n+1$. Entonces $\phi(x) \in \mathbb{P}_n$, es decir, un polinomio a lo más de grado n. Notemos que $\phi(x)$ cambia de signo cuando pasa por un ϵ_i, o sea, el signo de $\phi(x)$ en ψ_k es contrario al signo de $\phi(x)$ en ψ_{k+1}. Luego $\phi(x)$ cambia de signo con $e(x)$ cuando pasa de ψ_k a ψ_{k+1}. Si se desea que $\phi(x)$ y $e(x)$ tengan el mismo signo, se puede cambiar la definición de $\phi(x)$ como sigue

Sea $\phi(x) = [\text{signo } e(x) \text{ en } \psi_j(x)](\epsilon_1 - x)(\epsilon_2 - x)\dots(\epsilon_m - x)$.

Luego $\phi(x)e(x) > 0$ para todo ψ_j, $1 \leq j \leq m+1$

Construyamos el polinomio $p_n(x) + \epsilon\phi(x)$ que sea el de mejor aproximación de $f(x)$, donde ϵ es positivo y suficientemente pequeño tal que

$| f(x) - (p_n(x) + \epsilon\phi(x)) | < E_n \quad x \notin \psi_j$

Esto es posible, ya que si $x \notin \psi_j$ entonces

$| f(x) - p_n(x) | < E_n$. Si $x \in \psi_j$, $e(x) = f(x) - p_n(x)$ y $\epsilon\phi(x)$ son del mismo signo, por lo tanto se tiene

$$|f-p_n-\epsilon\phi| = |f-p_n| - \epsilon\,|\phi| \leq E_n - \epsilon|\phi|$$

luego $\quad |f-p_n-\epsilon\phi| \leq E_n \quad$ para $\quad x \in \psi_j$

Entonces si $m < n+1$ existe un polinomio $p_n(x) + \epsilon\phi(x)$ que pertenece a $\mathbb{P}_n$ y que da una mejor aproximación de $f(x)$ en $[a, b]$ lo que es contradictorio, luego $\underline{m \geq n+1}$

Entonces el número de puntos donde $e(x)$ toma los valores $+E_n$, $-E_n$ alternativamente es al menos igual a $n+2$.

Aplicación : Hallar el polinomio mini-max de primer grado o menor grado sobre el intervalo $[a, b]$ para una función $f(x)$ con $f''(x) > 0$.

Sea $p(x) = Mx + B$ el polinomio buscado. Debemos hallar tres puntos $x_1 < x_2 < x_3$ en (a,b) para los cuales $e(x) = f(x) - p_n(x)$, tome sus valores extremos con signos alternados. Uno de estos puntos x_2 está en el interior de $[a, b]$ y requiere que $e'(x_2)=0$, o sea, $f'(x_2) = M$. Como $f''(x) > 0$, $f'(x)$ es estrictamente creciente y puede ser igual a M una sola vez, lo que significa que x_2 puede ser el único punto interior extremo. Así $x_1 = a$ y $x_3 = b$. Finalmente

$$f(a) - p(a) = -|f(x_2) - p(x_2)| = f(b) - p(b)$$

resolviendo tenemos

$$M = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$B = \frac{f(a)+f(x_2)}{2} - \frac{(a+x_2)\,[f(b) - f(a)]}{2(b-a)}$$

con x_2 determinado por $f'(x_2) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

4. TEOREMA DE UNICIDAD

Si para n fijo existe un polinomio $p_n(x)$ de mejor aproximación de $f(x)$, este polinomio es único.

Supongamos que existen dos polinomios de mejor aproximación y de grado n, $\bar{p}_n(x)$, $\bar{\bar{p}}_n(x)$. Por hipótesis

$$-E_n \leq f - \bar{p}_n \leq E_n \qquad -E_n \leq f - \bar{\bar{p}}_n \leq E_n$$

luego $\quad -E_n < f - \dfrac{\bar{p}_n + \bar{\bar{p}}_n}{2} < E_n$

y el polinomio $\dfrac{\bar{p}_n + \bar{\bar{p}}_n}{2}$ es a su vez un polinomio de mejor aproximación. Apliquemos a este polinomio el teorema de Chebishev. La función

$$e(x) = f(x) - \frac{\bar{p}_n(x) + \bar{\bar{p}}_n(x)}{2}$$

toma al menos $n+2$ veces alternativamente los valores $\pm E_n$.

Existe entonces un conjunto compuesto al menos de $n+2$ puntos x_i tal que

$$f(x_i) - \frac{\bar{p}_n(x_i) + \bar{\bar{p}}_n(x_i)}{2} = \pm (-1)^i E_n$$

ó , $$\frac{f(x_i) - \bar{p}_n(x_i)}{2} + \frac{f(x_i) - \bar{\bar{p}}_n(x_i)}{2} = \pm (-1)^i E_n$$

Como el máximo de cada uno de estos dos términos es $\frac{E_n}{2}$, la relación anterior se verifica si se tiene simultáneamente

$$\frac{f(x_i) - \bar{p}_n(x_i)}{2} = \pm \frac{E_n(-1)^i}{2}$$

$$\frac{f(x_i) - \bar{\bar{p}}_n(x_i)}{2} = \pm \frac{E_n(-1)^i}{2}$$

o sea , $\bar{p}_n(x_i) = f(x_i) \mp E_n(-1)^i$, $\bar{\bar{p}}_n(x_i) = f(x_i) \mp E_n(-1)^i$ luego los dos polinomios toman el mismo valor en a lo menos $n+2$ puntos , y como son de igual grado , son idénticos .

5. RECIPROCO DEL TEOREMA DE CHEBISHEV

Sea $f(x) \in C[a, b]$. Sea $p_n(x) \in \mathbb{P}_n$

con $\max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| = \delta$.

Si existen n+2 puntos x_i ; $a \leq x_1 \leq x_2 \ldots \leq x_{n+2} \leq b$

tales que $f(x_i) - p_n(x_i) = \pm\, \delta$ con alternancia de signo, entonces $\delta = E_n(f)$ y $p_n(x)$ es el polinomio de mejor a proximación de $f(x)$ en $[a, b]$.

Por definición , si $p_n(x)$ es el polinomio de mejor aproximación de f en $[a, b]$, se tiene

$$E_n(f) = \max_{a \leq x \leq b} | f(x) - p_n(x)|$$

y $E_n(f) \leq \delta$. Supongamos que $E_n(f) < \delta$. Sea

$$q_n(x_i) - p_n(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) - [f(x_i) - q_n(x_i)] .$$

Como $\max\limits_{a < x < b} |f(x) - p_n(x)| = E_n(f) < \delta$,

si tomamos $t_i = f(x_i) - q_n(x_i)$

se tiene $|t_i| < \delta$ y $q_n(x_i) - p_n(x_i) = \pm\, \delta - t_i$

luego $q_n - p_n$ cambia n+2 veces de signo luego tiene n+1 raíces ; ésto implica que $p_n(x) = q_n(x)$.

6. COROLARIO (TEOREMA DE LA VALLEE POUSSIN)

Si $f(x) - p_n(x)$ es de signo alternado en n+2 puntos del intervalo $[a, b]$ y en uno de estos puntos el valor absoluto de $f(x) - p_n(x)$ es mayor o igual a p', entonces p' es una cota inferior de E_n.

Tomemos $p' = \operatorname{Min}_{x_i} |f(x_i) - p_n(x_i)|$ y demostremos que $p' < E_n$. Supongamos que se tiene $p' \geq E_n$ donde $E_n = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - q_n(x)|$.

Entonces, de $q_n - p_n = f - p_n - (f - q_n)$, se tiene:

$q_n(x_i) - p_n(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) - [f(x_i) - q_n(x_i)]$.

Sea $q_n(x_i) - p_n(x_i) = p_i - t_i$ ó $|t_i| \leq E_n < p' \leq p_i$, luego $q_n(x) - p_n(x)$ cambia $n+2$ veces de signo y tiene $n+1$ raíces, lo cual no es posible.

7. DEFINICIONES

Definimos los polinomios de Chebishev de primera especie de la manera siguiente:

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{arc} \cos x) \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$T_n(x) = \cosh(n \operatorname{arg} \cosh x) \qquad |x| > 1$$

Definimos los polinomios de Chebishev de segunda especie , así :

$$V_n(x) = \text{sen}\ (n \text{ arc cos } x) \qquad |x| \leq 1$$

$$V_n(x) = \text{senh}\ (n \text{ argcosh } x) \qquad |x| > 1$$

A partir de las anteriores definiciones se pueden construir los polinomios trasladados al intervalo $0 \leq x \leq 1$.

Para comprobar el carácter polinomial de $T_n(x)$ procedemos de la siguiente forma :

Si $T_n(x) = \cos\ (n \text{ arcos } x)$ y $\theta = \text{arcos } x$, entonces $x = \cos\ \theta$;

luego $T_n(x) = \cos n\theta = \text{Re}\ (\cos n\theta + i \text{ sen } n\theta) = \text{Re}\ (e^{in\theta})$
$= \text{Re}(e^{i\theta})^n = \text{Re}(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)^n$

$$T_n(x) = \text{Re}\ (x + i\sqrt{1-x^2}\,)^n = \text{Re} \sum_{k=0}^{n} C_k^n\ x^{n-k} i^k (1-x^2)^{k/2}$$

Si $k = 2j$, la parte real de la suma se obtiene haciendo $j = \frac{k}{2}$ y haciendo la suma hasta $n/2$.

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n/2} i^{2j}\ C_{2j}^n\ x^{n-2j}\ (1-x^2)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n/2} (-1)^j\ C_{2j}^n\ x^{n-2j} (1-x^2)^j$$

Si $k = 2j+1$ la parte real de la suma se obtiene efectuando la suma hasta $j = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n}{2j} (-1)^j \, k^{n-2j} \, (1-x^2)^j$$

Si n es par, T_n tiene únicamente potencias pares de x y si n es impar, tiene únicamente potencias impares de x.

8. APLICACIONES

8.1 Ecuación de recurrencia a tres términos.

Los polinomios de primera clase o especie, se han definido como $T_n(x) = \cos(n \operatorname{arc} \cos x) = \cos n\theta$

$$x = \cos\theta \qquad -1 \leq x \leq 1 \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi .$$

Luego $T_{n+1}(x) = \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos\theta - \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen}\theta$

$$T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos\theta + \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen}\theta$$

y sumando se obtiene

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\, T_n(x)$$

que es la ecuación de recurrencia a tres términos y se puede empezar con $T_o(x) = 1$, $T_1(x) = x$

8.2 Obtención de una función generatriz

Partimos de

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{in\theta} = \frac{1}{1-te^{i\theta}} \qquad t < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{-in\theta} = \frac{1}{1-te^{-i\theta}} \qquad t < 1$$

luego $$\sum_{n=0}^{\infty} t^n (e^{in\theta}+e^{-in\theta}) = \frac{1}{1-te^{i\theta}} + \frac{1}{1-te^{-i\theta}} =$$

$$\frac{1 - t(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 1}{1 - t(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + t^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos n\theta = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2}$$

se obtiene entonces

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x)$$

es decir, para generar $T_n(x)$ se divide $1-tx$ por $1-2tx+t^2$.

8.3 Como solución de una Ecuación Diferencial

Con la aplicación del método de FROBENIUS a la ecuación diferencial

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

para $|x| < 1$, se obtienen las soluciones no singulares

$$y_1(x) = 1 - \frac{n^2}{2!}x^2 - \frac{(2^2-n^2)\,n^2}{4!}x^4 - \frac{(4^2-n^2)(2^2-n^2)\,n^2}{6!}x^6 -$$

$$- \dots - \frac{[(2m)^2 - n^2]\dots(2^2-n^2)\,n^2}{(2m)!}x^{2m} - \dots -$$

$$y_2(x) = x + \frac{1-n^2}{3!}x^3 + \frac{(3^2-n^2)(1-n^2)}{5!}x^5 + \dots$$

$$+ \frac{[(2m+1)^2 - n^2]\dots(1-n^2)}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \dots$$

que terminan con x^n cuando n es par o impar , así pues si $n = 0$, $y = 1$; si $n = 1$, $y = x$; si $n = 2$, $y = 1-2x^2$; si $n = 3$, $y = x - \frac{4}{3}x^3$

que convenientemente normalizados dan lugar a los polinomios de Chebishev . También se puede obtener de la función hipergeométrica que se logra como solución de la ecuación hipergeométrica , por el método de Frobenius .

9. ALGUNAS PROPIEDADES

9.1 $T_n(x)$ es un polinomio de grado n en x. Si n es par $T_n(x)$ es un polinomio par, si n es impar $T_n(x)$ es un polinomio impar.

9.2 El coeficiente de x^n en $T_n(x)$ es 2^{n-1}

Es suficiente observar en la recurrencia a tres términos

$$T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad \text{con} \quad t_o(x) = 1\,, \quad t_1(x) = x\,,$$

que el coeficiente de x^n en $T_n(x)$ es $2x$ por el coeficiente de x^{n-1} en $T_{n-1}(x)$, luego el coeficiente de x en $T_1(x)$ es 1, el coeficiente de x^2 en $T_2(x)$ es 2, el coeficiente de x^3 en $T_3(x)$ es 2^2 y así sucesivamente.

9.3 El valor absoluto de $T_n(x)$ es menor o igual a 1

$$|T_n(x)| \leq 1 \qquad -1 \leq x \leq 1 \qquad \text{para todo } n.$$

Basta simplemente observar su forma trigonométrica

9.4 Valores de x para los cuales

$$T_n(x) = \pm 1 \quad (n > 0)$$

De $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ con $x = \cos\theta$, se tiene $\cos n\theta = \pm 1$ lo cual nos permite concluir que alcanza valores ± 1 alternativamente en los puntos

$$x_j = \cos \frac{j\pi}{n} \qquad j = 0, 1, \ldots n \qquad y$$

$$T_n(x_j) = (-1)^j$$

9.5 Raíces de los polinomios de Chebishev

$T_n(x)$ tiene exactamente n raíces en el intervalo $[-1,1]$ y puesto que $\cos n\theta = 0$, estas raíces están localizadas en los puntos

$$x_j = \cos \frac{2j+1}{n} \frac{\pi}{2} \qquad j = 0, 1, 2 \ldots n$$

9.6 Ortogonalidad de los polinomios de Chebishev .

Los polinomios de Chebishev son ortogonales respecto a la densidad $(1 - x^2)^{-1/2}$ en el intervalo $[-1,1]$

es decir
$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\, T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \end{cases}$$

Se tiene
$$\int_{0}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \end{cases}$$

haciendo $x = \cos\theta$; $\text{arc} \cos x = \theta$

$$dx = -\operatorname{sen}\theta \, d\theta \quad (\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-x^2}) \quad \text{luego} \quad d\theta = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad dx$$

y se tiene

$$\int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = -\int_1^{-1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m T_n}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

que es el resultado deseado .

BIBLIOGRAFIA

1. Stark, Peter A. Introduction to Numerical Methods. New York, Mac Millan, 1970 .

2. Hamming,Richard. Introduction to applied Numerical Analysis. New York, McGraw-Hill, 1971 .

3. Pennington, Ralph H. Introductory computer Methods and Numerical Analysis. New York, Mac-Millan, 1970

4. Scheid, Francis. Theory and Problems of Numerical Analysis. Schaum's Outline Series. New York, McGraw-Hill, 1968 .

5. Hildebrand, F. B. Introduction to Numerical Analysis. New York, McGraw-Hill, 1956 .

6. Ralston Anthony. A First course in Numerical Analysis. New York, MacGraw-Hill, 1965 .

7. Lanczos C. Applied Analysis. Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs N.J., 1956 .

8. Cheney E.W. and H. Loeb. On Rational Chebishev aproximation. Numer, Math. vol. 4 pags 124-127 (1962).

9. Cheney E. W. and T. H. Southard. A Survey of Methods for Rational approximation with particular reference to a new method based on a formula of Darboux . Si A. M. Rev. vo. 5 pags 219-231 (1963) .

Diogenes ROJAS

Departamento de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

Pereira - Colombia .