Boletín de Matemáticas
Vol. XV, No. 1 (1981) pags. 1 - 16

LA CONVERGENCIA EN LA TOPOLOGIA DE LOS COMPLEMENTARIOS FINITOS

Manuel MORENO VALENCIA.

1. DEFINICION

Sea X un conjunto, sea $\mathcal{A}$ la colección de subconjuntos de X formada por X, $\emptyset$ y todos los subconjuntos, O, de X, tales que $X - O$ es finito.

1.a. $\mathcal{A}$ es una topología sobre X.

i. $\emptyset$ y X son elementos de $\mathcal{A}$.

ii. Sea $\{O_i\}$ $i \in I$ una familia de elementos de $\mathcal{A}$, entonces $X - \bigcup_{i \in I} O_i = \bigcap_{i \in I} (X - O_i)$ es finito. Luego $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{A}$.

iii. Sean O_1 y O_2 elementos de $\mathcal{A}$, entonces $(X - O_1)$ y $(X - O_2)$ son conjuntos finitos. Veamos que $X - (O_1 \cap O_2)$ es finito.

$X - (O_1 \cap O_2) = (X - O_1) \cup (X - O_2)$ es finito, por lo tanto $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ se llama __la topología de los complementarios finitos__ y la notamos $\mathcal{A}_{cf}$.

1.b. Los conjuntos cerrados de $\mathcal{A}_{cf}$ son X, $\emptyset$ y los subconjuntos finitos de X.

2. DEFINICION DE VALOR CONSTANTE DE UNA SUCESION

Sea S una sucesión de un conjunto X, se dice que x, elemento de X es un __valor constante de la sucesión__ $\underline{S}$, si y solo si, existe una subsucesión S' de S tal que S' es la sucesión constante de valor x.

Ejemplo 1. Sea $S : N \to R$ una sucesión definida por :

$$S(n) = \begin{cases} \pi & \text{si } n \text{ es par} \\ n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Luego, π es un valor constante de la sucesión S.

3. CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE SUCESIONES EN UN ESPACIO

3.a. Se dice que una sucesión S de un conjunto X converge a $x \in X$ si y solo si, para toda vecindad V de x, se tiene que S está casi toda en V; es decir, el conjunto $\{n \mid S(n) \notin V\}$ es finito.

3.b. Si una sucesión S de X converge a $x \in X$ y si S' es una subsucesión de S, entonces S' converge a x.

3.c. Demostraremos a continuación una serie de proposiciones sobre la convergencia en $(X, \mathcal{A}_{cf})$

PROPOSICION 1.

Sea S una sucesión en $(X, \mathcal{A}_{cf})$. S converge a x, elemento de X, si y solo si, para todo y, elemento de X, $y \neq x$, y no es un valor constante de S.

DEMOSTRACION.

i. Demostremos que si S converge a x, entonces para $y \neq x$, y no es valor constante de S. Supongamos que existe $y_o \neq x$ tal que, y_o es valor constante de S. Entonces existe una subsucesión S' tal que $S' = Sy_o$ (donde Sy_o es la sucesión constante de valor y_o).

Probaremos que si A es el complemento de $\{y_o\}$, entonces A es un elemento de $\mathcal{A}_{cf}$ tal que $x \in A$ y $S^{-1}(A^c)$ no es finito. Por lo tanto, S no converge a x. En efecto, sea $y_o \in X - A = A^c$; como y_o es valor constante entonces, $S^{-1}(\{y_o\}) \subset S^{-1}(A^c)$ y por lo tanto

$S^{-1}(A^c)$ no es finito .

ii. Demostremos que si para todo $y \neq x$ se tiene que y no es un valor constante de S , entonces S converge a x .

Sean $A \in \mathcal{A}_{cf}$, $x \in A$. Veamos que $S^{-1}(A^c)$ es finito . Como $A \in \mathcal{A}_{cf}$, entonces A^c es finito . Supongamos que tiene p elementos y sean éstos $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Entonces $S^{-1}(\{y_1\})$, $S^{-1}(\{y_2\}), \ldots, S^{-1}(\{y_p\})$ son todos finitos ya que ninguno de los y_i $i = 1,2,\ldots p$ es valor constante de S . Por lo tanto ,

$S^{-1}(\{y_1\}) \cup S^{-1}(\{y_2\}) \cup \ldots \cup S^{-1}(\{y_p\}) = S^{-1}(A^c)$

es finito y por lo tanto S converge a x .

4. CLASIFICACION DE LA CONVERGENCIA POR EL CARDINAL DEL CONJUNTO DE VALORES CONSTANTES EN $(X, \mathcal{A}_{cf})$

Sean S una sucesión de $(X, \mathcal{A}_{cf})$ y H el conjunto de valores constantes de S .

PROPOSICION 2.

a) Si card $H = 0$ entonces S converge a todo elemento de X .

b) Si card $H = 1$ entonces S converge al único valor perteneciente a H .

c) Si $\text{card } H > 1$ entonces S no converge a ningún valor de X .

Demostración de a).

Sea S una sucesión de X , tal que S no tiene valores constantes , es decir , $\text{card } H = 0$.

Sea $x \in X$. Demostremos que S converge a x. Sean $A \in \mathcal{A}_{cf}$, $x \in A$, luego , A^c es finito y como S no tiene valores constantes , entonces para todo $y \in A^c$, $S^{-1}(\{y\})$ es finito . Por lo tanto , $S^{-1}(A^c) = \bigcup_{y \in A^c} S^{-1}(\{y\})$ es finito , de donde se concluye que casi toda S está en A, esto es, S converge a x .

Demostración de b).

Sea S una sucesión de X con un solo valor constante x_o, es decir $H = \{x_o\}$. Veamos que para todo $y \in X$, $y \neq x_o$, S no puede converger a y .

Sea $A = \{x_o\}^c$. Luego , $A \in \mathcal{A}_{cf}$, $y \in A$, $x_o \in A^c$. Ahora , como $x_o \in H$ entonces

$S^{-1}(\{x_o\}) = \{n | S(n) = x_o\}$ no es finito y , por tanto, $S^{-1}(\{x_o\}) \subset S^{-1}(A^c)$ no es finito . De donde se tiene que S no converge a y para todo $y \neq x_o$.

Demostración de c).

Sean x_1 y x_2 elementos de H , existen S' y S" subsucesiones de S tales que $S' = Sx_1$ y $S'' = Sx_2$. Sea $A_1 = \{x_2\}^c$, tal que $x_1 \in A_1$. Claramente se ve que S no converge a x_1 , ya que $S^{-1}(A_1{}^c)$ sería infinito .

En la misma forma se demuestra que S no converge a x_2 . Veamos ahora que S no converge a y para todo $y \in X$.

Como $y \neq x_1$, $y \neq x_2$, basta tomar para todo $y \in X$ un abierto de X que contenga a y , pero no a x_1 y/o a x_2 .

De lo anterior concluimos que S no converge a ningún valor de X .

5. VALOR DE ADHERENCIA

Definición

Sea S una sucesión en un espacio X ,

un elemento <u>e</u> de X es un <u>valor de adherencia</u> de S si existe S' subsucesión de S, que converge a <u>e</u>. Denotaremos por E el conjunto de valores de adherencia de la sucesión S.

6. RELACIONES ENTRE VALOR CONSTANTE, VALOR DE ADHERENCIA Y VALOR LIMITE DE UNA SUCESION $(X, \mathcal{A}_{cf})$.

6.a. Si S es una sucesión en $(X, \mathcal{A}_{cf})$ entonces $H \subset E$.

Demostración

Sea $x \in H$ entonces existe S' subsucesión de S, tal que $S' = Sx$ luego S' converge a x, y por tanto $x \in E$.

Para ver que $E \not\subset H$, basta tomar una sucesión S para la cual $H = \emptyset$. Por la proposición 2, parte a, se tiene que S converge a todo punto de X; y por 3.b. se tiene que si S' es una subsucesión de S, entonces S' converge a todo valor de X y, por tanto, $E = X$.

6.b. Si x es un valor límite de una sucesión, S de X entonces $x \in E$.

La demostración se obtiene usando 3.b.

El recíproco de esta proposición no se tiene, puesto que si, H tiene dos valores, entonces por la proposición 2, parte c, se tiene que el conjunto de valores límites es vacío.

6.c. Si S converge a x_o y S no es Sx_o entonces $E = X$.

Demostración

Como S no es Sx_o. Existe S' subsucesión de S, tal que $S' \subset X - \{x_o\}$. Ahora, como S' converge a x_o (por 3.b.), entonces por la proposición 1, ningún punto $y \neq x_o$ es valor constante de S. Luego, para toda subsucesión S" de S' se tiene que $S" \neq Sy$, de donde el conjunto de valores constantes de S' es vacío (porque tampoco x_o es valor constante). Por la proposición 2, parte a, aplicada a S' el conjunto de valores límites de S' es X.

6.d. Si el conjunto de valores límites de S es finito, entonces $H \neq \emptyset$.

Demostración

Si $H = \emptyset$ entonces por proposición 2, parte a se tiene que el conjunto de valores límites de

S es X , el cual no es finito .

6.e. Si el conjunto de valores límites de una sucesión S es x_o , entonces $H = \{x_o\}$.

Demostración

De acuerdo con la proposición 2, como S es convergente , únicamente pueden darse dos casos : ó , card $H = 0$, ó card $H = 1$. Pero , de acuerdo con 6.d. , y , como se supone que S tiene un solo valor límite , queda excluído el primer caso . Por consiguiente , Se tiene necesariamente que card $H = 1$. En caso de que $H = \{y\}$ con $y \neq x_o$ llegaríamos a una contradicción aplicando la proposición 1. En consecuencia , $H = \{x_o\}$.

7. TEOREMA FUNDAMENTAL

Con base en las proposiciones 2.b. y 6.c. , hemos demostrado el siguiente teorema :

Las dos proposiciones siguientes son equivalentes para una sucesión S en X :

a) El conjunto de valores límites de una sucesión S en $(X, \mathcal{A}_{cf})$ es un solo punto .

b) El conjunto H de valores constantes de S en

$(X, \mathcal{A}_{cf})$ tiene un solo punto x_o .

8. SOBRE OTRA NOCION DE VALORES DE ADHERENCIA EN $(X,\mathcal{A}_{cf})$

Como una sucesión S de puntos de X es una aplicación $S : \mathbb{N} \to X$, el valor de S en el entero n , será notado $S(n)$. El conjunto de valores $\{S(p) \mid p \geq n\}$ será denotado por K_n y, si en X se considera una topología , $\overline{K}_n$ denotará , como de costumbre , su adherencia para esa topología .

Definición

Sea S una sucesión en $(X, \mathcal{A}_{cf})$. Definimos el conjunto de " valores adherencia del filtro asociado a S " por

$$K = \bigcap_{n > o} \overline{K}_n \text{ , donde } K_n = \{S(n), S(n+1), S(n+2), \ldots\}$$

PROPOSICION 3.

En $(X, \mathcal{A}_{cf})$, $E = K$

Demostración

i). Demostraremos que $E \subset K$.

Sea $x \in E$, es decir , existe S' subsucesión de S tal que S' converge a x .

Sea V una vecindad de x . Como S' converge a x , existe n_{i_o} tal que , para todo n_i , si $n_i > n_{i_o}$ entonces , S' está casi toda en V . De lo anterior se obtiene que $V \cap K_n \neq \emptyset$ para todo n . Luego $x \in \overline{K}_n$ para todo n . En conclusión , $x \in \bigcap_{n > o} \overline{K}_n = K$.

ii). Demostraremos que $K \subset E$.

a) Si $x \notin K_n$ (pero $x \in \overline{K}_p$, para todo p) , entonces K_n no puede ser finito , ya que si ésto ocurre, dado que K_n es cerrado se obtendría $K_n = \overline{K}_n$ lo cual es contradictorio . (Porque por hipótesis $x \notin K_n$ y $x \in \overline{K}_n$). Entonces existe S' subsucesión de S , tal que S' no tiene valores constantes . Por la proposición 2, parte a. S' converge a cualquier punto de X , en particular a x y , por 3.b. , $x \in E$.

b) Si $x \in K_n$ para todo n , llamamos $p(1)$ el primer entero tal que $x = S(p(1))$, como $x \in K_{p(1)+1}$. Sea $p(2)$ el primer entero que cumple $p(1) + 1 \leq p(2)$, y , $x = S(p(2))$. En la misma forma como $x \in K_{p(2)+1}$, sea $p(3)$ el primer entero , $p(2)+1 \leq p(3)$ tal que $x = S(p(3))$ y así sucesivamente .

$P : N \to N$ es inyectiva . $S \cdot p = Sx$.

En síntesis para cada n , llamamos $S(p(n))$ el primer elemento de K_n tal que $S(p(n)) = x$, es decir tomamos $S' = S \cdot p$ una subsucesión de S , de valor constante x , luego $x \in E$. De (a) y (b) se concluye que $K \subset E$.

Nota :

La igualdad anterior se cumple en un espacio X con una topología 1 - Contable .

9. COMPACIDAD DE $(X, \mathcal{A}_{cf})$

a) Definición :

Un espacio $(X, \mathcal{A})$, <u>es compacto</u> , si para toda familia de abiertos cuya reunión es X (cubrimiento abierto) , existe un número finito de éllos cuya reunión es también X .

b) PROPOSICION 4.

$(X, \mathcal{A}_{cf})$ es compacto .

Demostración

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de X. Sea U_{i_o} un elemento de $\mathcal{U}$, entonces $X - U_{i_o}$ es finito. Supongamos que tiene p elementos , es decir , $X - U_{i_o} = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Existen abiertos ,

$U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots U_{i_p}$ en $\mathcal{U}$, tales que $x_j \in U_{i_j}$, $j = 1, 2, 3, \ldots p$. Luego $\{U_{i_o}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_p}\}$ es un cubrimiento finito de X. Por lo tanto X es compacto.

c) Definición

En un espacio $(X, \mathcal{A})$ se cumple la propiedad de las <u>intersecciones</u> <u>finitas</u>, si cuando para toda familia de cerrados $\{C_i\}_{i \in I}$, en la que todo número finito de éllos tiene intersección no vacía, se verifica que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.

d) PROPOSICION 5.

$(X, \mathcal{A}_{cf})$ cumple la propiedad de intersecciones finitas.

Demostración

Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados tal que cualquier número finito de éllos tiene intersección no vacía. Supongamos que $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$, entonces $X = X - \bigcap_{i \in I} C_i = \bigcup_{i \in I} (X - C_i)$ Como $X - C_i$ es abierto para todo i, $\{X - C_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de X; como X es compacto existe $\{X - C_1, X - C_2, \ldots, X - C_n\}$ un subcubrimiento finito de

X , entonces :

$$X = \bigcup_{i\in I}^{n} (X - C_i) = X - \bigcap_{i\in I}^{n} C_i$$

lo cual es absurdo ya que $\bigcap_{i\in I}^{n} C_i \neq \emptyset$, por tanto en X

se cumple la propiedad de intersecciones finitas .

e) PROPOSICION 6.

Sea S una sucesión en $(X, \mathcal{A}_{cf})$ entonces , el conjunto de sus valores de adherencia E no es vacío .

Demostración

Como $E = K = \bigcap_{n>o} \overline{K}_n$, $\overline{K}_n$ es cerrado , y , como en X se cumple la propiedad de intersecciones finitas , entonces , $\bigcap_{n>o} \overline{K}_n \neq \emptyset$.

f) PROPOSICION 7.

Sea S una sucesión en $(X, \mathcal{A}_{cf})$. Si $E = \{x_o\}$ entonces x_o es un valor límite de S.

Demostración

Sea $A \in \mathcal{A}_{cf}$ tal que $x_o \in A$, entonces A^c es cerrado y $A^c \cap \overline{K}_n$ es cerrado para todo n .

$\bigcap_{n>o} (A^c \cap \overline{K}_n) = A^c \cap (\bigcap_{n>o} \overline{K}_n) = A^c \cap \{x_o\} = \emptyset$. Como en

X se cumple la propiedad de intersecciones finitas , este hecho nos dice que hay un número finito de los $\overline{K}n \cap A^c$, cuya intersección es vacía . Sean éstos

$\overline{K}_{n_1} \cap A^c , \ldots , \overline{K}_{n_p} \cap A^c$. Los índices los tomamos de tal manera que

$$n_p = \max \{ n_1, n_2 \ldots n_p \} . \quad \text{Entonces}$$

$(A^c \cap K_{n_p}) = \emptyset$. Luego $\overline{K}_{n_p} \subset A$. Por tanto $K_{n_p} \subset A$.

Concluímos entonces que S converge a x .

BIBLIOGRAFIA :

(1) Ruiz,S.C., Topología o Convergencia. Tunja, Editorial La Rana y el Aguila. 1975.

(2) Willard, S., General Topology. Addison - Wesley Publishing Company. 1970.

(3) Bourbaky, N., General Topology, Part 1 Paris, Herman; Reading, Massachusetts, Addison - Wesley Publishing Company, 1966.

(4) G. Fleitas Morales, J. Margalef, Roig, Problemas de Topología General. Madrid. Editorial Alhambra.

(5) Kasriel, R. H., Undergraduate Topology. W.B Saunders Company 1971.

Manuel MORENO VALENCIA

Sección de Matemáticas

Universidad Innca de Colombia

Bogotá - Colombia .